

УДК 539.3: 519.6

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ МАССИВНОГО ОБЪЕКТА НА НЕОДНОРОДНОЕ ГЕТЕРОГЕННОЕ ОСНОВАНИЕ

Суворова Т.В.¹, Беляк О.А.², Усошина Е.А.³

MATHEMATICAL MODELING OF DYNAMIC PROBLEM OF NON-HOMOGENOUS HETEROGENEAL FOUNDATION ACTING BY MASSIVE OBJECT

Suvorova T.V.^{*}, Belyak O.A.^{*}, Usoshina H.A.^{**}

^{*} Rostov State University of Railway Transport, Rostov-on-Don, Russia, e-mail: suvorova_tv111@mail.ru

^{**} State Unitary Enterprise "Data processing center", Rostov-on-Don, Russia

Abstract: The contact problem for harmonic oscillating punch on the surface of non-homogenous heterogeneous foundation is considered. The foundation consists of visco-elastic, porous, liquid layers. The contact problems reduced to the system of dual integral equation, solved with method of orthogonal polynomials. In the numerical study the dependencies contact stresses on saturation and non-homogenous foundation are analysed.

Keywords: contact problem, layered heterogeneous foundation.

Введение

Динамические воздействия массивных объектов на пористоупругие основания моделируются контактными задачами, которые привлекают неизменный интерес исследователей. Это объясняется многочисленными приложениями в сейсморазведке, геофизике, строительстве [1–4]. Для однородного насыщенного пористоупругого полупространства контактная задача рассматривалась в [1, 3, 4]. Наименее изученными в настоящее время являются вопросы влияния неоднородности слоистой пористой среды, ее водонасыщенности на распределение контактных напряжений. Наиболее широкое применение нашла модель пористоупругой среды М. Био [5]. Этот вариант среды описывает процессы во многих встречающихся в природе горных породах, грунтовых средах. В работе [6] приведены механические характеристики одиннадцати различных типов грунтовых сред, определенных экспериментально, с учетом обводненности и водонасыщенности, что позволяет с большой точностью моделировать в рамках модели Био динамические процессы в реальных, в том числе, грунтовых средах.

1. Постановка задачи

Рассматриваются гармонические колебания непроницаемого прямоугольного штампа, расположенного на поверхности неоднородного основания, представляющего собой пакет вязкоупругих, пористоупругих, слоев, лежащих на слое жидкости. Заглубленный слой идеальной жидкости покоится на недеформируемом основании. В декартовой системе координат пакет из $n - 1$ вязкоупругих и пористоупругих слоев и жидкий слой соответственно занимают области

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ 0 \leq z \leq h_1, h_1 \leq z \leq h_2, \dots, \\ h_{n-2} \leq z \leq h_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, \\ h_{n-1} \leq z \leq h_n. \end{aligned}$$

На лицевой поверхности слоистой среды расположен прямоугольный штамп массой M , колеблющийся под действием приложенной к нему силы $\mathbf{P}e^{-i\omega t}$. Штамп контактирует с лицевой поверхностью по области

$$z = 0, -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b.$$

¹Суворова Татьяна Виссарионовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики-1 Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: suvorova_tv111@mail.ru.

²Беляк Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики-1 Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: o_bels@mail.ru.

³Усошина Елена Александровна, программист ГУП РО «Информационно-вычислительный центр»; e-mail: usochina_elena@mail.ru.

Вне штампа лицевая поверхность основания не нагружена.

Перемещения гетерогенной среды, состоящей из упругого скелета и пор, заполненных смесью вязкой жидкости и газа, определяются уравнениями Био-Френкеля [5]

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \sigma_{ij,i}^s, \quad (1.2)$$

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) = \sigma_i^f, \\ i = 1, 2, 3.$$

Здесь $u_i(x, y, z, t)$, $v_i(x, y, z, t)$, $i = 1, 2, 3$ — компоненты векторов перемещений твердой фазы и флюида.

