УДК 537.311

ТОКОВЫЕ СОСТОЯНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ МЕЗОСКОПИЧЕСКИХ СВЕРХПРОВОДЯЩИХ КОЛЕЦ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

Третяк Д. Н.[1], ***Тумаев Е. Н.***[2]

THE CURRENT STATES OF THE SYMMETRIC MESOSCOPIC SUPERCONDUCTING FINITE-WITH RINGS

Tretyak D. N.*, Tumayev E. N.*

* *Kuban State University, Krasnodar, Russia, e-mail: tumayev@phys.kubs.ru*

Abstract: The analytic and numerical investigation of the stable states of the superconducting mesoscopic finite-width ring placed in the external magnetic field is carried. It is shown by the numerical calculations that for the finite-width ring the quantization of the magnetic field flux is obtained. However by the opportunity of the null-width ring only finite number of stable states takes place.

Keywords: superconducnivity, Ginzburg-Landau equation, mesoscopic rings, magnetic flux quantization.

Сверхпроводящие мезоскопические кольца диаметром несколько микрон толщиной 40–70 нм и шириной 200–400 нм при температуре порядка $0{,}95T_c$ представляют собой уникальные сверхчувствительные преобразователи энергии инфракрасного излучения в электрический ток, принцип действия которых основан на дискретности спектра токовых состояний сверхпроводящего кольца, вследствие чего даже незначительное внешнее воздействие приводит к их скачкообразной смене. Результаты теоретических и экспериментальных исследований симметричных и асимметричных сверхпроводящих колец приведены в целой серии работ А. В. Никулова с соавторами [1], в которых обсуждается использование системы соединенных колец в качестве нетрадиционного источника энергии.

Для исследования токовых состояний в сверхпроводящих кольцах используется уравнение Гинзбурга–Ландау [2, 3], точное решение которого, как показано в работе [4], удается получить лишь для одномерного кольца. В настоящей статье приведены результаты численного исследования токовых состояний в симметричных сверхпроводящих кольцах конечной ширины.

Будем исходить из уравнений Гинзбурга–Ландау–Максвелла (ГЛМ) в безразмерной форме [3]

$$\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)^2 \Psi - \Psi + \Psi^3 = 0, \qquad (1)$$

$$[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}]] = -\frac{i}{2\kappa}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) - |\Psi|^2 \mathbf{A}, \qquad (2)$$

с граничными условиями

$$\mathbf{n}\left(-\frac{i}{\kappa}\nabla - \mathbf{A}\right)\Psi\Big|_{\Gamma} = 0, \qquad (3)$$

где $\kappa = 2^{3/2}eH_c\delta^2/\hbar c$ — параметр Гинзбурга–Ландау, e — заряд электрона, $\hbar$, c — постоянная Планка и скорость света, $\delta = \sqrt{mc^2/8\pi e^2\Psi_0^2}$ — глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник, m– масса электрона, $\Psi_0 = \sqrt{\alpha|\tau|/b}$ — значение параметра порядка $\Psi(r)$ в отсутствие магнитного поля, $\tau = (T - T_c)/T_c$, T — температура сверхпроводника, T_c — критическая температура,$\alpha|\tau|$ и b — коэффициенты, входящие в разложение свободной энергии сверхпроводника по параметру порядка $\Psi(r)$, $H_c = 2\alpha\tau\sqrt{\pi/b}$ — критическое значение напряженности магнитного поля, при котором сверхпроводящее состояние исчезает, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ — вектор-потенциал электромагнитного поля, $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к границе Γ сверхпроводящего образца. В уравнениях (1)–(2) и условии (3) параметр порядка отнесен к величине Ψ_0, вектор-потенциал отнесен к величине $\sqrt{2}H_c\delta$, и радиус-вектор $\mathbf{r}$ отнесен к глубине проникновения δ. Второе уравнение представляет

[1]Третяк Дмитрий Николаевич, аспирант кафедры физики и информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: tretjak86@mail.ru.

[2]Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubs.ru.

собой уравнение Максвелла для магнитного поля, $[\nabla \times \mathbf{H}] = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$, в правой части которого находится сверхпроводящий ток. Наличие в выражении для сверхпроводящего тока калибровочно-неинвариантного слагаемого, пропорционального вектор-потенциалу $\mathbf{A}$, связано с трактовкой явления сверхпроводимости как спонтанного нарушения калибровочной инвариантности.

