

УДК 539.3:534.1

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРУГОВЫХ ТРЕЩИН, ВЫХОДЯЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ ТРУБ С ПОМОЩЬЮ СОЧЕТАНИЯ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ¹

Соловьев А.Н.², Нгуен З.Ч.Занг³

IDENTIFICATION OF CIRCULAR CRACKS, EXTENDING TO THE SURFACE OF A PIPE USING THE FINITE
ELEMENT METHOD AND ARTIFICIAL NEURAL NETWORK

Solovyev A.N., Nguyen D.T.G.*

* Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia, e-mail: solovievarc@gmail.com

Abstract: The current paper describes the crack defect identification on the internal and external surfaces of the pipe. Defects represent circular crosscut cracks extending to the surface. It is assumed that the boundaries of the crack do not interact with each other. The problem of determining the depth of the crack leads to geometric inverse problem in elasticity theory. The solution to geometric inverse problem is based on the combination of finite element analysis and artificial neural networks. In addition, amplitude-time characteristics of components of the displacement vector are required for inverse problem. In solving direct problem, since a finite piece of a pipe is considered, the radial and axial displacements are measured during a short period of time. For that time, the waves reflected from the ends of the pipe cannot reach the receiver. The process of displacement measurement in this paper is simulated using calculation of finite elements software ANSYS. In the shown numerical example of this report, the depth of a crack is identified. Moreover, we investigate the dependence of this identification's accuracy upon input data, the architecture of neural network, the time-consuming of the training process as well as the accuracy of data inputs.

Keywords: crack, defect of pipes, finite element analysis, waveform, fast Fourier transform, artificial neural network.

Введение

Реконструкция дефектов в трубопроводах, вызванных механическим воздействием или коррозией, является важной технической проблемой, успешное решение которой может предотвратить разрушение труб. Такая идентификация может быть осуществлена с помощью приборов, которые двигаются вдоль трубопровода и осуществляют их мониторинг. Более привлекательным способом обнаружения является использование акустических датчиков и приемников, установленных на трубе и обнаруживающих повреждение на основе отраженных сигналов от дефектов. Такая система должна быть снабжена программным обеспечением (ПО), позволяющим по анализу отраженного сигнала идентифицировать повреждение и его степень. Соответствующее ПО может быть разработано на основе использования искусственной нейронной сети (ИНС) [1]. Приме-

нение ИНС в задачах реконструкции поврежденного состояния элементов конструкций описано в работах [2–8]. Применение различных архитектур и алгоритмов ИНС описано в [2–6]. Определению дефектов в анизотропных пластинах с помощью ИНС посвящена работа [7]. В работе [8] авторы указали преимущества методов идентификации, не требующих предварительного построения математической модели объекта исследования.

В настоящей работе разрабатывается метод реконструкции поверхностных дефектов в трубах. Математически проблема сводится к обратной геометрической задаче теории упругости [9]. Предполагается, что дефекты расположены на внешней или внутренней поверхности трубы и имеют осесимметричную конфигурацию. Нестационарный акустический сигнал возбуждается датчиком, находящимся на некотором расстоянии от дефекта, приемник расположен там же, где и датчик. Поставленная задача решает-

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (гранты № 13-01-00196А, 13-01-00943А).

²Соловьев Аркадий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета; e-mail: solovievarc@gmail.com.

³Нгуен Зуй Чыонг Занг, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета; e-mail: giangvnu@gmail.com.

ся в осесимметричной постановке с помощью метода конечных элементов (МКЭ). С этой целью построена конечно-элементная модель фрагмента трубопровода (рис. 1) в пакете ANSYS. Отраженный от дефекта сигнал в виде амплитудно-временной характеристики (АВХ) радиального и осевого смещений измеряется в течение времени, когда волны, отраженные от концов отрезка трубы, не успевают прийти на приемник, таким способом моделируются реальные условия протяженного трубопровода.

Анализ измеренных АВХ показывает возможность их использования в обратных задачах восстановления дефектов. В качестве инструмента решения обратной задачи реконструкции параметров дефекта используется ИНС. Популярность использования ИНС обусловлена тем, что они изначально проектировались для решения именно таких задач, для нахождения нелинейных зависимостей в многомерных массивах данных. ИНС, в отличие от других алгоритмических конструкций, не программируются, а обучаются на множестве данных для различных параметров дефекта. Обучающие выборки строятся путем решения прямых задач в ANSYS. Обученная сеть, получив уже новые, неизвестные ранее результаты анализа, способна корректно распознать параметры дефекта. Входные данные для обучения ИНС могут быть преобразованы с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) [10], что улучшает процесс реконструкции. В работе исследованы вопросы архитектуры ИНС, способы представления обучающей информации и влияние размеров дефектов на точность и время их идентификации.