В предположении линейности и изотропности пористой твердой фазы закон Гука для пористо-упругой насыщенной жидкостью среды имеет вид

$$\sigma_{ij}^s = A e \delta_{ij} + 2N e_{ij} + Q \varepsilon \delta_{ij}, \\ \sigma^f = Q e + R \varepsilon, \quad (1.3) \\ e = \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{v}, \\ \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij} \sigma^f.$$

Γ_{ij} — тензор полных напряжений, e_{ij} и ε_{ij} — тензоры деформации твердой фазы и флюида; δ_{ij} — символ Кронекера, $\delta_{ii} = 1$, $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$, $b = \eta m^2 / k_o$, A , N , Q , R — механические постоянные гетерогенной среды, их выражение через модули объемного сжатия составляющих сред приведено в [6], ρ_{ij} — эффективные плотности, коэффициент b зависит от пористости среды m , коэффициента вязкости жидкости и проницаемости среды, степени аэрации жидкости.

Соотношения (1.1)–(1.3) записаны в безразмерном виде, линейные величины отнесены к характерной единице длины, напряжения — к обобщенному модулю $H = A + 2N + Q + R$.

Вектор перемещений в заглубленном жидком слое $\mathbf{w}(x, y, z, t)$ и давление $p_0(x, y, z, t)$ выражаются известным образом через волновой потенциал, на нижней границе жидкого слоя и недеформируемого основания нормальные перемещения равны нулю.

В области контакта гетерогенные слои непроницаемы, и выполняются условия равенства перемещений и напряжений в упругих скелетах, равенство нулю относительной скорости жидкой и упругих фаз.

На границе жидкости и гетерогенной среды при $z = h_{n-1}$ предполагается свободная фильтрация жидкости через границу, при этом в пористой среде отсутствуют касательные напряжения, нормальные напряжения в пористой среде равны давлению в жидкости, движение жидкости непрерывно.

Силы трения между непроницаемым штампом и поверхностью основания отсутствуют, вне штампа напряжения и давление в жидкости равны нулю. На границе среды под штампом имеют место условия

$$u_3(x, y, t) = f(x, y) e^{-i\omega t}, \\ u_3(x, y, t) = v_3(x, y, t), \quad (1.4) \\ (x, y) \in \Omega, \Omega : |x| \leq a, |y| \leq b.$$

Замыкают постановку задачи условия излучения волн на бесконечность [7]. Требуется найти распределение контактных нормальных напряжений под штампом, а также связь между воздействующей силой P и осадкой штампа.

2. Решение задачи о колебаниях штампа на неоднородном основании

Применением преобразования Фурье к уравнениям и граничным условиям (1.1)–(1.3), с помощью рекуррентных алгебраических преобразований, описанных в [8], решение контактной задачи для стратифицированной гетерогенной флюидонасыщенной среды сводится к системе парных интегральных уравнений, для нормальных колебаний имеющей вид

$$\iint_{\Omega} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} K(u) e^{i\alpha(x-\xi) + i\beta(y-\eta)} \times \\ \times q(\xi, \eta) d\alpha d\beta d\xi d\eta = f(x, y), \quad (2.1)$$

$$(x, y) \in \Omega,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^a \int_{-b}^b q(\xi, \eta) d\alpha d\beta d\xi d\eta = 0,$$

$$(x, y) \notin \Omega.$$

В работах [9, 10] приведены матрицы Грина для слоистых пористоупругих оснований различного строения. В работе [11] приведена матрица Грина для составного пористоупругого слоя, содержащего заглубленный жидкий слой. Ядро интегрального уравнения $K(u)$ определяется как $K(u) = g_{22}(u, 0)$, где g_{22} — элемент матрицы Грина $\mathbf{G}(u, y)$.

Функция $K(u)$ является быстро осциллирующей, убывающей на бесконечности степенным образом $u \rightarrow \infty$, $K(u) = O(u^{-1})$. В комплексной плоскости функция $K(u)$ мероморфная, вблизи вещественной оси она имеет комплексные полюса с малой мнимой частью. Контуры интегрирования γ_i выбираются в соответствии с принципом излучения [7], обходя особенности подынтегральной функции с положительной действительной частью и малой комплексной в нижней комплексной полуплоскости. Такой выбор контура интегрирования в соответствии с принципом излучения в задачах теории упругости ускоряет сходимость численного интегрирования для слоистых пористоупругих сред.

