

УДК 532.582.2

## КАВИТАЦИОННЫЙ ОТРЫВ ПРИ УДАРЕ ПО ПЛАСТИНКЕ, РАСПОЛОЖЕННОЙ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНО ЕГО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕ

*Сметанин Б. И., Федяева К. Е.*

THE CAVITATION SEPARATION WITH THE IMPACT ON THE PLATE, LOCATED IN  
A LAYER OF FLUID PARALLEL TO ITS FREE BOUNDARY

Smetanin B. I.\* and Fedyayeva K. E.\*

\*South Federal University, Rostov-on-Don, Russia, e-mail: smet@math.rsu.ru

*Abstract.* The paper considers a 2D-problem of the central vertical impact of a horizontal plate placed in the middle plane of the layer of an incompressible fluid. At the moment of the impact the vertical component of the velocity vector of fluid particles at the point of the contact between the fluid and the plate is assumed to be known. In the region of separation of the fluid from the plate and on the surface of the fluid layer the impulsive pressure is equal to zero. The region of separation is unknown and must be determined along with other characteristics of the problem.

The problem is reduced to a system of two integral equations by the method of integral transforms. The kernels of these equations are found in the form containing known functions. An approximate form of the solution of the system of equations is sought in the form of an expansion in orthogonal polynomials with explicit characteristic singularities of the unknown functions. The collocation method reduces the system of integral equations to the system of linear algebraic equations regarding the coefficients of these expansions. To determine the boundary points of separation of the fluid from the plate, there is used a new efficient iterative method. It is based on the condition of continuity of the vertical component of the velocity of fluid particles in the separation region.

On the basis of direct calculations there are shown the diagrams for the vertical component of the velocity at separation points of the fluid from the plate and points of the layer's free surface. The distribution of impulsive pressure in the contact area on the back surface of the plate and dependence of the value of the boundary points of the separation region on the relative distance of the plate to the surface of the fluid layer is also demonstrated. A comparison of the obtained results with the known results calculated not taking into account the contact area on the back surface of the plate shows that this contact area significantly changes the velocity field and the impulsive pressures in the region occupied by the fluid.

*Keywords:* plate, incompressible fluid, hit, cavity.

В [1] рассмотрена плоская задача о вертикальном ударе горизонтальной пластинки, расположенной в срединной плоскости слоя несжимаемой жидкости. В этой работе область контакта пластинки с жидкостью на ее задней стороне не учитывалась. Анализ полученного в [1] решения показывает, что на задней стороне пластинки в окрестности ее концов нарушается условие отрыва жидкости от пластинки, что свидетельствует о наличии в этой области контакта пластинки с жидкостью. В настоящей работе данная задача рассмотрена с учетом указанной области контакта пластинки с жидкостью. Для определения граничных точек отрыва жид-

кости от пластинки применен новый, эффективный итерационный метод.

Задачи об ударе тел, полностью погруженных в жидкость, играют важную роль при изучении внезапного возникновения их движения. В момент удара происходит отрыв жидкости от тела. При этом область отрыва является неизвестной и должна быть определена вместе с другими характеристиками задачи. Поэтому такие задачи являются нелинейными. Задача такого типа была исследована Л.И. Седовым [2]. Им рассмотрена плоская задача о горизонтальном ударе тонкой жесткой вертикальной пластинки, плавающей в несжимаемой жидкости. На зад-

Сметанин Борис Иванович, д-р техн. наук, профессор кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Южного федерального университета; e-mail: smet@math.rsu.ru.

Федяева Кристина Евгеньевна, магистр, аспирант кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Южного федерального университета; e-mail: christinamail@mail.ru.