1. Континуальная и конечно-элементная постановки задачи

Напряженно деформированное состояние трубы исследуется в рамках осесимметричной задачи линейной теории упругости. Фрагмент трубы занимает в цилиндрической системе координат (r_*, θ, z_*) область

$$\Omega: r - \frac{t_r}{2} \leq r_* \leq r + \frac{t_r}{2},$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z_* \leq l.$$

Рассматривается случай, когда нижняя торцевая плоскость $z_* = 0$ закреплена, верхняя торцевая плоскость и внутренняя цилиндрическая поверхность свободны от напряжений, внешняя поверхность трубы также свободна от напряжений, а в месте расположения датчика действует осесимметричная динамическая нагрузка (нормальная сила) $F(z_*, t) = F_0(t) * \delta(z_* - l/2)$, границы дефектов, расположенных на внутренней и внешней поверхностях трубы, также свободны от напряжений.

В общем случае дифференциальные уравнения осесимметричного движения однородной упругой среды в цилиндрической системе координат записываются в виде [11]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 U^*}{\partial t_*^2} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r_*} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z_*} + \frac{\sigma_{rz}}{r_*} - \rho \frac{\partial^2 W^*}{\partial t_*^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Уравнения состояния описываются равенствами [11]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{11} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{12} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ \sigma_{\theta\theta} &= C_{12} \frac{\partial U^*}{\partial r_*} + C_{11} \frac{U^*}{r_*} + C_{13} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \left(\frac{\partial U^*}{\partial r_*} + \frac{U^*}{r_*} \right) + C_{33} \frac{\partial W^*}{\partial z_*}, \\ \sigma_{rz} &= C_{55} \left(\frac{\partial W^*}{\partial r_*} + \frac{\partial U^*}{\partial z_*} \right). \end{aligned} \quad (1.2)$$

В соотношениях (1.1)–(1.2) t_* — время, $\sigma_{jk}(r_*, z_*, t_*)$, $U^*(r_*, z_*, t_*)$, $W^*(r_*, z_*, t_*)$ — компоненты тензора механических напряжений ($j, k = r, \theta, z$), радиальное и осевое перемещения, соответственно; ρ , C_{ms} — объемная плотность и модули упругости ($m, s = \overline{1, 5}$). Далее рассматривается изотропный материал трубы, для которого $C_{11} = C_{33} = \lambda + 2\mu$, $C_{12} = C_{13} = \lambda$, $C_{55} = \mu$, где λ, μ — параметры Ламе.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} z_* = 0, \quad U^* = W^* &= 0, \\ z_* = l, \quad \sigma_{zz} = \sigma_{rz} &= 0, \\ r_* = r - \frac{t_r}{2}, \quad \sigma_{rr} = \sigma_{rz} &= 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} r_* = r + \frac{t_r}{2}, \quad \sigma_{rr} &= F_0(t) * \delta\left(z_* - \frac{l}{2}\right), \\ \sigma_{rz} &= 0. \end{aligned}$$