В случае установившегося режима колебаний с частотой ω к системе (2.1) должны быть присоединены дифференциальные уравнения движения штампа, которые в амплитудных значениях имеют вид

$$\frac{M\omega^2}{H} f(x, y) = P - \iint_{\Omega} q(x, y) dx dy, \quad (2.2)$$

P — значение вертикальной силы, центрально приложенной к штампу.

Будем разыскивать контактные напряжения в виде ряда по многочленам Чебышева с выделенной особенностью на краях штампа

$$q(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{R_{kl} T_k(x/a) T_l(y/b)}{\sqrt{a^2 - x^2} \sqrt{b^2 - y^2}}. \quad (2.3)$$

Подставим представления (2.2), (2.3) в систему интегральных уравнений (2.1), при этом второе уравнение системы тождественно удовлетворяется, а кратность интегралов уменьшается в два раза за счет аналитического вычисления интегралов по конечным отрезкам. Далее для решения интегрального уравнения используется метод коллокации. В результате тождественного удовлетворения первого уравнения системы (2.1) в узлах коллокации приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Последняя алгебраическая системы решается методом редук-

ции. Через ее решения определяются напряжения под штампом, а также связь между воздействующей на штамп силой и осадкой штампа.

3. Результаты численного анализа и выводы

Модули объемного сжатия упругого скелета K_s , пористой среды K_b , жидкости и газа K_f, K_g дают возможность выразить механические характеристики уравнения Био [6]

$$A = \frac{K_s K_m + m_0 K_{bs} K_b}{1 - K_{bs}} - \frac{2}{3} N,$$

$$K_{bs} = \frac{K_b}{K_s}; \quad K_m = 1 - m - K_{bs},$$

$$m_0 = \frac{m}{1 - m},$$

$$Q = \frac{m_0 K_s K_m}{1 - K_{bs}}, \quad N = \mu,$$

$$R = \frac{m m_0 K_s}{1 - K_{bs}}.$$

В случае ненасыщенной гетерогенной среды ее поры заполнены смесью жидкости и газа, модуль объемного сжатия жидкой фазы K_{fg} зависит от степени ее насыщения газом m_g в объемном отношении $m_g = V_g/V_f$. Для учета влияния газообразной составляющей в многофазной грунтовой среде, истинная плотность жидкой фазы и модуль сжимаемости жидкости заменяются плотностью аэрированной жидкости ρ_{fg} и приведенным модулем сжимаемости K_{fg}

$$\frac{1}{K_{fg}} = \frac{1 - m_g}{K_f} + \frac{m_g}{K_g}.$$

$$\rho_{fg} = \alpha_g \rho_g + (1 - \alpha_g) \rho_f,$$

где α_g — относительное по массе содержание газа в аэрированной жидкости; ρ_g — плотность газа.

Здесь в соответствии с [6] приняты следующие значения механических характеристик, отвечающих насыщенному смеси воды и воздуха песчанику

$$K_s = 3,5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, \quad K_b = 0,43 \cdot 10^{10} \text{ Па},$$

$$K_f = 2,25 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_g = 0,145 \cdot 10^6 \text{ Па},$$

