

УДК 539.3

## ДВУХКОМПОНЕНТНОЕ УПРУГО ДИФФУЗИОННОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

*Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.*

TWO-COMPONENT ELASTIC DIFFUSION HALF-SPACE UNDER THE INFLUENCE  
OF TIME-DEPENDENT PERTURBATION

Davydov S. A. \*, Zemskov A. V. \*, and Tarlakovskiy D. V. \*\*

\* *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,  
e-mail: azemskov1975@mail.ru*

\*\* *Moscow State University, Moscow, Russia*

*Abstract.* The problem of finding stress-strain state of the two-component half-space (for example alloy), with surface parallel to plane  $x_1Ox_2$  of Cartesian coordinate system. The physics-mechanical processes in the Cartesian coordinate system are modeled by equations

$$C_{3333} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \alpha_{33}^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x_3} + \alpha_{33}^{(2)} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x_3}, \quad D_{33}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \Lambda_{3333}^{(q)} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^3} \quad (q = 1, 2)$$

where  $t$  – time;  $x_3$  – Cartesian coordinates;  $u_3$  – displacements vector component  $Ox_3$ ;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  – are the concentrations variation;  $n_0^{(q)}$  – initial components concentrations;  $n^{(q)}$  – are the concentrations;  $C_{3333}$  – components of elastic constants tensor;  $\rho$  – medium density;  $\alpha_{33}^{(q)}$  – components of tensor, which is defined by crystal structure type and characterizing the relative volume change due to diffusion;  $D_{33}^{(q)}$  – components of diffusion tensor;  $R$  – is the universal gas constant;  $T_0$  – temperature. Coefficients  $\Lambda_{3333}^{(q)}$  are defined by the following formulas

$$\Lambda_{3333}^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{33}^{(q)} D_{33}^{(q)}}{RT_0}$$

It is assumed that at the surface of the half-space  $x_3 = 0$  the displacement and diffusion flows are set

$$u_3|_{x_3=0} = f_3(t), \quad J^{(q)}|_{x_3=0} = f_q(t), \quad u_3 = O(1), \quad J^{(q)} = O(1) \quad (x_3 \rightarrow \infty)$$

where  $J^{(q)} = \Lambda_{3333}^{(q)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - D_{33}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x_3}$  – diffusion flows.

The initial terms are assumed zero:

$$u_3|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad \eta^{(q)}|_{t=0} = 0.$$

The solving algorithm is based on using integral Laplace transform and Fourier transform. The received Laplace transforms are rational functions of conversion parameter. Laplace transforms originals are sought by the second decomposition theorem of operational calculus. For Fourier inversion using a numerical algorithm based on the use of quadrature formulas Philo. The final solution is received as integral convolution. The cases of constant diffusion flows at the surfaces are shown.

*Keywords:* elastic diffusion, time-dependent problems, Fourier transform, Laplace transform, half-space.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 14-08-01161 А).

Давыдов Сергей Андреевич, студент Московского Авиационного Института (Национального исследовательского университета); e-mail: xepoq\_93@inbox.ru.

Земсков Андрей Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры Московского авиационного института (Национального исследовательского университета); e-mail: azemskov1975@mail.ru.

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, д-р. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова; e-mail: tdvhome@mail.ru.

## Введение

Научные исследования второй половины двадцатого века показывают, что диффузионные процессы могут оказывать существенное влияние на напряжённо-деформированное состояние упругих сред и конструкций. В частности, имеются экспериментальные данные [1, 2], подтверждающие, что внедрение диффундирующего вещества в твердое тело порождает в нем внутренние напряжения, а неоднородное поле напряжений, вызванное внешними причинами, способно влиять на перенос вещества. В настоящее время существует множество моделей механодиффузии, в том числе, достаточно сложные нелинейные модели, но практически все задачи этого типа решаются либо в статической, либо в квазистатической постановках. В данной работе рассматривается задача об определении напряжённо-деформированного состояния упругой среды с учётом структурных изменений, обусловленных наличием нестационарных диффузионных потоков. В качестве модели, описывающей вышеуказанные физико-механические процессы в деформируемой среде, используются геометрически линейная модель упругости с учётом диффузии.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается изотропное полупространство  $x_3 \geq 0$  ( $Ox_1x_2x_3$  прямоугольная декартова система координат), представляющее собой твёрдый двухкомпонентный раствор (например, сплав). Физико-механические процессы в среде без учёта температурных эффектов описываются следующими уравнениями [3–6]:

$$C_{3333} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \alpha_{33}^{(1)} \frac{\partial \eta^{(1)}}{\partial x_3} + \alpha_{33}^{(2)} \frac{\partial \eta^{(2)}}{\partial x_3},$$

$$D_{33}^{(q)} \frac{\partial^2 \eta^{(q)}}{\partial x_3^2} = \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial t} + \Lambda_{3333}^{(q)} \frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^3}, \quad (1.1)$$

$$q = 1, 2,$$

а диффузионный поток в направлении оси  $Ox_3$  задаётся соотношением

$$J^{(q)} = \Lambda_{3333}^{(q)} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - D_{33}^{(q)} \frac{\partial \eta^{(q)}}{\partial x_3},$$

$$\Lambda_{3333}^{(q)} = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{33}^{(q)} D_{33}^{(q)}}{RT_0},$$

где  $t$  — время;  $u_3$  — перемещение в направлении оси  $Ox_3$ ;  $\eta^{(q)} = n^{(q)} - n_0^{(q)}$  — приращение концентрации;  $n_0^{(q)}$  — начальная концентрация вещества;  $n^{(q)}$  — текущая концентрация вещества;  $C_{3333}$  — компонента тензора упругих постоянных;  $\rho$  — плотность среды;  $\alpha_{33}^{(q)}$  — коэффициент, определяемый типом кристаллической решётки таким образом, что величина  $\alpha_{33}^{(q)} \varepsilon_{33} n^{(q)}$  определяет относительное объёмное изменение, выражающее зависимость объёма вещества от состава (концентрации исходного вещества);  $\varepsilon_{33}$  — компонента тензора деформации;  $D_{33}^{(q)}$  — коэффициенты взаимной диффузии;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T_0$  — температура.

Полагаем, что на поверхности  $x_3 = 0$  полупространства заданы перемещения и диффузионные потоки

$$u_3|_{x_3=0} = f_3(t), \quad J^{(q)}|_{x_3=0} = f_q(t). \quad (1.2)$$

Граничные условия (1.2) необходимо дополнить условиями ограниченности искомых функций на бесконечности

$$u_3 = O(1), \quad J^{(q)} = O(1), \quad x_3 \rightarrow \infty. \quad (1.3)$$

Начальные условия предполагаются однородными

$$u_3|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u_3}{\partial t}|_{t=0} = 0, \quad (1.4)$$

$$\eta^{(q)}|_{t=0} = 0.$$

Будем использовать следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании они обозначены символом « $\tilde{\phantom{x}}$ », который в дальнейшем изложении опускается):

$$x = \frac{x_3}{L}, \quad u = \frac{u_3}{L}, \quad \tau = \frac{ct}{L},$$

$$c^2 = \frac{C_{3333}}{\rho}, \quad \alpha_q = \frac{n_0^{(q)} \alpha_{33}^{(q)}}{C_{3333}},$$

$$\eta_q = \frac{\eta^{(q)}}{n_0^{(q)}}, \quad D_q = \frac{D_{33}^{(q)}}{cL},$$

$$\Lambda_q = \frac{\Lambda_{3333}^{(q)}}{cLn_0^{(q)}}, \quad (1.5)$$

$$\tilde{f}_3(\tau) = \frac{f_3(\tau)}{L}, \quad \tilde{f}_q(\tau) = \frac{f_q(\tau)}{cn_0^{(q)}},$$

где  $L$  — характерный линейный размер.