Одним из подходов к численному решению системы уравнений Гинзбурга-Ландау является выбор параметризации $\psi(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}) + i\xi(\mathbf{r})$, при которой уравнения (1)-(2) запишутся в виде

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2\eta - \frac{2}{\kappa}\mathbf{A}\nabla\eta + \left(A^2 - 1 + \eta^2 + \xi^2\right)\eta = 0,$$

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2\xi - \frac{2}{\kappa}\mathbf{A}\nabla\xi + \left(A^2 - 1 + \eta^2 + \xi^2\right)\xi = 0, \quad (4)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa}\left(\xi\nabla\eta - \eta\nabla\xi\right) + \left(\eta^2 + \xi^2\right)\mathbf{A} = -\mathbf{j}.$$

Для численного решения системы уравнений (4), записанных в цилиндрических координатах $(r,\ \varphi,\ z)$ с помощью метода конечных элементов использовалась программа FlexPDE. В качестве начального приближения для параметра порядка было выбрано начальное приближение вида $\psi(\varphi) = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$. Особенностью системы (4) в пределе одномерного кольца, как показано в работах [4, 5], является существование двух решений для одного и того же набора параметров. Как показывают численные расчеты, эта же особенность сохраняется и для кольца конечной ширины, вследствие чего был использован численный приём, который позволяет построить вычислительную схему, сходящуюся к интересующему нас решению. Предлагаемый прием заключается в модификации первых двух уравнений системы (4) путем добавления слагаемого ω, подобранного так, чтобы обеспечить сходимость к выбранному решению. Модифицированные уравнения ГЛМ выглядят следующим образом:

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2\eta - \frac{2}{\kappa}\mathbf{A}\nabla\eta + \left(A^2 - 1 + \eta^2 + \xi^2\right)\eta + \omega = 0,$$

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2\xi - \frac{2}{\kappa}\mathbf{A}\nabla\xi + \left(A^2 - 1 + \eta^2 + \xi^2\right)\xi + \omega = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = \frac{1}{\kappa}\left(\xi\nabla\eta - \eta\nabla\xi\right) + \left(\eta^2 + \xi^2\right)\mathbf{A} = -\mathbf{j},$$

где

$$\omega = c_1\left(\eta^2 + \xi^2 - c_2\right)\left(1 + \operatorname{sign}\left(c_2 - \eta^2 - \xi^2\right)\right),$$

и коэффициенты c_1, c_2 подбираются из сопоставления результатов численного решения системы (5) и результатов аналитического исследования одномерного кольца [5].

Численный анализ системы (5) позволил установить, что для тонкого кольца, ширина которого значительно меньше среднего диаметра, зависимостью фазы $\theta(r,\ \varphi)$ параметра порядка, записанного в экспоненциальной форме

$$\psi(r,\ \varphi) = f(r,\ \varphi)\exp\left[i\theta(r,\ \varphi)\right], \quad (6)$$

от радиальной координаты r, и зависимостью амплитуды $f(r,\ \varphi)$ от угловой координаты φ можно пренебречь, Кроме того, из инвариантности кольца относительно вращений вокруг оси Oz следует, что $\theta(r,\ \varphi) = n\varphi$, где n – целое число. Итак, для тонких колец допустимо использовать следующее приближение

$$\psi(r,\ \varphi) = f(r)\exp(in\varphi), \quad (7)$$

справедливость которого подтверждается численным исследованием системы уравнений (4).

Уравнения (1)–(3) в общей параметризации (6), пригодной для описания колец любой ширины, имеют вид

$$-\frac{1}{\kappa^2}\nabla^2 f + f\left(p^2 - 1 + f^2\right) = 0,$$

$$\frac{1}{\kappa^2}f\nabla^2\theta + \frac{2}{\kappa}\mathbf{p}\nabla f = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} = -f^2\mathbf{p},$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa}\nabla\theta - \mathbf{A} \quad (9)$$

— обобщенный импульс.

Для тонких колец, исследованных в работах [1–3], систему уравнений ГЛМ можно записать в виде

$$-\frac{1}{\kappa^2 r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + f\left(p_\varphi^2 - 1\right) + f^3 = 0,$$

$$\frac{df}{dr}\mathbf{p}e_r = 0, \quad (10)$$

$$\nabla^2 A_\varphi - \frac{A_\varphi}{r^2} = -f^2 p_\varphi,$$

где $p_\varphi = \frac{n}{\kappa r} - A_\varphi$ — φ-компонента обобщенного импульса $\mathbf{p}$.