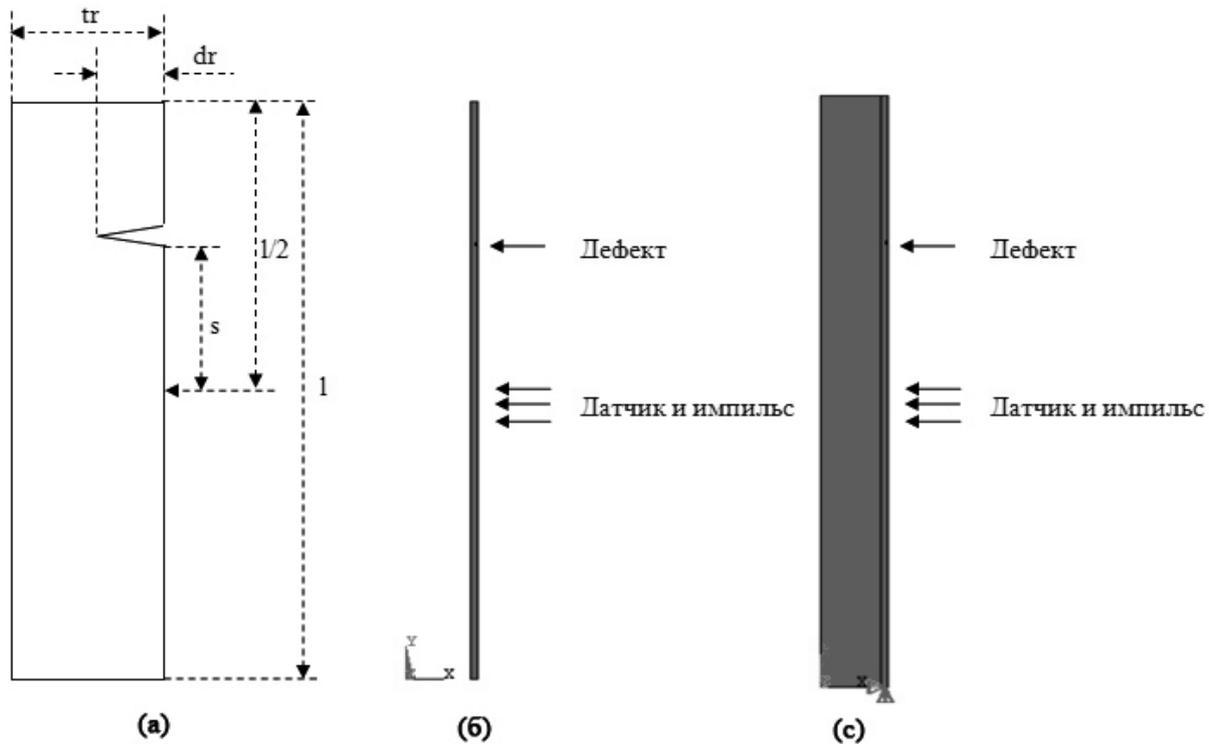


Рис. 1. а) модель трубы с трещиноподобным дефектом и размеры; б) модель трубы без жидкости; в) модель трубы с жидкостью. (1, 3 — металл, 2 — жидкость)

Начальные условия соответствуют недеформированной трубе, находящейся в покое,

$$t_* = 0, \quad U^* = W^* = 0, \quad \frac{\partial U^*}{\partial t_*} = \frac{\partial W^*}{\partial t_*} = 0. \quad (1.4)$$

Соотношения (1.1)–(1.4) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи теории упругости. В том случае, когда труба заполнена жидкостью (рис. 1с), к уравнениям (1.1)–(1.4) добавляются уравнения акустики с учетом линейных диссипативных эффектов [12] и соответствующие граничные условия на торцах, моделирующие бесконечную среду. Решение задачи (1.1)–(1.4) проводится методом конечных элементов, реализованном в пакете ANSYS. Далее в тексте, на графиках и в таблицах координате X соответствуют r_* , координате $Y - z_*$, смещению U_x соответствуют U^* , смещению $U_y - W^*$.

2. Модель трубы с трещиноподобным дефектом и процесс обработки входных данных

Идентификация дефектов в работе осуществляется с помощью ИНС. Для их обучения решаются прямые нестационарные задачи для фрагмента трубы (рис. 1, справа) с круговой трещиной глубиной dr (рис. 1, слева и в центре), выходящей на внешнюю или внутреннюю поверхность трубы. Рассматриваются следующие размеры трубы: длина $l = 2$ м, внутренний радиус $r = 0,19$ м, толщина $tr = 0,2$ м, расстояние от датчика до дефекта $s = 0,5$ м. В пакете ANSYS была построена осесимметричная конечно-элементная модель. При расчетах принимались следующие значения: модуль Юнга $E = 2,0 \times 10^{11}$ Мпа, плотность $\rho = 7800$ кг/м³, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$.