Тогда начально-краевая задача (1.1)–(1.4) записывается следующим образом (здесь и далее штрихи обозначают производные по безразмерной координате, а точки — производные по безразмерному времени  $\tau$ ):

$$u'' = \ddot{u} + \alpha_1 \eta_1' + \alpha_2 \eta_2', \quad D_q \eta_q'' = \dot{\eta}_q + \Lambda_q u'''; \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} u|_{x=0} &= f_3(\tau), \\ (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q')|_{x=0} &= f_q(\tau); \\ u &= O(1), \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_q u'' - D_q \eta_q') &= O(1), \\ x &\rightarrow \infty; \end{aligned}$$

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = \eta_q|_{\tau=0} = 0. \quad (1.8)$$

## 2. Интегральное представление решения

Обозначим через  $G_{qk} = \eta_q$ ,  $G_{3k} = u$  — функции Грина задачи (1.6)–(1.8), а именно, решения трёх задач ( $k = \overline{1, 3}$ ), включающих в себя уравнения (1.6), начальные условия (1.8) и следующие граничные условия:

$$(\Lambda_q G_{3k}'' - D_q G_{qk}')|_{x=0} = \delta_{qk} \delta(\tau),$$

$$G_{3k}|_{x=0} = \delta_{3k} \delta(\tau),$$

$$G_{3k} = O(1), \quad \Lambda_q G_{3k}'' - D_q G_{qk}' = O(1),$$

$$x \rightarrow \infty,$$

где  $\delta(\tau)$  — дельта-функция Дирака,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Тогда решение задачи (1.6)–(1.8) имеет вид (звездочка обозначает свертку по времени)

$$u = \sum_{k=1}^3 G_{3k}(x, \tau) * f_k(\tau), \quad (2.1)$$

$$\eta_q = \sum_{k=1}^3 G_{qk}(x, \tau) * f_k(\tau).$$

Применяя к задаче (1.6)–(1.8) преобразование Лапласа, получаем следующую краевую задачу ( $s$  — параметр преобразования Лапласа, индекс « $L$ » указывает на изображение):

$$\begin{aligned} s^2 u^L - u^{L''} + \alpha_1 \eta_1^{L'} + \alpha_2 \eta_2^{L'} &= 0, \\ s \eta_q^L - D_q \eta_q^{L''} + \Lambda_q u^{L''} &= 0; \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} u^L|_{x=0} &= f_3^L, \\ (\Lambda_q u^{L''} - D_q \eta_q^{L'})|_{x=0} &= f_q^L, \\ u^L &= O(1), \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\Lambda_q u^{L''} - D_q \eta_q^{L'} = O(1), \quad x \rightarrow \infty.$$

Представим её решение в виде двух слагаемых

$$u^L = U^L + \varphi, \quad \eta_q^L = H_q^L + \psi_q, \quad (2.4)$$

где  $\varphi$  и  $\psi_q$  — функции, определяемые далее.

Тогда уравнения (2.2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} s^2 U^L - U^{L''} + \alpha_1 H_1^{L'} + \alpha_2 H_2^{L'} &= F_3, \\ s H_q^L - D_q H_q^{L''} + \Lambda_q U_q^{L''} &= F_q, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} F_3(x, s) &= \varphi''(x, s) - s^2 \varphi(x, s) - \\ &- \alpha_1 \psi_1'(x, s) - \alpha_2 \psi_2'(x, s), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$F_q(x, s) = D_q \psi_q''(x, s) - s \psi_q(x, s) - \Lambda_q \varphi'''(x, s).$$

При этом, краевые условия в (2.3) транспонируются следующим образом:

$$U^L|_{x=0} = f_3^L(s) - \varphi(0, s),$$

$$\begin{aligned} (\Lambda_q U^{L''} - D_q H_q^{L'})|_{x=0} &= \\ = f_q^L(s) - \Lambda_q \varphi''(0, s) + D_q \psi_q'(0, s). \end{aligned}$$