Согласно второму уравнению системы (10), в плоскости кольца $z = 0$ у вектора $\mathbf{p}$ отлична от нуля только компонента p_φ, следовательно, второе уравнение системы (4) выполняется автоматически. Тогда система уравнений (10) сводится к следующим двум уравнениям:

$$-\frac{1}{\kappa^2 r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{df}{dr}\right) + f\left(p_\varphi^2 - 1\right) + f^3 = 0,$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_\varphi}{dr}\right) - \frac{A_\varphi}{r^2} = -f^2 p_\varphi. \qquad (11)$$

Осевая компонента B_z индукции магнитного поля $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$ и плотность сверхпроводящего тока даются формулами

$$B_z = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rA_\varphi\right), \qquad (12)$$

$$\mathbf{j} = -f^2\mathbf{p}. \qquad (13)$$

В отсутствии внешнего поля уравнение Гинзбурга-Ландау для одномерного кольца, исследованного в работе [5], имеет два решения: $f = 1$ и $f = 0$, поэтому при численном решении системы уравнений (11) можно в качестве начального приближения использовать значения величины f, достаточно близкие к 1 и 0 соответственно, при этом нет необходимости в дополнительном слагаемом ω, обеспечивающем сходимость к заданному решению.

Численное исследование решений системы уравнений (5) было проведено также с помощью программы FlexPDE в широком интервале значений квантового числа n, среднего радиуса кольца $R = (R_1 + R_2)/2$, где R_1 и R_2 — внутренний и наружный диаметр кольца соответственно, ширины кольца $w = R_2 - R_1$. В соответствии с экспериментальными данными для алюминиевых мезоскопических колец, параметр Гинзбурга-Ландау κ был взят равным 0.026.

При численном исследовании были рассчитаны следующие величины:

– радиальное распределение квадрата модуля волновой функции бозе-конденсата куперовских пар f^2;

– угловая компонента плотности сверхпроводящего тока j_φ;

– угловая компоненты вектор-потенциала магнитного поляA_φ;

– продольной компоненты индукции магнитного поля B_z;

– плотность свободной энергии F_{en}, определяемая, согласно [3], равенством

$$F = \left|\left(-i\kappa^{-1}\nabla - \mathbf{A}\right)\psi\right|^2 - |\psi|^2 + \frac{|\psi|^4}{2}. \qquad (14)$$

Для систематизации результатов численного анализа была создана утилита для генерации и пакетного выполнения скриптов FlexPDE для различных значений вышеперечисленных параметров сверхпроводящего кольца, и считывания величин, рассчитанных программой FlexPDE из решений, найденных с ее помощью. Реализованный численный метод позволил обработать и систематизировать большой массив данных. Кроме того, построенная расчетная схема позволила определить зависимость вышеперечисленных величин от квантового числа n не только для целых значений последнего, что позволило провести более детальный численный анализ, хотя, разумеется, физический смысл имеют только такие решения системы (5), для которых число n — целое. Результаты расчета радиального расчета распределения квадрата амплитуды параметра порядка бозе-конденсата куперовских пар f^2, и компоненты A_φ вектор-потенциала магнитного поля при среднем радиусе $R = 10$, ширине $w = 3$, приведены на рис. 1. Из приведенных данных видно, что амплитуда волновой функции является практически постоянной величиной, абсолютное её изменение по всей длине кольца не превышает 0,0001. На рис. 2 приведены радиальное распределение плотности тока j_φ и компоненты индукции магнитного поля B_z. Радиальное распределение тока, как следует из приведенного рисунка, обладает характерной особенностью: на внутренней и на внешней сторонах кольца ток течёт в разных направлениях. Таким образом, в сверхпроводящем кольце существует определённый контур, на котором ток равен нулю (контур нулевого тока).