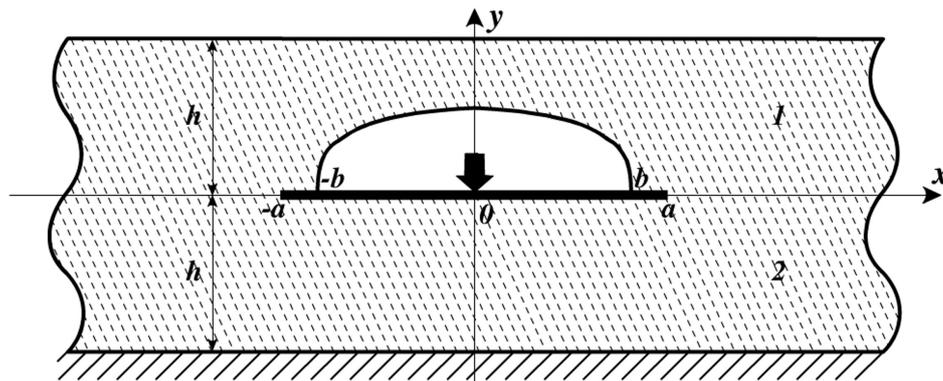


Рис. 1. Положение пластинки в слое жидкости в момент удара

ней стороне пластинки в момент удара происходит отрыв жидкости. В этой работе установлено наличие области контакта на задней стороне пластинки в некоторой окрестности ее нижнего конца.

В настоящей работе рассматривается плоская задача о центральном вертикальном ударе горизонтальной пластинки, плавающей в срединной плоскости слоя несжимаемой жидкости (рис. 1). Жидкость и пластинка до удара находятся в состоянии покоя.

Ширина пластинки  $2a$ , толщина слоя жидкости равна  $2h$ . В момент удара все точки пластинки приобретают одинаковую скорость, равную  $U$ . Импульсивное давление  $p_*$  определяется формулой

$$p_* = \lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{\tau} p dt, \quad (1)$$

где  $p$  — гидродинамическое давление,  $t$  — время,  $\tau$  — момент времени, прошедший после удара.

Движение жидкости после удара потенциально, потенциал скорости жидких частиц  $\phi$  является гармонической функцией, связанной с импульсивным давлением формулой

$$p_* = -\rho\phi, \quad (2)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости.

На свободной поверхности, а также в области отрыва жидкости на задней стороне пластинки (в каверне) давление ограничено. Отсюда следует, что при  $y = h$ ,  $|x| < \infty$  и  $y = +0$ ,  $|x| < b$  в силу (1) и (2) в момент удара должно выполняться условие  $\phi = 0$ . Вдоль задней стороны пластинки изменение вертикальной составляющей скорости жидких частиц  $v_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}$  должно быть непрерыв-

ным, а в области отрыва жидкости от пластинки должно выполняться условие [2]

$$v_y > -U, \quad |x| < b, \quad y = +0.$$

Точки  $x = \pm b, y = +0$ , которые являются граничными точками области отрыва жидкости от пластинки в момент удара, неизвестны и подлежат определению.

Таким образом, рассматриваемая задача в момент удара сводится к решению уравнения Лапласа

$$\Delta\phi = 0 \quad (3)$$

в полосе  $\{|x| < \infty, |y| \leq h\}$  при следующих граничных условиях и условии на бесконечности, соответственно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -U, & |x| \leq a, & \quad y = -0, \\ \phi &= 0, & |x| < b, & \quad y = +0, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= -U, & b \leq |x| \leq a, & \quad y = +0, \\ \phi &= 0, & |x| < \infty, & \quad y = h, \\ \frac{\partial\phi}{\partial y} &= 0, & |x| < \infty, & \quad y = -h, \\ \phi &\rightarrow 0, & |x| \rightarrow \infty, & \quad -h \leq y \leq h. \end{aligned}$$

Решение уравнения Лапласа (3) будем брать в следующем виде [3]

$$\begin{aligned} \phi_+(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [A(\beta) \operatorname{sh}(\beta y) + \\ &\quad + B(\beta) \operatorname{ch}(\beta y)] e^{-i\beta x} d\beta, \quad (4) \\ \phi_-(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [C(\beta) \operatorname{sh}(\beta y) + \\ &\quad + D(\beta) \operatorname{ch}(\beta y)] e^{-i\beta x} d\beta, \end{aligned}$$