Выберем функции  $\varphi$  и  $\psi_q$  таким образом, чтобы условия на границе  $x = 0$  были нулевыми, а сами функции при  $x \rightarrow \infty$  стремились к нулю. Для этого достаточно положить

$$\varphi(x, s) = f_3^L(s) e^{-x},$$

$$\Lambda_q \varphi''(x, s) - D_q \psi_q'(x, s) = f_q^L(s) e^{-x}.$$

Интегрируя второе равенство по  $x$  получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, s) &= \bar{\varphi}(s) e^{-x}, \quad \bar{\varphi}(s) = f_3^L(s), \\ \psi_q(x, s) &= \bar{\psi}_q(s) e^{-x}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\bar{\psi}_q(s) = \frac{1}{D_q} (f_q^L(s) - \Lambda_q f_3^L(s)).$$

Следовательно, функции  $F_k$  в (2.6) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} F_3(x, s) &= [(1 - s^2) \bar{\varphi}(s) + \\ &+ \alpha_1 \bar{\psi}_1(s) + \alpha_2 \bar{\psi}_2(s)] e^{-x}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$F_q(x, s) = [\Lambda_q \bar{\varphi}(s) + (D_q - s) \bar{\psi}_q(s)] e^{-x}.$$

Таким образом, для функций  $U^L$  и  $H_q^L$  получаем задачу (2.5) с нулевыми граничными условиями

$$\begin{aligned} U^L|_{x=0} &= 0, \\ (\Lambda_q U^{L''} - D_q H_q^{L'})|_{x=0} &= 0, \\ U^L &= O(1), \\ \Lambda_q U^{L''} - D_q H_q^{L'} &= O(1), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Её решение будем искать с помощью преобразования Фурье по пространственной координате  $x$  (индекс « $F$ » соответствует трансформанте)

$$\begin{aligned} U^L(x, s) &= \int_0^\infty U^{FL}(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \\ H_q^L(x, s) &= \int_0^\infty H_q^{FL}(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Аналогично с учётом (2.8) представляем функции  $F_k$

$$\begin{aligned} F_3(x, s) &= \int_0^\infty F_3^F(\lambda, s) \sin \lambda x d\lambda, \\ F_q(x, s) &= \int_0^\infty F_q^F(\lambda, s) \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned}$$

где

$$F_3^F(\lambda, s) = \frac{2\lambda}{\pi(1+\lambda^2)} [(1-s^2) \bar{\varphi}(s) + \alpha_1 \bar{\psi}_1(s) + \alpha_2 \bar{\psi}_2(s)],$$

$$F_q^F(\lambda, s) = \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)} [\Lambda_q \bar{\varphi}(s) + (D_q - s) \bar{\psi}_q(s)].$$

В результате система уравнений для функций  $U^{FL}$  и  $H_q^{FL}$  запишется

$$\begin{aligned} (s^2 + \lambda^2) U^{FL} - \alpha_1 \lambda H_1^{FL} - \alpha_2 \lambda H_2^{FL} &= F_3^F, \\ -\Lambda_q \lambda^3 U^{FL} + (s + D_q \lambda^2) H_q^{FL} &= F_q^F. \end{aligned}$$

Определяя эти функции с учётом (2.7), (2.1) и (2.4), получаем решение задачи (2.2), (2.3) в форме

$$\begin{aligned} \eta_q^{FL} &= \sum_{k=1}^3 G_{qk}^{FL}(\lambda, s) f_k^L(s), \\ u^{FL} &= \sum_{k=1}^3 G_{3k}^{FL}(\lambda, s) f_k^L(s), \end{aligned}$$

где

$$G_{jk}^{FL} = \frac{2P_{jk}(\lambda, s)}{\pi P(\lambda^2, s)}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} P_{11}(\lambda, s) &= \\ &= s^3 + D_2 \lambda^2 s^2 + \lambda^2 s + \lambda^4 (D_2 - \alpha_2 \Lambda_2), \end{aligned}$$