Одной из общих зависимостей, заслуживающих внимания, является зависимость среднего значения квадрата амплитуды параметра порядка $f^2 = |\psi|^2$ от квантового числа n для колец разной ширины (рис. 3). Среднее значение амплитуды параметра порядка вычислялось по формуле

$$\langle f^2 \rangle = S^{-1}\int\limits_s f^2 dS,$$

где S — площадь кольца

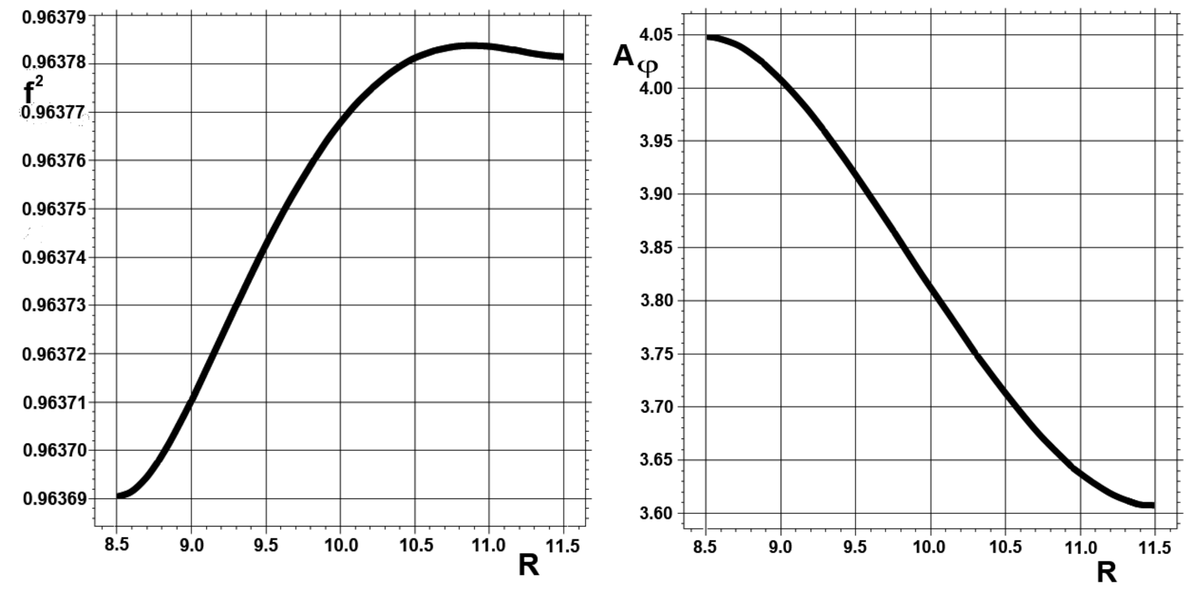

Рис. 1. Радиальное распределение квадрата амплитуды бозе-конденсата куперовских пар (слева) и вектор-потенциала магнитного поля (справа)

Из рис. 3 следует, что для колец малой ширины зависимость хорошо согласуется с результатами аналитического исследования токовых состояний одномерного тонкого кольца [5]. Существуют два токовых состояния, одно из которых устойчиво. Как и для одномерного кольца, существует максимальное значение квантового числа $n_{\max}$.

Вместе с тем, при увеличении ширины кольца при фиксированном среднем радиусе прослеживается уменьшение максимального значения квантового числа $n_{\max}$, и среднего значения $\left\langle f^2 \right\rangle$, что находится в согласии с общим утверждением о невозможности возбуждения сверхпроводящего тока в односвязном образце без пустот: для возникновения тока необходимо существование внутри образца хотя бы одного контура, который невозможно стянуть в точку. Отмеченное выше уменьшение величины $n_{\max}$ при увеличении ширины кольца проиллюстрировано рис. 4. из которого видно, что указанная зависимость не является монотонной. Причина немонотонного уменьшения $n_{\max}$ в настоящее время не имеет объяснения.

Представляет интерес зависимость радиуса, на котором ток минимален, от квантового числа n для колец разной ширины, представленная на рис. 5. Каждая кривая состоит из двух частей: верхней, соответствующей неустойчивым решениям, и нижней, соответствующей устойчивым решениям, для которых свободная энергия (14) достигает минимума. Хорошо видно, что для устойчивых решений при возрастании квантового числа n увеличивается радиус, на котором ток равен нулю. Окончания кривых отвечают выходу контура с минимальным током на внешнюю границу кольца, в этом случае контура нулевого тока не существует. Итак, для устойчивых решений ток на внешней и внутренней границах кольца течёт в разных направлениях, а для неустойчивых решений ток течёт в одном направлении.

Рассчитанные для устойчивых токовых состояний (верхняя часть кривых на рис. 3) зависимости среднего значения тока по сечению и потока индукции магнитного поля, которое охватывается контуром с нулевым током, от квантового числа n, подтверждают эквидистантное квантование магнитного потока [2, 3]. Для неустойчивых состояний эквидистантное квантование магнитного потока не имеет места.