где  $A(\beta), B(\beta), C(\beta), D(\beta)$  — достаточно произвольные функции,

$$\phi(x) = \begin{cases} \phi_+(x, y), & 0 \leq y \leq h \\ \phi_-(x, y), & -h \leq y \leq 0. \end{cases}$$

С целью сведения задачи к решению системы двух интегральных уравнений введем в рассмотрение при  $y = 0$  вспомогательные функции  $q(x)$  и  $s(x)$  формулами

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1}{U} \left( \frac{\partial \phi_-}{\partial x} - \frac{\partial \phi_+}{\partial x} \right), \\ s(x) &= \frac{1}{U} \left( \frac{\partial \phi_-}{\partial y} - \frac{\partial \phi_+}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

С использованием граничных условий при  $y = \pm h$  и представлений (5) функции  $A(\beta), B(\beta), C(\beta)$  и  $D(\beta)$  могут быть выражены через преобразования Фурье  $Q(\beta)$  и  $S(\beta)$  функций  $q(x)$  и  $s(x)$

$$\begin{aligned} A(\beta) &= \frac{iQ(\beta) \operatorname{th}(\beta h) - S(\beta)}{G(\beta)}, \\ B(\beta) &= -A(\beta) \operatorname{th}(\beta h), \\ C(\beta) &= D(\beta) \operatorname{th}(\beta h), \\ D(\beta) &= \frac{iQ(\beta) + S(\beta) \operatorname{th}(\beta h)}{G(\beta)}, \end{aligned} \quad (6)$$

где  $G(\beta) = \beta(1 + \operatorname{th}^2(\beta h))$ ,

$$\begin{aligned} Q(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} q(\zeta) e^{i\beta\zeta} d\zeta, \\ S(\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(\zeta) e^{i\beta\zeta} d\zeta. \end{aligned}$$

Учет приведенных соотношений и условия непрерывности поля скоростей жидких частиц при  $y = 0, |x| > a$  в момент удара приводит к следующей системе интегральных уравнений относительно функций  $q$  и  $s$ :

$$\begin{cases} \int_{-a}^a q(\zeta) k_1(\zeta - x) d\zeta + \\ + \int_{-b}^b s(\zeta) k_2(\zeta - x) d\zeta = 2\pi, & |x| \leq a, \\ \int_{-a}^a q(\zeta) k_3(\zeta - x) d\zeta + \\ + \int_{-b}^b s(\zeta) k_4(\zeta - x) d\zeta = 0, & |x| \leq b, \end{cases} \quad (7)$$

$$k_1(t) = \int_0^{\infty} L_1(u) \sin(ut) du,$$

$$k_2(t) = \int_0^{\infty} L_2(u) \cos(ut) du,$$

$$k_3(t) = \int_0^{\infty} L_2(u) \sin(ut) \frac{du}{u},$$

$$k_4(t) = \int_0^{\infty} L_1(u) \cos(ut) \frac{du}{u},$$

$$L_1(u) = \operatorname{th}(2uh), \quad L_2(u) = 1 - \operatorname{sech}(2uh).$$

В (7) перейдем к безразмерным величинам по формулам

$$\begin{aligned} x &= a\xi, \quad \zeta = a\eta, \quad \epsilon = \frac{b}{a}, \\ \lambda &= \frac{4h}{\pi a}, \quad q(x) = q_*(\xi), \quad s(x) = s_*(\xi). \end{aligned}$$

После указанных преобразований и учета значений несобственных интегралов, приведенных в [4], система (7) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 q(\eta) l_1 \left( \frac{\eta - \xi}{\lambda} \right) d\eta - \\ - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s(\eta) l_2 \left( \frac{\eta - \xi}{\lambda} \right) d\eta = \\ = -2\pi\xi, \quad |\xi| \leq 1, \\ \int_{-1}^1 q(\eta) l_2 \left( \frac{\eta - \xi}{\lambda} \right) d\eta - \\ - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s(\eta) l_1 \left( \frac{\eta - \xi}{\lambda} \right) d\eta = 0, \quad |\xi| \leq \epsilon, \end{cases} \quad (8)$$

$$l_1(t) = \ln \operatorname{th} \left( \frac{|t|}{2} \right), \quad (9)$$

$$l_2(t) = [\pi - 2 \operatorname{arctg}(\exp |t|)] \operatorname{sign}(t).$$

В (8) и далее знак \* у функций  $q$  и  $s$  опущен. Область определения функции  $q(\xi)$  не зависит от значения параметра  $\epsilon$  в системе

