

УДК 538.945

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ТОКА В АСИММЕТРИЧНОМ МЕЗОСКОПИЧЕСКОМ КОЛЬЦЕ, ПОМЕЩЕННОМ ВО ВНЕШНЕЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

*Третьяк Д. Н., Тумаев Е. Н.*

ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF THE DISTRIBUTION OF THE  
SUPERCONDUCTING CURRENT IN THE ASYMMETRIC MESOSCOPIC RING PLACED IN  
AN EXTERNAL MAGNETIC FIELD

Tretyak D. N.\* and Tumayev E. N.\*

\*Kuban State University, Krasnodar, Russia, e-mail: tumayev@phys.kubs.ru

*Abstract.* One of the most promising types of thermal radiation detectors are superconducting mesoscopic rings. The principle of such detectors operation is based on a discreteness of current states of the superconductor. During detection experiments the asymmetric rings are frequently used with asymmetric current-voltage characteristic, which provides them additional benefits. Theoretical and numerical analysis of the current states of such rings is far from complete, which reason justifies the urgency of this task.

In this paper the theoretical and numerical analysis of the currents distribution in the superconducting asymmetric ring bounded by two circles of different radii which centers do not coincide, is performed. For the analysis of the distribution of the superconducting current in the ring, placed in an external uniform magnetic field, a system of Ginzburg–Landau–Maxwell equations were used supplemented with specially selected calibration of the vector potential of the magnetic field. The essence of the proposed method is that a scalar function of gradient is added to the vector potential, with gradient is chosen in a way that the superconducting current density at the boundaries of a superconducting ring has only a tangential component. In this approach, the Ginzburg–Landau–Maxwell equations are supplemented by the gauge calibration-fixing equation.

Application of the proposed method, which allows to calculate the distribution of currents in the rings of any geometry, let us come to the conclusion that in such rings when the external magnetic field changes, there is an alternation between the superconducting and normal state because of the spatial quantization of Landau orbits of the Cooper electrons pairs. Unlike the symmetrical superconducting rings containing one vortex or two oppositely directed vortices, in the asymmetric rings the additional current states arise, in a narrow part of which there is one vortex contained, and in wide part – there are two vortices. On the other hand, the average characteristics of the integral (the averaged current density in the ring area, etc.) slightly depend on the degree of the ring asymmetry.

*Keywords:* superconducting ring, Ginzburg–Landau equation, the magnetic field, vector potential.

Одним из перспективных видов детекторов теплового излучения являются сверхпроводящие мезоскопические кольца, охлажденные до температуры  $0,95T_c$ , где  $T_c$  — температура перехода в сверхпроводящее состояние. Характерный диаметр таких колец составляет несколько микрон, при толщине 40–70 нм и ширине порядка 200 нм. Алюминиевые кольца таких размеров использовались в опытах А.В. Никулова и сотрудников [1]. Принцип действия таких детекторов основан на дискретности токовых состояний сверх-

проводника. Как отмечено в [2], сверхпроводящие мезоскопические кольца (указанная выше толщина кольца меньше длины когерентности, вследствие чего кольцо можно рассматривать как двумерный объект), являются макроскопическими квантовыми объектами, в силу чего имеют дискретный набор токовых состояний.

Экспериментальные исследования сверхпроводящих колец, проведенные в [1], показали, что асимметричные кольца, составленные из двух полуколец разной ширины, об-

Третьяк Дмитрий Николаевич, аспирант кафедры физики и информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: tretjak86@mail.ru.

Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubs.ru.