Наряду с нахождением амплитуды параметра порядка и плотности сверхпроводящего тока внутри кольца представляет интерес расчет магнитных полей в областях вне кольца, для которых $f = 0$, и уравнение для компоненты A_φ вектор-потенциала имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dA_\varphi}{dr}\right) - \frac{A_\varphi}{r^2} = 0. \qquad (15)$$

Общее решение уравнения (15) имеет вид

$$A_\varphi\left(r\right) = C_1 r + \frac{C_2}{r}, \qquad (16)$$

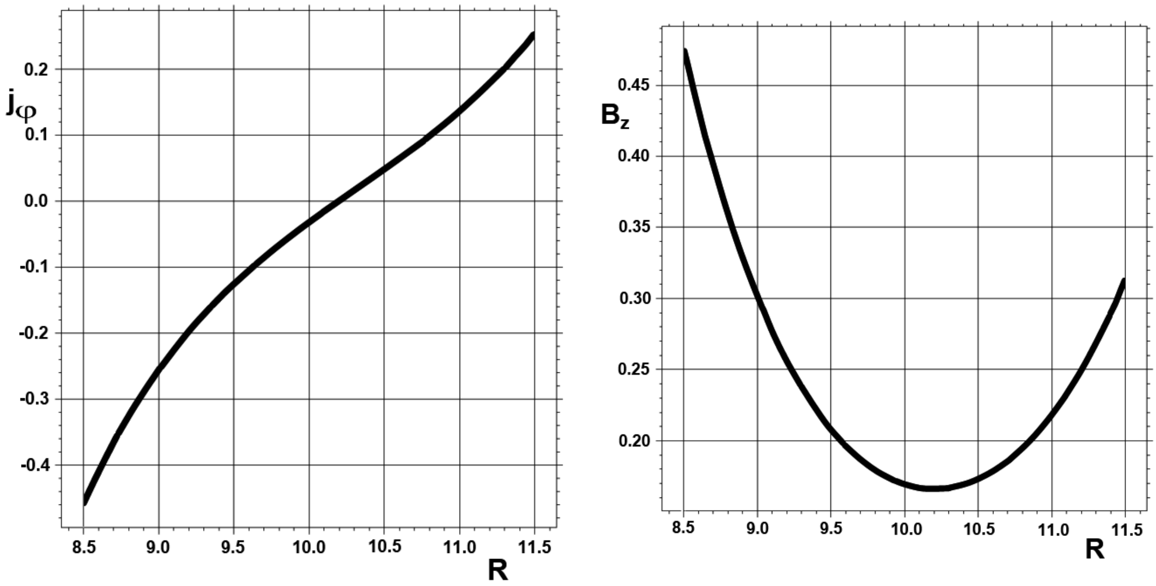

Рис. 2. Радиальное распределение плотности тока (слева) и продольной компоненты магнитного поля (справа)

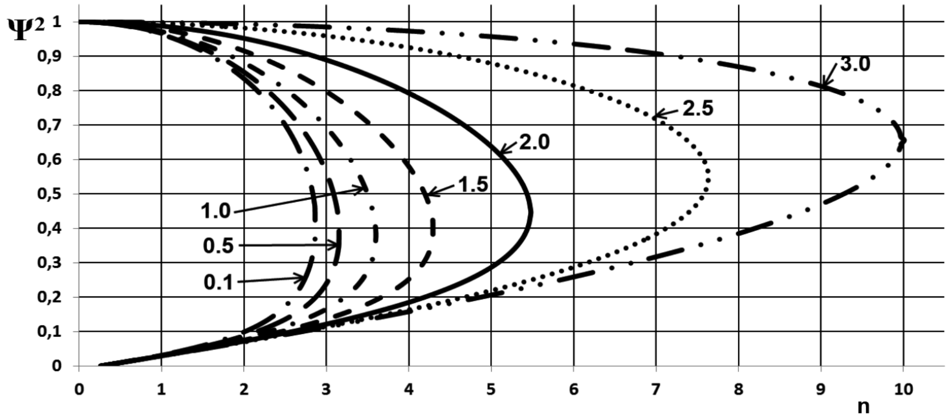

Рис. 3. Зависимость среднего значения квадрата амплитуды параметра порядка от квантового числа n, рассматриваемого как непрерывная переменная, для различной ширины кольца при среднем радиусе $R = 10$