уравнений (8). Поэтому приближенное представление функции  $q(\xi)$  при любых возможных значениях  $\epsilon$  можно рассматривать в виде [5]

$$q(\xi) = (1 - \xi^2)^{-\frac{3}{4}} \sum_{n=1}^N Q_n P_{2n-1}^{(-3/4, -3/4)}(\xi), \quad (10)$$

где  $P_n^{(-3/4, -3/4)}(\xi)$  — многочлены Якоби,  $Q_n$  — подлежащие определению коэффициенты.

Вертикальная составляющая скорости жидких частиц  $v_y$  при  $y = +0$ ,  $|\xi| \leq 1$  на основании (4) и (5) может быть представлена в виде

$$v_y = \begin{cases} -U[1 + s(\xi)], & |\xi| \leq \epsilon \\ -U, & \epsilon \leq |\xi| \leq 1. \end{cases} \quad (11)$$

При решении системы интегральных уравнений (8) параметр  $\epsilon$  должен быть задан. Анализ решения аналогичной задачи с учетом области контакта жидкости с задней стороной пластинки, приведенного в [2], показывает, что структура функции  $s$  имеет вид

$$s = s(\xi, \epsilon) = \sqrt{\epsilon^2 - \xi^2} \Omega(\xi, \epsilon), \quad |\xi| \leq \epsilon, \quad (12)$$

где  $\Omega$  — непрерывная функция. Однако, с целью построения эффективного итерационного процесса для определения параметра  $\epsilon$  целесообразно функцию  $s$  рассматривать в виде

$$s = s(\xi, \epsilon) = (\epsilon^2 - \xi^2)^{-\frac{1}{2}} V(\xi, \epsilon), \quad |\xi| \leq \epsilon. \quad (13)$$

В этом случае итерационный процесс следует строить по формуле

$$V(\epsilon_n, \epsilon_{n-1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

В качестве нулевого приближения можно взять значение  $\epsilon$ , равное единице. Когда относительная разность предыдущего и последующего значений  $\epsilon$  станет меньше заданной погрешности, эти значения в (12) и (13) приближенно можно считать равными, и тогда структура функции  $s$  (13) принимает вид (12). В основе описанного метода определения точек отрыва жидкости от пластинки лежит условие непрерывности вертикальной составляющей скорости жидких частиц при  $y = +0$ ,  $|\xi| \leq 1$  [2]. Отметим также, что методы определения точек отрыва жидкости при ударе тела, плавающего на поверхности несжимаемой жидкости, описаны в монографии [6].

При использовании  $s$  в форме (13) функцию  $V(\xi, \epsilon)$  можно рассматривать в следующем виде:

$$V(\xi, \epsilon) = \sum_{m=1}^M S_m T_{2m-2} \left( \frac{\xi}{\epsilon} \right), \quad (14)$$

где  $T_{2m-2}(\xi)$  — многочлены Чебышева первого рода,  $S_m$  — коэффициенты, подлежащие определению.

С целью сведения системы интегральных уравнений (8) к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $Q_n$  и  $S_m$  применим к (8) с учетом (10), (13) и (14) метод коллокации. Каждое слагаемое в первом уравнении системы (8) является нечетной функцией  $\xi$ , а во втором уравнении — четной функцией  $\xi$ . Поэтому в качестве точек коллокации достаточно взять точки  $\xi_i$ , удовлетворяющие условию:  $0 < \xi_i < 1$ . В частности, при  $M = N$ , такими точками могут быть чебышевские узлы

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(2i-1)}{2N} \right], \quad i = 1, 2, \dots, N$$

для первого уравнения системы (8) и

$$\xi_j = \frac{\epsilon}{2} \left[ 1 + \cos \frac{\pi(2j-1)}{2N} \right], \quad j = 1, 2, \dots, N$$

для второго уравнения системы (8).