Возбуждение волн осуществляется приложением в датчике радиальной силы со ступенчатой зависимостью от времени (продолжительность действия составляет 1×10^{-6} с). В качестве измеряемой информации выступают АВХ радиального и осевого смещений на поверхности трубы в точке приложения силы (датчик на рис. 1). Измерение отра-

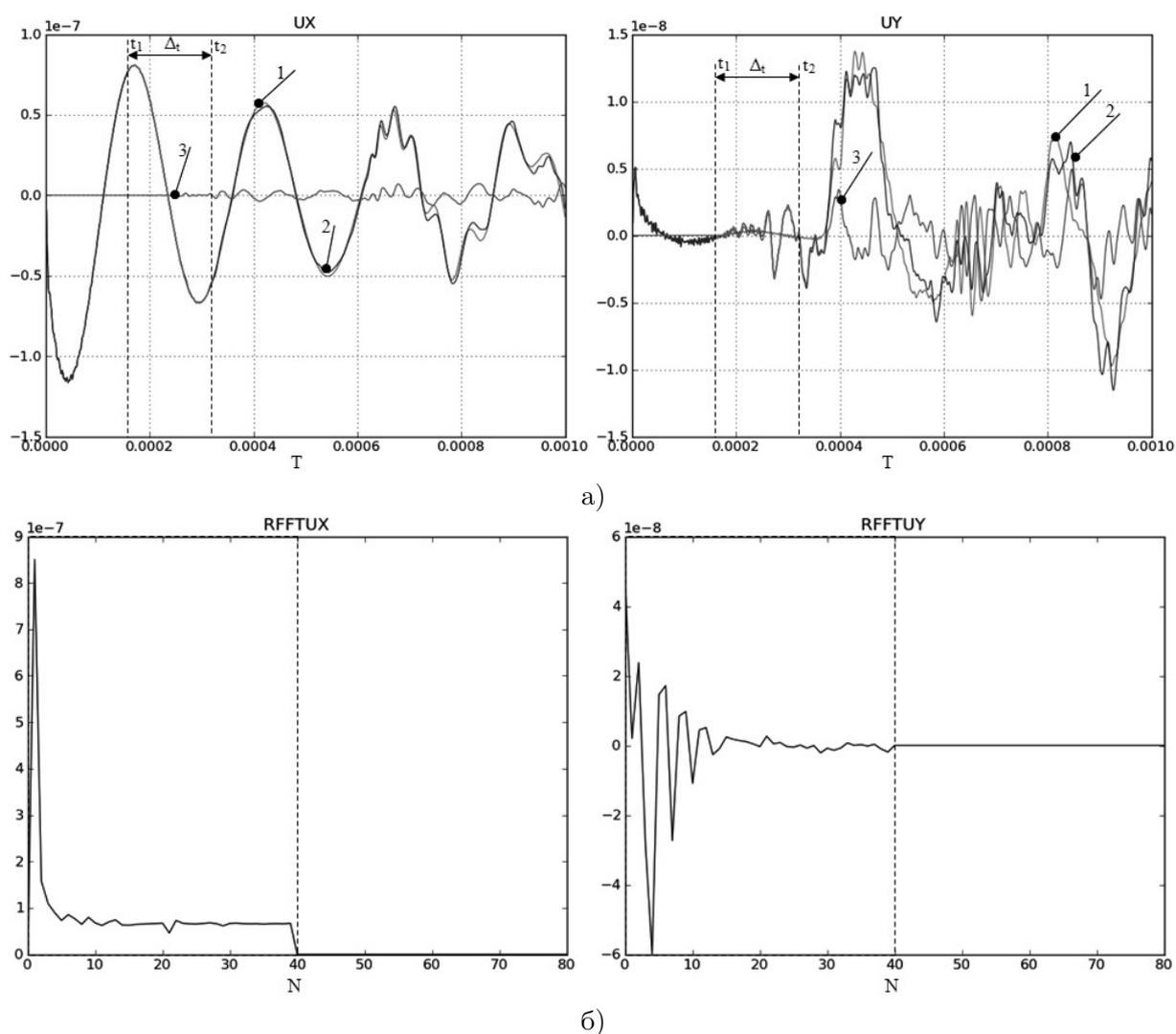


Рис. 2. а) АВХ смещения U_x , U_y для трубы без дефекта, с дефектом и их разни́ца и входные данные для ИНС — вариант 1; б) Входные данные для ИНС — вариант 2

женного от дефекта сигнала производилось на отрезке времени $[t_1, t_2]$, для которого волны, отраженные от торцов трубы, не достигли датчика.

$$t_1 = 2s/v, \quad t_2 = l/v, \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

где l — длина трубы; v — скорость сигнала; s — расстояние от датчика до дефекта.