$$P_{12}(\lambda, s) = \alpha_2 \Lambda_1 \lambda^2,$$

$$P_{13} = -\Lambda_1 \lambda^2 s^2 (s + D_2 \lambda^2),$$

$$P_{21}(\lambda, s) = \alpha_1 \Lambda_2 \lambda^2,$$

$$P_{23} = -\Lambda_2 \lambda^2 s^2 (s + D_1 \lambda^2),$$

$$\begin{aligned} P_{22}(\lambda, s) &= s^3 + D_1 \lambda^2 s^2 + \lambda^2 s + \\ &+ \lambda^4 (D_1 - \alpha_1 \Lambda_1), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$P_{31}(\lambda, s) = \alpha_1 \lambda (s + D_2 \lambda^2),$$

$$P_{32} = \alpha_2 \lambda (s + D_1 \lambda^2),$$

$$P_{33}(\lambda, s) = \lambda (s^2 + a_1 \lambda^2 s + a_2 \lambda^4),$$

$$\begin{aligned} P(\lambda, s) &= (\lambda + s^2) (s + D_1 \lambda) (s + D_2 \lambda) - \\ &- \alpha_1 \Lambda_1 \lambda^2 (s + D_2 \lambda) - \alpha_2 \Lambda_2 \lambda^2 (s + D_1 \lambda), \end{aligned}$$

$$a_1 = D_1 + D_2 - \alpha_1 \Lambda_1 - \alpha_2 \Lambda_2,$$

$$a_2 = D_1 D_2 - D_2 \alpha_1 \Lambda_1 - D_1 \alpha_2 \Lambda_2.$$

### 3. Определение оригиналов функций влияния

Для нахождения оригиналов функций Грина в (2.11) необходимо выполнить обратные преобразования по Фурье и Лапласу. Так как они являются рациональными функциями параметра  $s$ , то обратное преобразование Лапласа можно осуществить либо путём их разложения на элементарные дроби, либо с помощью вычетов. Для этого необходимо найти нули  $s_1, s_2, s_3$  и  $s_4$  многочлена  $P(\lambda^2, s)$ . В работе [3] показано, что при любом  $\lambda \geq 0$  все нули простые, два из них комплексно сопряжённые, остальные два — действительные отрицательные. Обозначим для определённости  $s_1 = -\gamma + i\beta, \gamma > 0$  и  $s_2 = \bar{s}_1$ . Тогда с помощью второй теоремы разложения операционного исчисления, после отделения действительной и мнимой частей находим

$$G_{jk}^F = e^{-\gamma\tau} (A_{jk1} \cos \beta\tau - A_{jk2} \sin \beta\tau) + \sum_{m=3}^4 A_{jkm} e^{s_m\tau}, \quad (3.1)$$

где коэффициенты  $A_{jkl}, k = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}, l = \overline{1,4}$  являются функциями параметра  $\lambda$  и находятся по формулам (штрих означает производную по параметру « $s$ »)

$$\begin{aligned} A_{jk1} &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Re} \frac{P_{jk}(\lambda, s_1)}{P'(\lambda^2, s_1)}, \\ A_{jk2} &= \frac{4}{\pi} \operatorname{Im} \frac{P_{jk}(\lambda, s_1)}{P'(\lambda^2, s_1)}, \\ A_{jkm} &= \frac{2}{\pi} \frac{P_{jk}(\lambda, s_m)}{P'(\lambda^2, s_m)}, \quad m = 3, 4. \end{aligned}$$

Заметим, что для известных материалов  $\alpha_q \Lambda_q \ll D_q$ , поэтому при нахождении нулей многочлена  $P(\lambda^2, s)$  вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь. В этом случае комплексные корни будут чисто мнимыми. Соответствующие решения были получены в работах [3–5].

Для обращения преобразования Фурье необходимо сначала найти свёртки функций  $f_k(\tau)$ , стоящих в правых частях граничных условий (1.7) с функциями Грина (3.1) по формулам (2.1), после чего применить формулы вида (2.9). Эти интегралы будем находить численно. Для этого удобно преобразовать их в интегралы по конечному проме-

жутку с помощью следующего представления:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^a u^F(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda + \\ &+ \int_a^\infty u^F(\lambda, t) \sin \lambda x d\lambda, \\ \eta_q(x, t) &= \int_0^a \eta_q^F(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda + \\ &+ \int_a^\infty \eta_q^F(\lambda, t) \cos \lambda x d\lambda, \end{aligned}$$

где  $a$  — промежуточная точка (при расчётах полагается  $a = 1$ ).