При реализации указанного выше итерационного процесса для заданных значений параметров  $\lambda$ ,  $M$ ,  $N$  определяется величина  $\epsilon$  и ей соответствующие значения коэффициентов  $Q_n$  и  $S_m$ . Как показали проведенные расчеты, при  $0,5 \leq \lambda < \infty$  расхождение значений величины  $\epsilon$ , найденных при  $M = N = 8$  и  $M = N = 10$ , соответственно, не превышает 1%. При этом для получения заданного значения  $\epsilon$  с точностью до трех значащих цифр достаточно проделать не более 8 итераций.

Вертикальная составляющая скорости точек границы жидкости с каверной  $v_k$  находится по формуле, следующей из (11),

$$v_k(x) = -U [1 + s(\xi)], \quad \xi = \frac{x}{a}, \quad |\xi| \leq \epsilon.$$

Вертикальная составляющая скорости точек свободной поверхности жидкости определя-

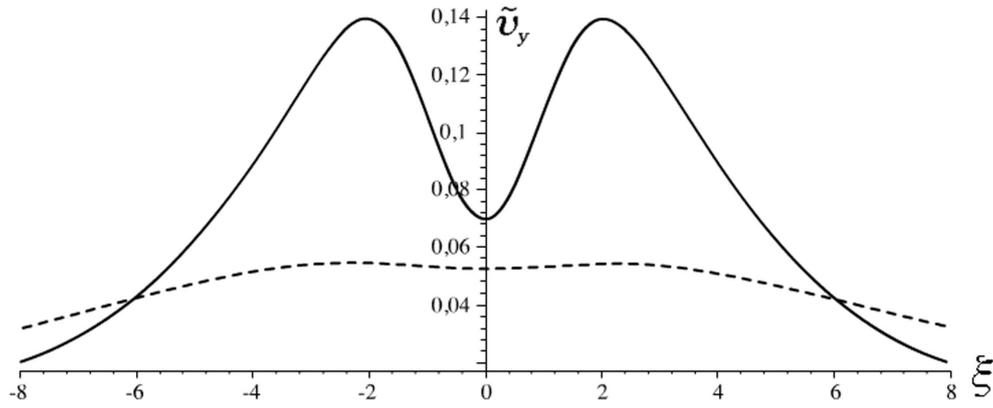


Рис. 2. Графики функции вертикальной составляющей скорости точек свободной поверхности

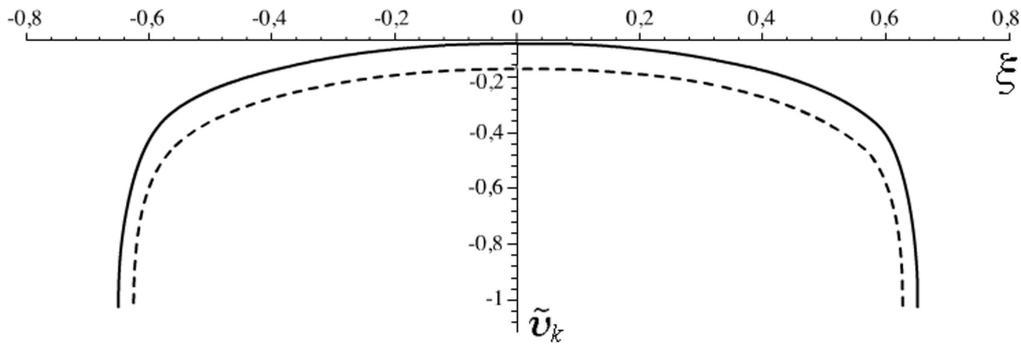


Рис. 3. Графики функции вертикальной составляющей скорости точек границы жидкости с каверной