Процесс обработки входных данных. На рис. 2а представлены АВХ поверхностного волнового поля радиального смещения U_x и аналогичные данные для осевого смещения U_y , измеренные датчиком (кривая с номером 1 — данные для трубы без дефекта; кривая 2 — с дефектом $dr = 5$ мм; кривая 3 — разни́ца между 1 и 2), а также указан интервал времени, используемый для обучения ИНС.

3. Идентификация дефекта

Реконструкция параметров дефекта (глубины) в работе осуществляется с помощью сочетания МКЭ и ИНС.

Процесс обработки результатов входных данных для ИНС.

Вариант 1. Входные данные для нейронной сети являются АВХ U_x и U_y на промежутке времени $[t_1, t_2]$, отмеченные пунктиром на рис. 2а.

Вариант 2. Использование алгоритма прямого вещественного БПФ. Входные данные для нейронной сети, определяемые значениями $RFFT-U_x$ и $RFFT-U_y$ (представлены на рис. 2б и также выделены пунктиром). В этом варианте размер входных дан-

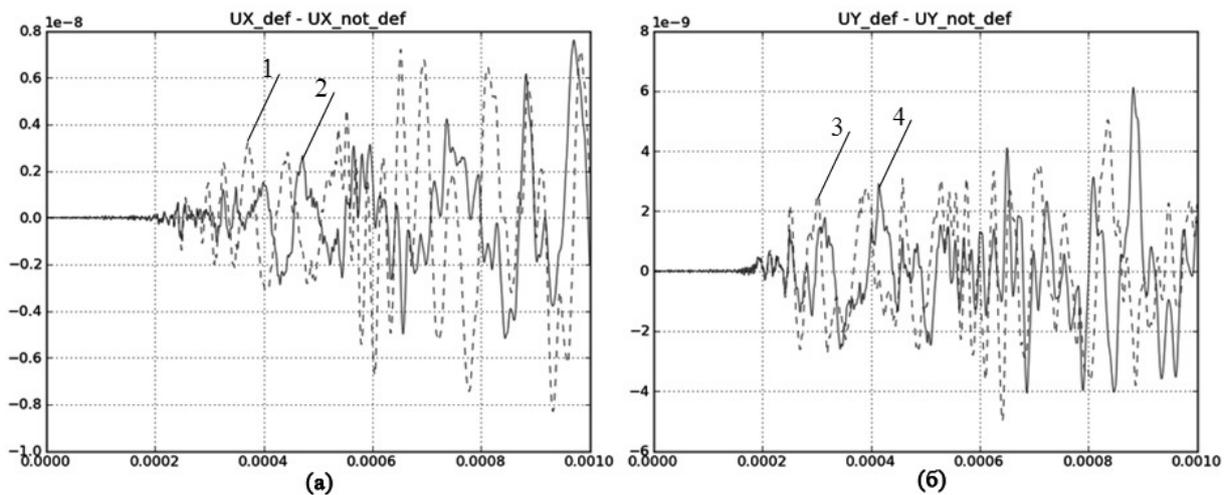


Рис. 3. Сравнение разницы между АВХ смещения U_x , U_y трубы не содержащей жидкость и содержащей жидкость (а — смещение U_x , б — смещение U_y)

Таблица 1. Разделение дефектов на классы

№	Глубина дефекта (dr), мм
1	0–3 мм
2	3–6 мм
3	6–9 мм

ных уменьшается, поэтому время обучения будет меньше, чем для варианта 1.

На рис. 3 представлены разница между АВХ поверхностного волнового поля радиального смещения U_x и аналогичные данные для осевого смещения U_y , измеренные датчиком (кривая 1 — разница между U_x пустой трубы без дефекта и с дефектом; 2 — разница между U_x (трубы содержат жидкость) без дефекта и с дефектом; 3 — разница между U_y пустой трубы без дефекта и с дефектом; 4 — разница между U_y (трубы содержат жидкость) без дефекта и с дефектом).

Далее идентификация дефектов проводится для трещин в трубе без жидкости, глубины которых изменяются в диапазоне $dr \in [0, 9]$ мм. Рассматриваемые дефекты условно разделены на три класса (табл. 1). Такое разделение можно связать с классификацией дефектов по степени поврежденности и соответственно опасности разрушения трубы. В каждом классе для обучения и тестирования анализируются 200 дефектов.

Реконструкция дефектов проводится для двух случаев:

1) Дефекты расположены на внешней поверхности трубы;

2) Дефекты расположены на внутренней поверхности трубы.