$$\rho_s = 2,6 \cdot 10^3 \text{ г/м}^3, \quad \rho_f = 10^3 \text{ кг/м}^3,$$

$$\rho_g = 1,1 \text{ кг/м}^3, \quad m = 0,3, \quad m_g = 0,1.$$

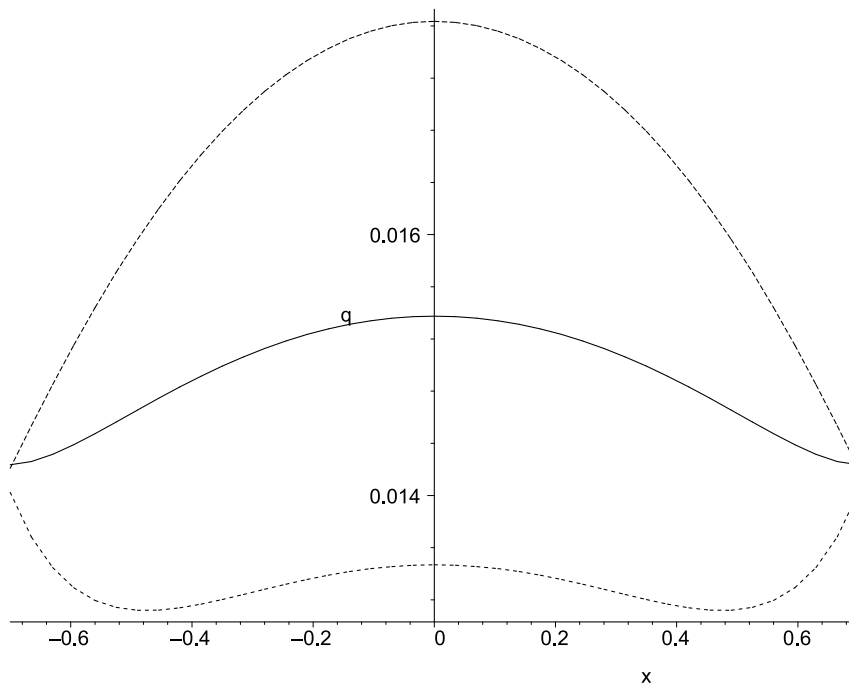


Рис. 1. Распределения модулей контактных напряжений в сечении $y = 0$ в зависимости от пористости

Для проведения численного эксперимента в интерактивной системе Maple составлен пакет программ, позволяющий провести аналитические вычисления ядра интегральной системы для случаев пористоупругого полупространства, слоя, неоднородного пористоупругого слоя, содержащего заглубленный слой жидкости. Для интегрирования по комплексному контуру присоединялась дополнительная процедура, написанная на языке Fortran. Проведенный численный эксперимент позволил сделать следующие выводы. Учет корневой особенности в напряжениях для среды со слабой дисперсией ускоряет сходимость вычислительного процесса, как и в случае упругих оснований. Использование при построении решения полиномов Чебышева, ортогональных на отрезке, позволяет избежать дополнительного интегрирования при вычислении коэффициентов линейных систем. Выбор точек коллокации, совпадающих с узлами Чебышева, ускоряет сходимость метода. Оптимальное количество точек коллокации зависит от частоты колебаний и, как правило, достаточно брать 4–7 узлов коллокации для каждой координаты в случае центрально приложенной силы. Сходимость процесса оценивалась численно по относительной погрешности контактных давлений и по точности удовлетворения гранич-

ных условий (1.4) на лицевой поверхности. Погрешность вычислений в диапазоне низких и средних частот, как правило, не превышает 4,6 %. Выбор узлов коллокации, совпадающими с узлами Чебышева на отрезке $[-0,95, 0,95]$, минимизирует относительную погрешность вычислений.

На рис. 1 приведены распределения модулей амплитудных значений контактных напряжений в твердой фазе лицевого слоя под квадратным штампом, в сечении $y = 0$. Сплошная, штриховая и штрих-пунктирная линии соответствуют значениям пористости $m = 0,2$; $m = 0,3$; $m = 0,35$. Влияние пористости на контактные напряжения под штампом, колеблющимся на составном пористоупругом слое, содержащем заглубленный слой жидкости, зависит как от частоты колебаний, так и толщины верхнего слоя.

Зависимость контактных напряжений от степени насыщенности флюида иллюстрируют рис. 2–4. Увеличение содержания газа в жидкости увеличивает контактные напряжения, изменяя их распределение под штампом.

Учет пористости, степени водонасыщенности, неоднородности строения среды приводит к существенному уточнению значений контактных напряжений.