ется формулой, следующей из (4) и (6),

$$v_y = -\frac{\sqrt{2}}{\pi\lambda}U \left[ \int_{-1}^1 q(\eta) \frac{\operatorname{sh} \frac{\eta-\xi}{\lambda}}{\cosh \frac{2(\eta-\xi)}{\lambda}} d\eta + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s(\eta) \frac{\operatorname{ch} \frac{\eta-\xi}{\lambda}}{\cosh \frac{2(\eta-\xi)}{\lambda}} d\eta \right],$$

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad |\xi| < \infty.$$

Импульсивное давление  $p_*$  на задней стороне пластинки, при  $y = +0$ ,  $|\xi| \leq 1$ ,  $\xi = x/a$ , на основании (4) и (6) определяется формулой

$$p_* = \frac{\rho U a}{2\pi} \left[ \int_{-\epsilon}^{\epsilon} s(\eta) l_1 \left( \frac{\eta-\xi}{\lambda} \right) d\eta - \int_{-1}^1 q(\eta) l_2 \left( \frac{\eta-\xi}{\lambda} \right) d\eta \right], \quad |\xi| \leq 1.$$

Функции  $l_1$  и  $l_2$  имеют вид (9).

Графики приведены при относительной глубине слоя  $\lambda = 2$  (сплошная линия) и  $\lambda = 5$  (штриховая линия), соответственно.

На рис. 2 приведены графики функции вертикальной составляющей скорости точек свободной поверхности  $\tilde{v}_y(\xi) = U^{-1}v_y(x)$ .

На рис. 3 приведены графики функции вертикальной составляющей скорости точек границы жидкости с каверной  $\tilde{v}_k(\xi) = U^{-1}v_k(x)$ .

На рис. 4 приведен график зависимости границы области контакта  $\epsilon$  от относительной глубины слоя  $\lambda$ . Как видно из представленного графика, с уменьшением  $\lambda$  значение параметра  $\epsilon$  увеличивается. Предельное значение параметра  $\epsilon$ , равное единице, соответствует отсутствию на задней стороне пластинки области контакта с жидкостью.

На рис. 5 приведены графики функции импульсивного давления  $\tilde{p}_*(\xi) = (\rho U a)^{-1}p_*(x)$  на задней стороне пластинки.

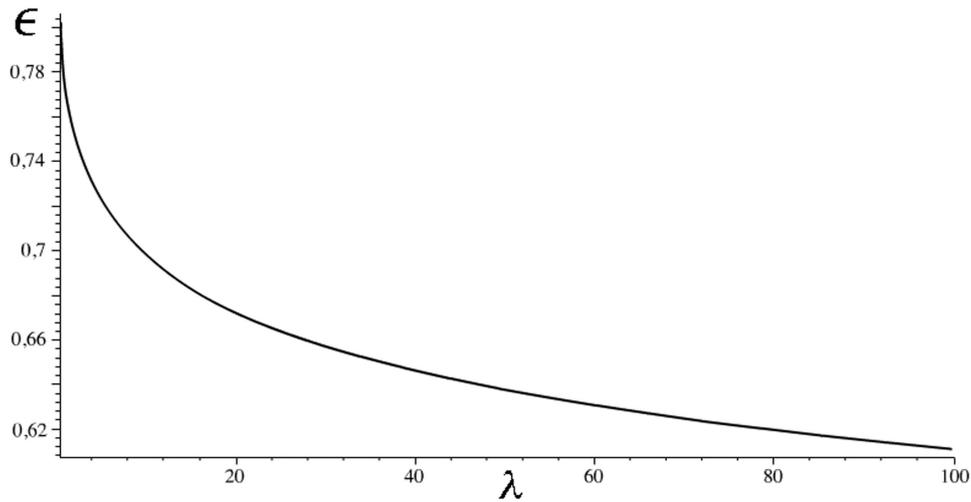
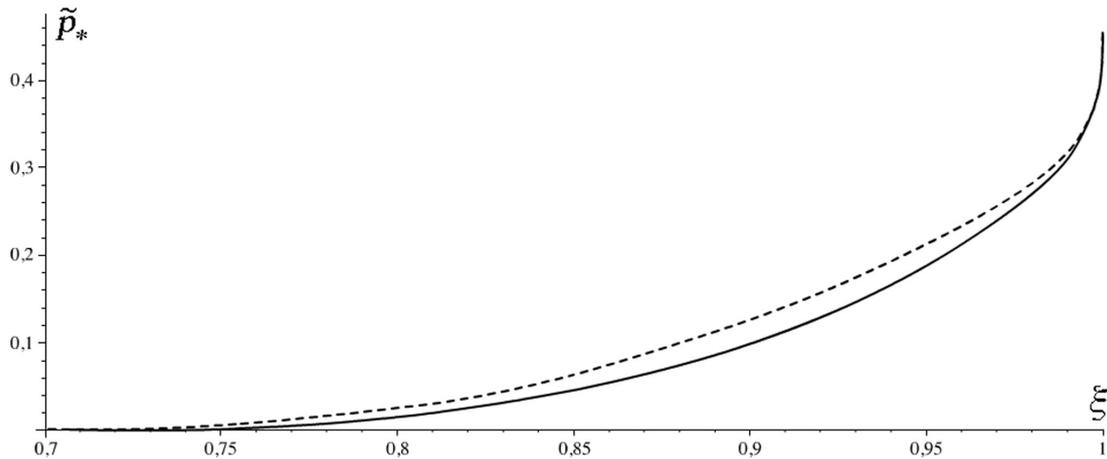
Рис. 4. Зависимость  $\epsilon$  от  $\lambda$ 