Применение нейронных сетей для задач: Составлено 200 векторов данных, 90% из которых используются для обучения, а 10% — для тестирования. Затем проводятся компьютерные эксперименты, выполненные с помощью ИНС.

Ошибка er для конкретной конфигурации сети определяется путем представления сети всех имеющихся наблюдений (n) и сравнения реально выдаваемых выходных значений с желаемыми (целевыми) значениями. Ошибка er вычислялась по формуле

$$er = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (d_i - y_i)^2,$$

где d — желаемый выход сети при обучении; y — реальный выход сети при обучении.

После достаточного обучения сеть может быть использована для прогнозирования выходных значений. Точность прогнозирования ex вычислялась по формуле

$$ex = \frac{100}{N * M} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(1 - \left| \frac{dt_{i,j} - yt_{i,j}}{dt_{i,j}} \right| \right),$$

Таблица 2. Результаты обучения и тестирования нейронной сети с разными скрытыми слоями (дефекты расположены на внешней поверхности трубы)

№	Количество данных, (RFFT)	Архитектура ИНС	Эпохи	Ошибка (er)	Точность (ex), %	Время, с
1	200	80-20-1	2000	0,0000077	98,45	19
2	200	80-40-1	2000	0,0000014	99,33	37
3	200	80-60-1	2000	0,0000041	99,02	58
4	200	80-20-20-1	2000	0,0000035	98,53	29
6	200	80-40-40-1	2000	0,0000062	99,16	67
7	200	80-60-60-1	2000	0,0000057	98,48	113

Таблица 3. Результаты обучения и тестирования нейронной сети с разным количеством эпох (дефекты расположены на внешней поверхности трубы)

№	Количество данных, (RFFT)	Архитектура ИНС	Эпохи	Ошибка (er)	Точность (ex), %	Время, с
1	200	80-40-1	1000	0,0000039	98,67	17
2	200	80-40-1	5000	0,0000025	98,89	27
3	200	80-40-1	10000	0,0000014	99,33	161
4	200	80-40-1	15000	0,0002339	97,92	270
5	200	80-40-1	20000	0,0003977	95,82	116

где n — количество образцов для проверки; m — количество выходных данных; dt — желаемый выход сети при тестировании; yt — реальный выход сети при тестировании.

Результаты обучения и тестирования представлены в таб. 2–5.

В табл. 2 в результате численного эксперимента выявлены архитектуры ИНС, дающие лучший результат идентификации, а именно: 80 (входных нейронов) – 40 (скрытых нейронов) – 1 (выходной нейрон). Таким образом,

$$k_{\text{нсс}} \approx \frac{k_1 + k_2}{2},$$

где $k_{\text{нсс}}$ — количество нейронов скрытого слоя; k_1 — количество нейронов входного слоя; k_2 — количество нейронов выходного слоя.

В табл. 3 лучший результат эпох равен 10000.

В табл. 4, 5 представлены следующие данные: №1 — данные, соответствующие строке №1 табл. 1; №2 — данные, соответствующие строке №2 табл. 1; №3 — данные, соответствующие строке №3 табл. 1.

На рис. 4 представлены результаты тестирования ИНС (глубины — линия с темными квадратами) на 20 примерах с архитектурой «80-40-1».

На рис. 5 представлены результаты идентификации в том случае, когда сети предлагаются «зашумленные данные», моделирую-

щие погрешности измерений

$$\check{X}(t) = X(t) + \delta P(t) \max(|X(t)|), \quad (3.1)$$

где величина δ изменяется от 1% до 10%, $P(t)$ случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$.

Заключение

В результате проведенного исследования разработан метод идентификации параметров трещин, выходящих на внешнюю или внутреннюю поверхность труб, на основе сочетания метода конечных элементов и ИНС. Исследование показало, что подготовка входных данных является краеугольным камнем в решении задачи. Наиболее успешной оказалась идентификация дефекта на основании АВХ, преобразованных с помощью БПФ. При этом была достигнута точность 99,25% — в определении глубины (для внешнего дефекта) и точность 99,22% — в определении глубины (для внутреннего дефекта). В результате численного эксперимента выявлены архитектуры ИНС, дающие лучший результат идентификации, а именно: 80 (входных нейронов) – 40 (первых скрытых нейронов) – 1 (выходной нейрон). В этой архитектуре используются данные, обработанные с помощью БПФ, размер входных данных уменьшается, поэтому процесс обучения происходит быстрее, чем при использовании