Вычисление первых интегралов осуществляется с помощью метода Филона [7]. Вторые интегралы с помощью замены переменных  $\lambda = a^2 / (a - \nu)$  также переводятся в интегралы по конечному промежутку  $[0, a]$ , после чего также находятся методом Филона. Основной сложностью при реализации вышеуказанных численных алгоритмов является вычисление значений подынтегральных выражений при  $\lambda = 0$ . Для этого необходимо отдельно найти значения изображений Фурье функций Грина  $G_{jk}^F$  при  $\lambda = 0$ . Подставляя  $\lambda = 0$  в (2.11) и выполняя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} G_{11}^F(0, \tau) &= \frac{2}{\pi} H(\tau), \\ G_{12}^F(0, \tau) &= G_{13}^F(0, \tau) = 0, \\ G_{22}^F(0, \tau) &= \frac{2}{\pi} H(\tau), \\ G_{21}^F(0, \tau) &= G_{23}^F(0, \tau) = 0, \\ G_{3k}^F(0, \tau) &= 0, \end{aligned}$$

где  $H(\tau)$  функция Хевисайда.

### 4. Примеры

Полагаем, что поверхность полупространства зафиксирована и на ней задан диффузионный поток в виде функции Хевисайда, что соответствует следующим правым частям равенств (1.7):

$$f_1(\tau) = H(\tau), \quad f_2(\tau) = f_3(\tau) \equiv 0.$$

Тогда, вычисляя интегралы в (2.1), получаем, что образы Фурье для перемещения

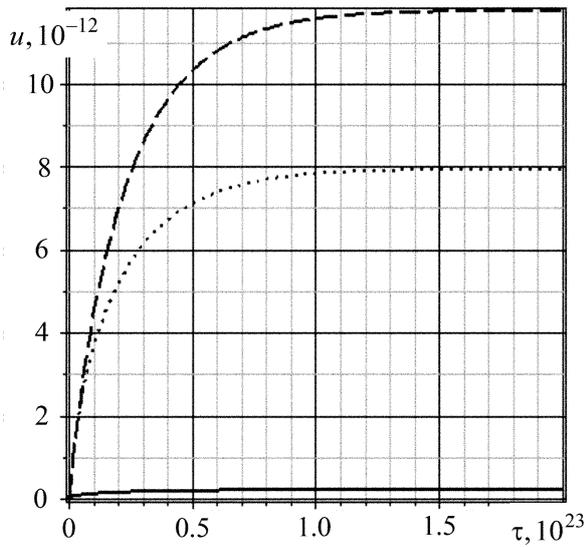


Рис. 1. Зависимость перемещений от времени: Сплошная линия соответствует  $x = 1$ , линия с точками —  $x = 50$ , пунктирная —  $x = 100$

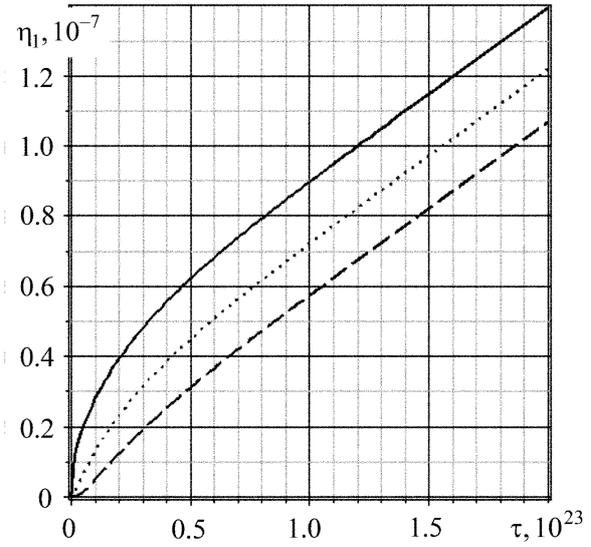


Рис. 2. Зависимость приращения концентрации первого компонента от времени: Сплошная линия соответствует  $x = 1$ , линия с точками —  $x = 50$ , пунктирная —  $x = 100$