Результаты настоящей работы могут быть использованы при постановке трудо-

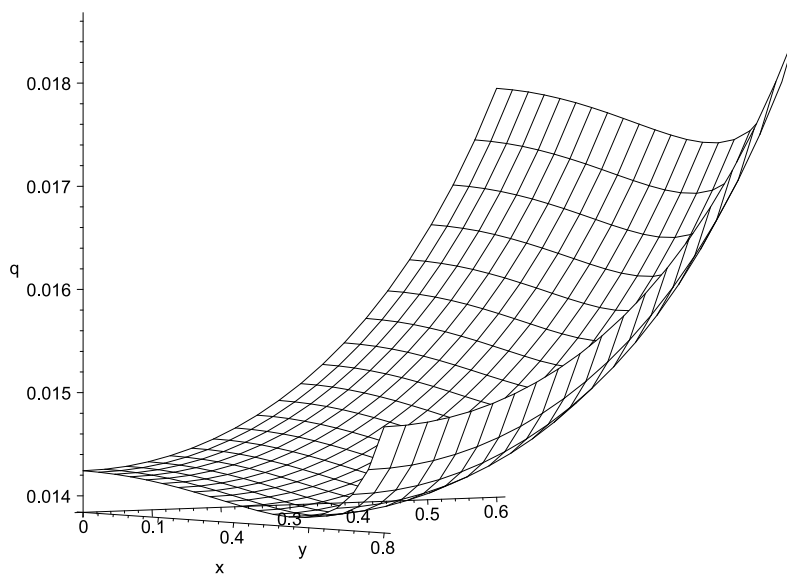


Рис. 2. Модуль контактных напряжений при $m_g = 0,01$

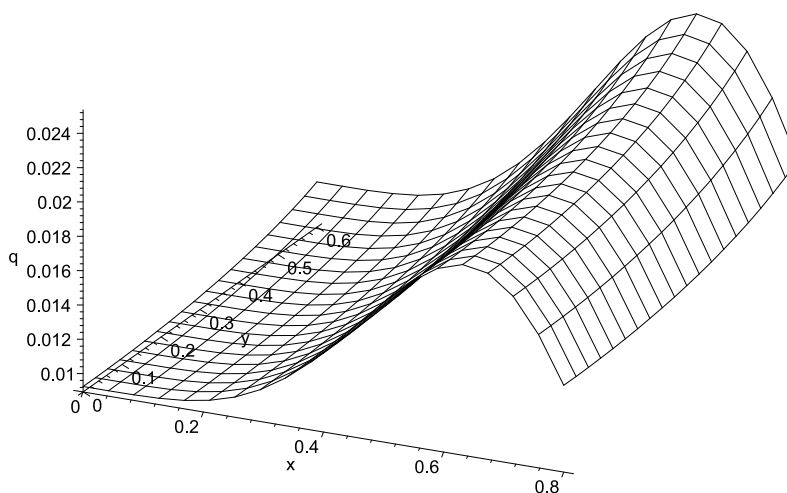


Рис. 3. Модуль контактных напряжений при $m_g = 0,05$

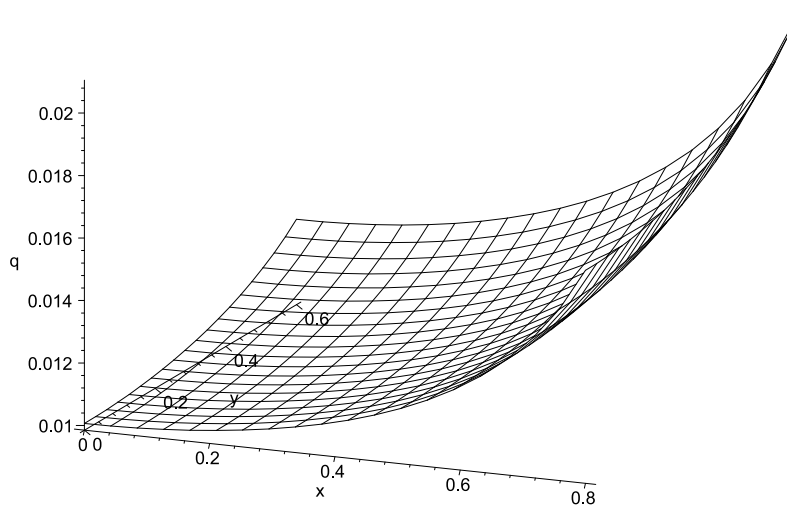


Рис. 4. Модуль контактных напряжений при $m_g = 0,1$

емких натурных экспериментов, и особенно важны для задач прикладных исследований,

рассматривающих динамические процессы в грунтовых средах.