Рис. 5. Импульсивное давление

Авторы выражают благодарность Сумбатяну М. А. за ценные советы и постоянное внимание к работе.

### Литература

1. Сметанин Б. И. Вертикальный удар горизонтальной пластинки в слое несжимаемой жидкости // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. №4. Ч. 3. С. 1112–1113.
2. Седов В. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
3. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: Иностранная литература, 1955. 660 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматлит, 1963. 1100 с.
5. Сметанин Б. И. Об одном интегральном уравнении и его приложении к задачам о тонких отслоившихся включениях в упругих те-

лах // Прикладная математика и механика. 1985. Т. 49. Вып. 5. С. 784–790.

6. Норкин М. В. Смешанные задачи гидродинамического удара. Ростов-н/Д: ООО «ЦВВР», 2007. 136 с.

### References

1. Smetanin B. I. Vertikal'nyj udar gorizont'noj plastinki v sloe neszhimaemoj zhidkosti [Vertical strike plate in a horizontal layer of an incompressible fluid]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo* [Bulletin of the Nizhny Novgorod University named N. I. Lobachevsky], 2011, no. 4, part. 3, pp. 1112–1113. (In Russian)
2. Sedov V. I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i ajerodinamiki* [Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 448 p. (In Russian)
3. Sneddon I. *Preobrazovanija Fur'e* [Fourier trans-

- form]. Moscow, Inostrannaja literatura Publ., 1955, 660 p. (In Russian)
4. Gradshtejn I. S., Ryzhik I. M. *Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij* [Tables of integrals, series and products]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1963, 1100 p. (In Russian)
  5. Smetanin B. I. Ob odnom integral'nom uravnenii i ego prilozhenii k zadacham o tonkih otsloivshihsjja vkljuchenijah v uprugih telah [An integral equation and its application to problems of thin delaminated inclusions in elastic bodies]. *Prikladnaja matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics], 1985, vol. 49, iss. 5, pp. 784–790. (In Russian)
  6. Norkin M. V. *Smeshannye zadachi gidrodinamicheskogo udara* [Mixed problems of hydrodynamic shock]. Rostov-on-Don, OOO “CVVR” Publ., 2007, 136 p. (In Russian)

---

Статья поступила 26 ноября 2013 г.

Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону

© Сметанин Б. И., Федяева К. Е., 2014