и приращения концентрации определяются следующими равенствами:

$$u^F = - \sum_{l=3}^4 \frac{A_{31l}}{s_l} (1 - e^{s_l \tau}) + \frac{1}{|s_1|^2} [(\beta A_{311} + \gamma A_{312}) e^{-\gamma \tau} \sin \beta \tau + (\beta A_{312} - \gamma A_{311}) (e^{-\gamma \tau} \cos \beta \tau - 1)],$$

$$\eta_q^F = - \sum_{l=3}^4 \frac{A_{q1l}}{s_l} (1 - e^{s_l \tau}) + \frac{1}{|s_1|^2} [(\beta A_{q11} + \gamma A_{q12}) e^{-\gamma \tau} \sin \beta \tau + (\beta A_{q12} - \gamma A_{q11}) (e^{-\gamma \tau} \cos \beta \tau - 1)].$$

Для расчётов полагаем, что материал полупространства дюралюминий, имеющий следующие характеристики [8]:

$$\rho = 2700 \text{ кг/м}^3, \quad C_{3333} = 1,255 \cdot 10^{12} \text{ Н/м}^2, \\ T_0 = 773 \text{ К}, \\ D_{33}^{(1)} = 2,7 \cdot 10^{-15} \text{ м}^2/\text{с}, \quad D_{33}^{(2)} = 7 \cdot 10^{-16} \text{ м}^2/\text{с}, \\ L = 1 \text{ м}.$$

Им соответствуют безразмерные характеристики, полученные по формулам (1.5),

$$D_1 = 3.96 \cdot 10^{-19}, \quad D_2 = 1.03 \cdot 10^{-19}, \\ \alpha_1 = 5 \cdot 10^{-6}, \quad \alpha_2 = 10^{-6}, \\ \Lambda_1 = 3.87 \cdot 10^{-17}, \quad \Lambda_2 = 2.01 \cdot 10^{-18}.$$

На рис. 1–3 показаны зависимости перемещения (рис. 1) и концентрации веществ (рис. 2, 3) от времени в следующих точках:  $x = 1$  — сплошная линия,  $x = 50$  — точечная линия,  $x = 100$  — пунктирная линия.

## Заключение

Построено решение новой нестационарной задачи упругой диффузии для двухкомпонентного полупространства. Найдены функции Грина и рассмотрен численный пример. Для перемещений и концентраций веществ, входящих в полупространство, построены графики, показывающие их изменения с течением времени. Все численные расчёты выполнены в среде Maple 17. Полученные решения имеют как самостоятельное значение, так и могут быть использованы при исследовании нестационарных процессов с учетом связанности механического и диффузионных полей.

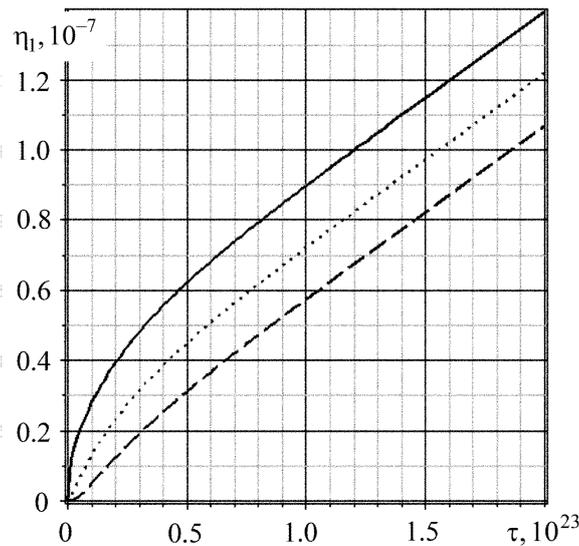


Рис. 3. Зависимость приращения концентрации второго компонента от времени: Сплошная линия соответствует  $x = 1$ , линия с точками —  $x = 50$ , пунктирная —  $x = 100$