Литература

1. Трофимчук А.Н., Гомилко А.М., Савицкий О.А. Динамика пористо-упругих насыщенных жидкостью сред. Киев.: Наукова думка, 2003. 230 с.
2. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука, 2001. 248 с.
3. Scalia A., Sumbatian M.A. Contact problem for porous elastic half-plane // *Journal of elasticity*. 2000. Vol. 60. No. 32. P. 91–102.
4. Jin B., Jin H. Vertical dynamic response of a circular footing on a saturated poroelastic half-space // *Soil Dyn. Earthquake Eng.* 1999. No. 18. P. 437–443.
5. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // *Механика. Период. сб. переводов иностр. статей*. 1963. Вып. 6. №82. С. 103–134.
6. Yeh C.L., Lo W.C., Jan C.D. An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils. San Francisco, American Geophysical Union, Annual Fall Meeting, 2006. No. 12. 31 p.

References

1. Trofimchuk A.N., Gomilko A.M., Savickij O.A. *Dinamika poristo-uprugih nasyshhennykh zhidkost'ju sred* [Dynamics of saturated porous elastic fluid environments]. Kiev, Naukova dumka Publ., 2003, 230 p. (In Russian)
2. Molotkov L.A. *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristyyh i treshhinovatykh sredakh na osnove jeffektivnykh modelej Bio i sloistyykh sred* [The study of wave propagation in porous and fractured media based on effective Bio models and layered media]. Saint-Petersburg, Nauka Publ., 2001, 248 p. (In Russian)
3. Scalia A., Sumbatian M.A. Contact problem for porous elastic half-plane. *Journal of elasticity*, 2000, vol. 60, no. 32, pp. 91–102.
4. Jin B., Jin H. Vertical dynamic response of a circular footing on a saturated poroelastic half-space. *Soil Dyn. Earthquake Eng.*, 1999, no. 18, pp. 437–443.
5. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде [Mechanical deformation and propagation of acoustic waves in porous medium]. *Mehanika. Period. sb. perevodov inostr. statej* [Mechanics. Periodic collection of translations of foreign articles], 1963, vol. 82, no. 6, pp. 103–134. (In Russian)

7. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1976. 319 с.
8. Колесников В.И., Суворова Т.В. Моделирование динамического поведения системы «Верхнее строение железнодорожного пути – слоистая грунтовая среда». М.: Изд-во ВИНТИ РАН, 2003. 232 с.
9. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошин С.А. Волновое поле, генерируемое в слоистом пористоупругом полупространстве движущейся осциллирующей нагрузкой // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2008. №1. С. 53–61.
10. Суворова Т.В., Беляк О.А. О колебаниях многослойного гетерогенного полупространства под действием осциллирующей нагрузки // *Труды РГУПС*. 2006. Вып. 3. С. 127–134.
11. Суворова Т.В., Усошина Е.А. Колебания составного гетерогенного слоя // *Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества*. 2010. №2. С. 74–79.
6. Yeh C.L., Lo W.C., Jan C.D. An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils. *American Geophysical Union, Annual Fall Meeting*, 2006, no. 12, 31 p.
7. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastej* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical areas]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 319 p. (In Russian)
8. Kolesnikov V.I., Suvorova T.V. *Modelirovanie dinamicheskogo povedeniya sistemy "Verhnee stroenie zheleznodorozhnogo puti – sloistaya gruntovaya sreda"* [Simulation of the dynamic behavior of the system "Topside railway track – layered soil ground"]. Moscow, VINITI RAN Publ., 2003, 232 p. (In Russian)
9. Beljak O.A., Suvorova T.V., Usoshin S.A. Volnovoe pole, generiruemoe v sloistom poristoupругom poluprostranstve dvizhushhejsja oscillirujushhej nagruzkoj [Wave field generated in a layered half Poroelastic moving oscillating load]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2008 no. 1, pp. 53–61. (In Russian)

10. Suvorova T.V., Beljak O.A. O kolebanijah mnogoslojnogo geterogenного poluprostranstva pod dejstviem oscillirujushhej nagruzki [Oscillations of the heterogeneous multilayer half under the influence of an oscillating force]. *Trudy RGUPS* [Proc. of RSTU], 2006, no. 3, pp. 127–134. (In Russian)
11. Suvorova T.V., Usoshina E.A. Kolebanija sostavnogo geterogenного sloja [Fluctuations in heterogeneous composite layer]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2010, no. 2, pp. 74–79. (In Russian)

Статья поступила 24 декабря 2013 г.

© Суворова Т.В., Беляк О.А., Усошина Е.А., 2014