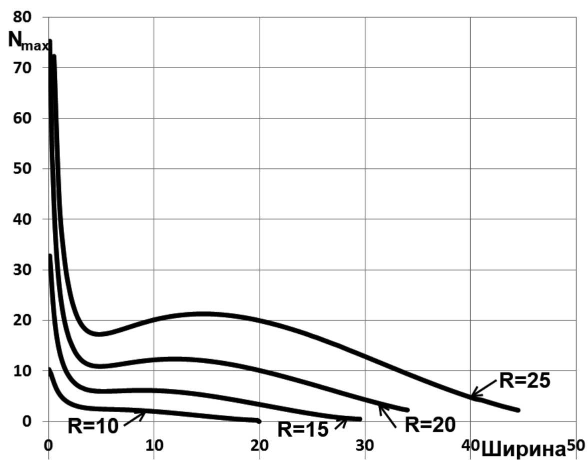

Рис. 4. Зависимость максимального значения квантового числа $n_{\max}$ от ширины кольца при различных значениях R

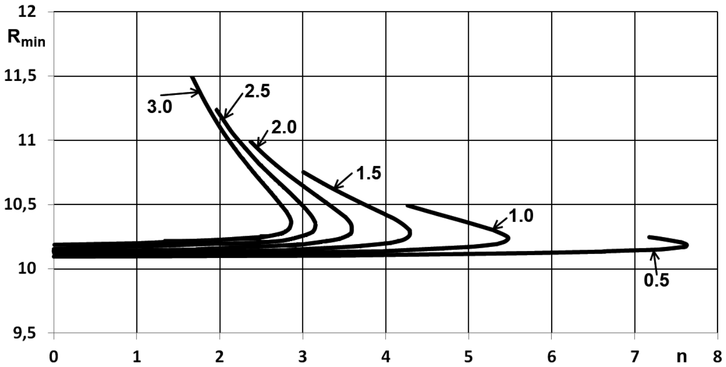

Рис. 5. Зависимость радиуса с минимальным значением тока от квантового числа n для колец разной ширины (отмечена на графиках) при среднем радиусе $R = 10$

где C_1, C_2 — постоянные интегрирования. Компонента B_z индукции магнитного поля вычисляется из соотношения $\mathbf{B} = [\nabla \times \mathbf{A}]$

$$B_z(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_\varphi(r)) = 2C_1 \tag{17}$$

К уравнению (15) и его решению (16) необходимо сделать следующее замечание.

Магнитное поле, вектор-потенциал которого удовлетворяет исходному уравнению (2), представляет собой суперпозицию внешнего поля $\mathbf{A}_{ext}$, описываемого однородным уравнением $[\nabla \times [\nabla \times \mathbf{A}_{ext}]] = 0$, и поля, порождаемого сверхпроводящим током. В численных расчетах считалось, что вектор-потенциал является суперпозицией внешнего магнитного поля и магнитного поля, создаваемого сверхпроводящим током. В том случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует, поле, создаваемое кольцом, должно обращаться в нуль при $r \to \infty$. Внешнее магнитное поле считается однородным, вектор индукции $\mathbf{B}_{ext} = \left(0,\, 0,\, B_z^{ext}\right)$ перпендикулярен плоскости кольца, и вектор-потенциал $\mathbf{A}_{ext}$ содержит только компоненту A_φ^{ext}, равную $\frac{1}{2}B_z^{ext}r$, не обращающуюся в нуль на бесконечности.

Рассмотрим вначале решение (16) во внутренней части кольца $0 \leqslant r \leqslant R_1$. В этой области отсутствуют заряды и токи, поэтому потенциал должен быть всюду регулярен, следовательно, $C_2 = 0$. Если обозначить постоянное значение A_φ на внутренней границе кольца $r = R_1$ через A_1(этот потенциал складывается из потенциала внешнего поля и потенциала, создаваемого током в кольце), то $C_1 = \frac{A_1}{R_1}$. Следовательно, зависимость $A_\varphi(r)$ в области $0 \leqslant r \leqslant R_1$ имеет вид $A_\varphi(r) = A_1\frac{r}{R_1}$, а компонента $B_z = \frac{2A_1}{R_1}$ – постоянна.

Вне кольца, т.е. при $r > R_2$ ситуация при наличии и в отсутствие внешнего поля будет разная. Если внешнее магнитное поле отсутствует, то $C_2 = 0$, и $A_\varphi(r) = A_2\frac{R_2}{r}$, $B_z = 0$ (здесь A_2 — постоянное значение вектор-потенциала на внешней границе кольца). При наличии внешнего магнитного поля обе постоянные C_1 и C_2 отличны от нуля, причем $C_2 = \frac{1}{2}B_z^{ext}$ и $C_1 = A_2 - C_2R_2$, следовательно, $A_\varphi(r) = (A_2 - C_2R_2)\frac{R_2}{r} + C_2r$.