### Литература

1. Данков П. Д., Чураев П. В. Эффект деформации поверхностного слоя металла при окислении // Доклады АН СССР. 1950. Т. 73. № 6. С. 1221–1125.
2. Кубашевский О., Гопкинс Б. Окисление металлов и сплавов. М.: Metallurgija, 1965. 428 с.
3. Гойхбург Д. М., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Двухкомпонентный упруго диффузионный слой под действием одномерных нестационарных возмущений // Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 2. С. 226–237.
4. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Приближённое решение трёхмерной задачи об упругой диффузии для ортотропного слоя // Математичні методи та фізико-механічні поля. 2013. Т. 56. № 2. С. 178–191.
5. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Одномерная задача о нестационарной связанной упругой диффузии для слоя // Известия Саратовского университета. Новая серия, Серия Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. ч.1, С. 52–59.
6. Tarlakovskij D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in Thermoelastodiffusive Media. Encyclopedia of thermal stress, volume 2, C-D, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference. 2014. P. 1064–1071.
7. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. М.: Государ-

ственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 204 с.

8. Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.

### References

1. Dankov P. D., Churaev P. V. Jeffect deformacii poverhnostnogo sloja metalla pri okislenii [The effect of deformation of the surface layer of the metal in the oxidation]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the Russia Academy of Sciences], 1950, vol. 73, no. 6, pp. 1221–1125. (In Russian)
2. Kubashevskij O., Gopkins B. *Okislenie metallov i splavov* [Oxidation of metals and alloys]. Moscow, Metallurgija Publ., 1965, 428 p. (In Russian)
3. Gojhburg D. M., Zemskov A. V., Tarlakovskij D. V. Dvuhkomponentnyj uprugoj diffuzionnyj sloj pod dejstviem odnomernyh nestacionarnyh vozmushhenij [A two-component elastic diffusion layer under the action of one-dimensional unsteady perturbations]. *Vestnik Moskovskogo aviacionnogo instituta* [Bulletin of the Moscow Aviation Institute], 2013, vol. 20, no. 2, pp. 226–237. (In Russian)
4. Zemskov A. V., Tarlakovskij D. V. Priblizhjonnoe reshenie trjohmernoj zadachi ob uprugoj diffuzii dlja ortotropnogo sloja [Approximate solution of the problem of three-dimensional elastic orthotropic diffusion layer]. *Matematichni metodi ta fiziko-mehanichni polja* [Mathematical methods and physical-mechanical

- fields], 2013, vol. 56, no. 2, pp. 178–191. (In Russian)
5. Zemskov A. V., Tarlakovskij D. V. Odnomernaja zadacha o nestacionarnoj svjazannoju uprugoj diffuzii dlja sloja [Dimensional problem of unsteady diffusion related to the elastic layer]. *Izvestija Saratovskogo universiteta. Novaja serija, Serija Matematika. Mehanika. Informatika* [Proc. of the Saratov University. The new series, Math. Mechanics. Computer Science], 2013, vol. 13, iss. 4, part 1, pp. 52–59. (In Russian)
  6. Tarlakovskii D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. *Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoelastic and Thermoelastodiffusive Media. Encyclopedia of thermal stress, Vol. 2, C-D*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, New York, London, Springer reference, 2014, pp. 1064–1071.
  7. Tranter K. Dzh. *Integral'nye preobrazovanija v matematicheskoj fizike* [Integral transforms in mathematical physics]. Moscow, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury Publ., 1956, 204 p. (In Russian)
  8. *Tablicy fiziceskih velichin. Spravochnik* [Tables of physical quantities. Reference]. Moscow, Atomizdat Publ., 1976, 1008 p. (In Russian)

---

Статья поступила 3 апреля 2014 г.

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва  
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва

© Давыдов С. А., Земсков А. В., Тарлаковский Д. В., 2014