ладают асимметричной вольт-амперной характеристикой, вследствие чего могут использоваться как чувствительные детекторы слабых сигналов. Теоретическое и численное исследование токовых состояний таких колец далеко от завершения, что обуславливает их актуальность. Несмотря на то, что в [3] проведено подробное исследование токовых состояний одномерного сверхпроводящего кольца в отсутствие внешнего магнитного поля, которое удалось провести до конца, не прибегая к численным методам, некоторые ее выводы не имеют места для кольца конечной ширины. В [4] исследованы токовые состояния симметричного сверхпроводящего мезоскопического кольца конечной ширины во внешнем магнитном поле. Распределение сверхпроводящего тока в таком кольце имеет достаточно простой характер, в отличие от распределения токов в асимметричном кольце. В [5] изучение распределения тока в асимметричном кольце проведено с помощью линеаризованного уравнения Гинзбурга-Ландау, которое не описывает сверхпроводящее состояние. В [6] сверхпроводящие кольца исследовались численно.

В настоящей работе проведен теоретический и численный анализ асимметричного сверхпроводящего кольца, ограниченного двумя окружностями радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , центры которых находятся на некотором расстоянии  $\Delta$ . В экспоненциальной параметризации  $\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp[i\theta(\mathbf{r})]$ , система уравнений Гинзбурга-Ландау, записанная в безразмерных координатах [7], будет иметь следующий вид:

$$-\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f + f(p^2 - 1 + f^2) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} f \nabla^2 \theta + \frac{2}{\kappa} \mathbf{p} \nabla f = 0, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa} \nabla \theta - \mathbf{A} \quad (3)$$

– обобщенный импульс, связанный с плотностью тока  $\mathbf{j}$  равенством  $\mathbf{j} = f^2 \mathbf{p}$ . В приведенных формулах  $\kappa$  – параметр Гинзбурга-Ландау,  $f$  и  $\theta$  – амплитуда и фаза волновой функции бозе-конденсата куперовских пар,  $\mathbf{A}$  – вектор-потенциал внешнего магнитного поля, которое считается постоянным, однородным и направленным перпендикулярно плоскости кольца. Напомним, что при подходе, используемом в [4], вектор-потенциал считается обусловленным только внешним магнитным полем, поскольку

вектор-потенциал магнитного поля, создаваемого сверхпроводящим током, является чистой калибровкой [8], и может быть использован как калибровочная добавка к потенциалу внешнего поля. В связи с этим естественным выбором калибровки вектор-потенциала является калибровка Лондонов

$$\nabla \mathbf{A} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{n} \mathbf{A}|_{\Gamma} = 0, \quad (5)$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе  $\Gamma$  мезоскопического кольца, рассматриваемого как двумерный объект. Выбор калибровки вектор-потенциала в такой форме гарантирует тот факт, что сверхпроводящие токи не выходят за границы образца.

Для симметричного кольца в приближении внешнего поля, напряженность которого  $\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  постоянна, уравнение (4) приводит к выбору величины вектор-потенциала в виде следующего векторного произведения:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} [\mathbf{H} \times \mathbf{r}] = \frac{1}{2} H r \mathbf{e}_{\phi}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{r}$  – радиус-вектор,  $\mathbf{e}_{\phi}$  – единичный вектор полярной системы координат, касательный к окружностям  $r = \text{const}$ . Уравнение (5) при этом удовлетворяется автоматически.

В случае несимметричного кольца выбор вектор-потенциала в форме (6) хоть и обеспечивает постоянство напряженности внешнего магнитного поля, но нарушает условие Лондонов (5), что при численных расчетах приводит к выходу сверхпроводящего тока  $\mathbf{j} = f^2 (\kappa^{-1} \nabla \theta - \mathbf{A})$  за пределы кольца. В связи с этим используем произвол в выборе калибровки вектор-потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , заключающийся в возможности добавления к нему градиента скалярной функции  $G(\mathbf{r})$

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla G(\mathbf{r}), \quad (7)$$

который подбирается так, чтобы потенциал  $\mathbf{A}'$  удовлетворял условиям (4) и (5). Согласно теореме Гельмгольца о восстановлении векторного поля по его ротору и дивергенции, функция  $G(\mathbf{r})$  однозначно определяется уравнением Лапласа

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = 0 \quad (8)$$

и неоднородным граничным условием

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma} = \mathbf{n} \mathbf{A}, \quad (9)$$

где  $\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\Gamma}$  – производная по направлению внешней нормали к границе  $\Gamma$ .