Рассмотрим теперь магнитное поле в области кольца, когда $R_1 < r < R_2$. Согласно численным расчетам, для узких колец параметр порядка f незначительно изменяется в радиальном направлении, следовательно, в первом приближении величину f можно считать постоянной. Тогда из уравнения Максвелла

$$\nabla^2\mathbf{A} = -f^2\mathbf{p},$$

и определения обобщенного импульса p

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa}\nabla\theta - \mathbf{A},$$

с учетом того, что $\theta = n\varphi$, следует

$$\nabla^2 A - f^2 A = \frac{nf^2}{\kappa r},$$

где через A обозначена компонента A_φ вектор-потенциала $\mathbf{A}$. В плоскости $z = 0$ в полярных координатах уравнение Максвелла имеет вид

$$r^2\frac{d^2A}{dr^2} + r\frac{dA}{dr} - \left(1 + f^2r^2\right)A = \frac{nf^2}{\kappa}r.$$

Полагая $x = fr$, $A(r) = \frac{nf}{\kappa}u(x)$, получаем

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - \left(1 + x^2\right)u = x. \tag{18}$$

Решение последнего уравнения имеет вид

$$u(x) = C_1' I_1(x) + C_2' K_1(x) - \frac{1}{x},$$

или, возвращаясь к старым обозначениям

$$A(r) = C_1' I_1(fr) + C_2' K_1(fr) - \frac{n}{\kappa r}, \qquad (19)$$

где $I_1(x)$, $K_1(x)$ — модифицированные функции Бесселя ранга 1, C_1', C_2' — постоянные интегрирования, для определения которых используем свойство непрерывности вектор-потенциала и тангенциальной составляющей индукции магнитного поля в плоскости $z = 0$ на внутренней и внешней границах кольца

$$B_z(r) = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA(r)) = \frac{f}{x}\frac{d}{dx}(xA(x)),$$

откуда, с учетом тождества для функций Бесселя $Z_n(x)$

$$\frac{d}{dx}(xZ_1(x)) = Z_0(x)$$

получаем

$$B_z(x) = fC_1'\frac{I_0(x)}{x} + fC_2'\frac{K_0(x)}{x}. \qquad (20)$$

В случае $n = 0$ вместо уравнения (18) имеем однородное уравнение

$$x^2\frac{d^2A}{dx^2} + x\frac{dA}{dx} - \left(1 + x^2\right)A = 0,$$

решение которого имеет вид

$$A(x) = C_1' I_1(x) + C_2' K_1(x),$$

а выражение для индукции магнитного поля не меняется.

Рассмотрим далее, случай отсутствия внешнего магнитного поля. В области $r < R_1$ $A_\varphi(r) = A_1\frac{r}{R_1}$, $B_z = \frac{2A_1}{R_1}$, тогда при $r = R_1$ получаем первые два уравнения системы для определения коэффициентов C_1', C_2', A_1, A_2

$$C_1' I_1(fR_1) + C_2' K_1(fR_1) - \frac{n}{\kappa R_1} = A_1,$$

$$C_1' I_0(fR_1) + C_2' K_0(fR_1) = 2A_1. \qquad (21)$$

В области $r > R_2$ $A_\varphi(r) = A_2\frac{R_2}{r}$, $B_z = 0$ и при $r = R_2$ получаем еще два уравнения системы

$$C_1' I_1(fR_2) + C_2' K_1(fR_2) - \frac{n}{\kappa R_2} = A_2,$$

$$C_1' I_0(fR_2) + C_2' K_0(fR_2) = 0. \qquad (22)$$

Решая систему (21)–(22), получаем следующие выражения для коэффициентов C_1', C_2' (выражения для A_1, A_2 не приводятся ввиду их сложности)

$$C_1' = \frac{2nK_0(fR_2)}{\kappa R_1\Delta}, \quad C_2' = -\frac{2nI_0(fR_2)}{\kappa R_1\Delta},$$

где

$$\begin{aligned}\Delta = 2K_0(fR_2)\,I_1(fR_1) - \\ - 2K_1(fR_1)\,I_0(fR_2) + \\ + K_0(fR_1)\,I_0(fR_2) - K_0(fR_2)\,I_0(fR_1),\end{aligned}$$

— определитель системы (21)–(22).