Таблица 4. Результаты обучения и тестирования нейронной сети с разными размерами глубины дефектов (дефекты расположены на внешней поверхности трубы)

№	Количество данных	Архитектура ИНС	Эпохи	Ошибка (er)	Точность (ex), %	Время, с
1	200 – все	320-160-1	10000	0,00019	95,88	3115
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0000124	97,79	217
2	200 – все	320-160-1	10000	0,026	93,45	3109
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0000018	99,25	191
3	200 – все	320-160-1	10000	0,0024	91,94	3185
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0086	98,19	196

Таблица 5. Результаты обучения и тестирования нейронной сети с разными размерами глубины дефектов (дефекты расположены на внутренней поверхности трубы)

№	Количество данных	Архитектура ИНС	Эпохи	Ошибка (er)	Точность (ex), %	Время, с
1	200 – все	320-160-1	10000	0,0003	95,49	3164
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0000019	99,29	191
2	200 – все	320-160-1	10000	0,0000866	95,80	3185
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0000096	99,22	191
3	200 – все	320-160-1	10000	0,00013	96,33	3179
	200 – RFFT	80-40-1	10000	0,0074	99,25	194



а)



б)

Рис. 4. Результаты тестирования: а) данные из табл. 4, номер 2; б) данные из табл. 5, номер 2

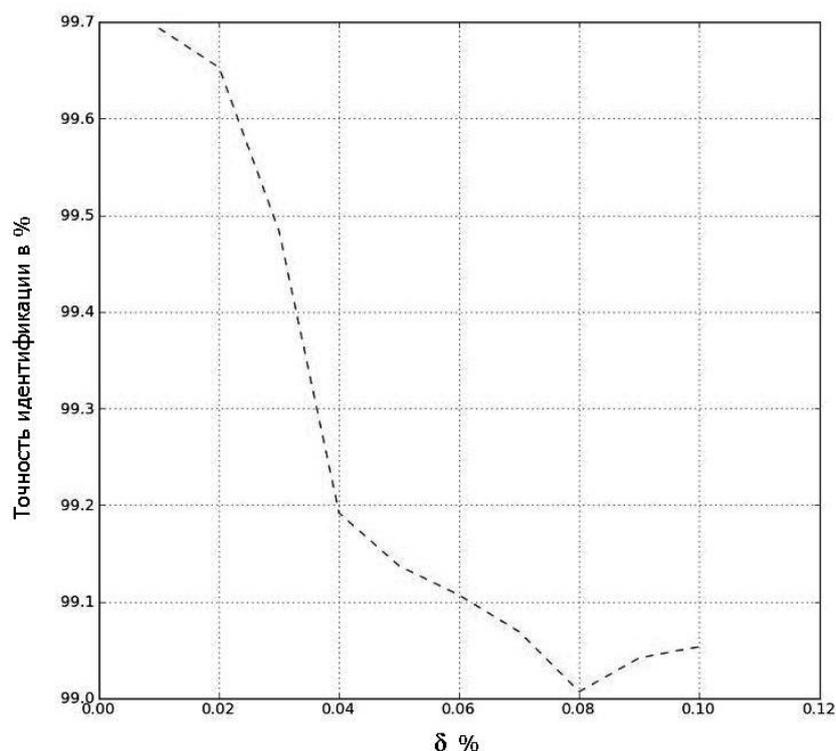


Рис. 5. Результаты идентификации — «за шумленными данными»

непосредственно данных АВХ. Анализ входных данных для обучения ИНС для труб, заполненных жидкостью, показывает, что они также могут быть использованы для идентификации рассматриваемых трещин. Предложенный алгоритм идентификации трещин

оказался устойчивым к погрешности входной информации.

Опираясь на вышеизложенное, заключаем, что ИНС-алгоритмы могут успешно применяться для идентификации дефектов на поверхности труб при использовании акустического зондирования из дальней зоны.

Литература

1. *Haykin S.* Neural networks — a comprehensive foundation. Prentice Hall. 1998. 842 p.
2. *Краснощёков А.А., Соболев Б.В., Соловьёв А.Н., Черпаков А.В.* Идентификация трещиноподобных дефектов в упругих элементах конструкций на основе эволюционных алгоритмов // Дефектоскопия. 2011. № 6. С. 67–78.
3. *Waszczyszyn Z., Ziemiński L.* Neural networks in mechanics of structures and materials, new results and prospects of applications // Computers and Structures. 2001. Vol. 79. No. 22. P. 2261–2276.
4. *Соловьёв А.Н., Курбатова П.С., Сапрынов Н.И., Шевцов С.Н.* Об использовании нейронных сетей в задачах определения дефектов в упругих телах. Материалы X международной конференции «Современные проблемы механики сплошной среды». Ростов-на-Дону, 2006. С. 175–180.
5. *Liu S.W., Huang J. H., Sung J.C., Lee C.C.* Detection of cracks using neural networks and computational mechanics // Computer methods in applied mechanics and engineering. 2002. Vol. 191. P. 2831–2845.
6. *Khandetsky V., Antonyuk I.* Signal processing in defect detection using back-propagation neural networks // NDT&E International. 2002, Vol. 35. No. 7. P. 483–488.
7. *Xu Y.G., Liu G.R., Wu Z.P., Huang X.M.* Adaptive multilayer perceptron networks for detection of cracks in anisotropic laminated plates // International journal of solids and structures. 2001. Vol. 38. P. 5625–5645.
8. *Fang X., Luo H., Tang J.* Structural damage detection using neural network with learning rate improvement // Computers and Structures. 2005. Vol. 85. P. 2151–2152.
9. *Ватумлян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
10. *David W. K.* A First Course in Fourier Analysis. Cambridge University Press. 2007. 864 p.

11. *Снеддон И.Н., Берри Д.С.* Классическая теория упругости. М.: Наука, 1961. 219 с.
12. *Красильников В.А., Крылов В.В.* Введение в физическую акустику. М.: Наука, 1984. 400 с.

References

1. Haykin S. *Neural networks — a comprehensive foundation*. Prentice Hall, 1998, 842 p.
2. Krasnoshhokov A.A., Sobol' B.V., Solov'jov A.N., Cherpakov A.V. Identifikacija treshhinopodobnyh defektov v uprugih jelementah konstrukcij na osnove evoljucionnyh algoritmov [Identification of crack-like defects in the elastic elements of designs based on evolutionary algorithms]. *Defektoskopija* [Defectoscopy], 2011, no. 6, pp. 67–78. (In Russian)
3. Waszczyszyn Z., Ziemianski L. Neural networks in mechanics of structures and materials, new results and prospects of applications. *Computers and Structures*, 2001, vol. 79, no. 22, pp. 2261–2276.
4. Solov'ev A.H., Kurbatova P.S., Saprunov N.I., Shevcov S.N. Ob ispol'zovanii nejronnyh setej v zadachah opredelenija defektov v uprugih telah [On the use of neural networks in problems of determining defects in elastic bodies]. *Materialy X mezhdunarodnoj konferencii "Sovremennye problemy mehaniki splotnoj sredy"* [Proc. of the 10th International Conference "Modern Problems of continuum mechanics"]. Rostov-on-Don, 2006, pp. 175–180. (In Russian)
5. Liu S.W., Huang J. H., Sung J.C., Lee C.C. Detection of cracks using neural networks and computational mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2002, vol. 191, pp. 2831–2845.
6. Khandetsky V., Antonyuk I. Signal processing in defect detection using back-propagation neural networks. *NDT&E International*, 2002, vol. 35, no. 7, pp. 483–488.
7. Xu Y.G., Liu G.R., Wu Z.P., Huang X.M. Adaptive multilayer perceptron networks for detection of cracks in anisotropic laminated plates. *International journal of solids and structures*, 2001, vol. 38, pp. 5625–5645.
8. Fang X., Luo H., Tang J. Structural damage detection using neural network with learning rate improvement. *Computers and Structures*, 2005, vol. 85, pp. 2151–2152.
9. Vatul'jan A.O. *Obratnye zadachi v mehanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Solid Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 224 p. (In Russian)
10. David W.K. *A First Course in Fourier Analysis*. Cambridge University Press, 2007, 864 p.
11. Sneddon I.N., Berri D.S. *Klassicheskaja teorija uprugosti* [The classical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1961. 219 p. (In Russian)
12. Krasil'nikov V.A., Krylov V.V. *Vvedenie v fizicheskiju akustiku* [Introduction to physical acoustics]. Moscow, Nauka Publ., 1984. 400 p. (In Russian)

Статья поступила 25 января 2014 г.

© Соловьев А.Н., Нгуен З.Ч.Занг, 2014