При $n = 0$ система уравнений (21)–(22) становится однородной, и условием существования ненулевого решения является обращение в нуль ее определителя Δ. По-видимому, различие в поведении тока сверхпроводимости при $n = 0$ и $n \neq 0$ связано с тем, что в отсутствие внешнего поля при $n = 0$ токовое состояние в кольце не возникает. В присутствии же внешнего магнитного поля возникает собственное магнитное поле кольца, которое полностью компенсирует внешнее магнитное поле до тех пор, пока поток внешнего магнитного поля через отверстие кольца не достигнет величины $\Phi_0/2$, где Φ_0 — квант магнитного потока (флуксон) [7].

Итак, на основании вышеизложенного, можно сделать следующие выводы:

1) Квантование магнитного потока в широких кольцах происходит по эквидистантному механизму: магнитный поток через отверстие кольца кратен целому числу флуксонов.

2) Максимальное значение квантового числа n, соответствующее числу захваченных квантов магнитного потока зависит не только от радиуса кольца, но также и от его ширины. С увеличением ширины кольца величина $n_{\max}$ немонотонно уменьшается.

3) Ток в сверхпроводящем кольце конечной ширины не вносит вклада в магнитное поле вне кольца.

Литература

1. *Гуртовой В. Л., Дубонос С. В., Никулов А. В., Осипов Н. Н., Тулин В. А.* Зависимость величины и направления устойчивого тока от величины магнитного потока в сверхпроводящих кольцах // ЖЭТФ. 2007. Т. 132. С. 1320–1339.
2. *Tinkham M.* Introduction to Superconductivity. McGraw-Hill Inc., 1996. 472 p.
3. *Абрикосов А. А.* Основы теории металлов. М.:

Физматлит, 2009. 600 с.

4. *Vodolazov D. Y., Baelus B. J., Peeters F. M.* Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings // Physical Review B. 2002. Vol. 66. 054531. P. 1–6.
5. *Третяк Д. Н., Тумаев Е. Н.* Неоднозначность токового состояния одномерного сверхпроводящего кольца // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. №1. С. 60–67.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Физматлит, 2003. 620 с.
7. *Третяк Д. Н., Тумаев Е. Н.* Численное исследование спектра устойчивых состояний сверхпроводящего мезоскопического кольца конечной ширины во внешнем магнитном поле // Известия Кубанского государственного университета. Естественные науки. 2012. № 1. С. 28–31.

References

1. Gurtovoj V.L., Dubonos S.V., Nikulov A.V., Osipov N.N., Tulin V.A. Zavisimost' velichiny i napravlenija ustojchivogo toka ot velichiny magnitnogo potoka v sverhprovodjashhih kol'cah [The dependence of the magnitude and direction of sustainable current of the magnetic flux in superconducting rings]. *Zhurnal eksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 2007. vol. 132, pp. 1320–1339. (In Russian)
2. Tinkham M. *Introduction to Superconductivity.* McGraw-Hill Inc., 1996, 472 p.
3. Abrikosov A.A. *Osnovy teorii metallov* [Fundamentals of the theory of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 600 p. (In Russian)
4. Vodolazov D. Y., Baelus B. J., Peeters F. M. Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings. *Physical Review B.*, 2002, vol. 66 (054531), pp. 1–6. DOI: http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevB.66.054531.
5. Tretjak D.N., Tumaev E.N. Neodnoznachnost' tokovogo sostojanija odnomernogo sverhprovodjashhego kol'ca [The ambiguity of the current state of one-dimensional superconducting ring]. *Ekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 1, pp. 60–67. (In Russian)
6. Landau L.D., Lifshic E.M. *Elektrodinamika sploshnyh sred* [Electrodynamics of Continuous Media]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 620 p. (In Russian)
7. Tretjak D.N., Tumaev E.N. Chislennoe issledovanie spektra ustojchivyh sostojanij sverhprovodjashhego mezoskopicheskogo kol'ca konechnoj shiriny vo vneshnem magnitnom pole [Numerical study of the spectrum of stable states of mesoscopic superconducting rings of finite width in an external magnetic field]. *Izvestija Kubanskogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki* [Proc. of the Kuban State University. Natural sciences], 2012, no. 1, pp. 28–31. (In Russian)

Статья поступила 13 июня 2013 г.