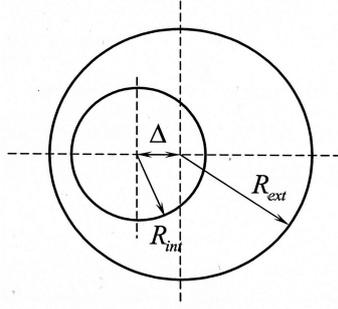


Рис. 1. Геометрические параметры асимметричного сверхпроводящего кольца

Для того, чтобы калибровка (7)–(9) не изменила вектор плотности тока  $\mathbf{j} = f^2 (\kappa^{-1} \nabla \theta - \mathbf{A})$ , преобразование (7) необходимо дополнить условием  $\theta = n\phi + G(\mathbf{r})$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , и функция  $G(\mathbf{r})$  в полярных координатах  $(r, \phi)$  должна удовлетворять условию цикличности  $G(r, \phi + 2\pi) = G(r, \phi)$ .

Система уравнений

$$-\frac{1}{\kappa^2} \nabla^2 f + f(p^2 - 1 + f^2) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{1}{\kappa^2} f \nabla^2 \theta + \frac{2}{\kappa} \mathbf{p} \nabla f = 0, \quad (11)$$

где обобщенный импульс по-прежнему дается формулой (3)

$$\mathbf{p} = \frac{1}{\kappa} \nabla \theta - \mathbf{A}', \quad (12)$$

но вектор-потенциал теперь имеет следующую форму

$$\mathbf{A}' = \frac{1}{2} H r \mathbf{e}_\phi + \nabla G, \quad (13)$$

и дополнительно введенная функция  $G(\mathbf{r})$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}) = 0. \quad (14)$$

Для обеспечения калибровочной инвариантности градиентное преобразование вектор-потенциала (7) дополняется следующим преобразованием фазы параметра порядка

$$\theta = n\phi + \kappa G. \quad (15)$$

Уравнение Лапласа (14), согласно (9), дополняется граничным условием

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_\Gamma = \frac{1}{2} H r \mathbf{e}_\phi. \quad (16)$$

Граничное условие для параметра порядка  $\psi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) \exp[i\theta(\mathbf{r})]$ , которое является следствием общего граничного условия для уравнения Гинзбурга–Ландау

$$\mathbf{n} \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla - \mathbf{A} \right) \psi(\mathbf{r}) \Big|_\Gamma = 0$$

для выбранной параметризации имеет вид

$$\mathbf{n} \left( -\frac{i}{\kappa} \nabla f + f \mathbf{p} \right) \Big|_\Gamma = 0. \quad (17)$$

Система уравнений (10)–(15) с граничными условиями (16)–(17) решалась численно методом конечных элементов с помощью программы FlexPDE. В качестве начального приближения в методе конечных элементов использовались значения  $f = 1$ ,  $G = 0$ , отвечающие одномерному кольцу [3]. Аналогично тому, как это было сделано в [4] для симметричных колец, вместо радиусов внешней и внутренней окружностей, ограничивающих кольцо, удобно пользоваться средним радиусом  $R = \frac{R_{int} + R_{ext}}{2}$ , где  $R_{int}$ ,  $R_{ext}$  — радиусы внутренней и внешней окружностей, ограничивающих кольцо, и расстоянием  $\Delta$  между центрами окружностей (рис. 1). Тогда

$$R_{int} = R - \frac{\Delta}{2}, \quad R_{ext} = R + \frac{\Delta}{2}, \quad (18)$$

Квантовое число  $n$  определяется минимумом свободной энергии, которая дается следующим калибровочно-инвариантным выражением

$$F = \int_V \left[ -f^2 + \frac{f^4}{2} + \frac{1}{\kappa^2} (\nabla f)^2 + f^2 \left( \frac{1}{\kappa} \nabla \theta - \mathbf{A} \right)^2 + (\text{rot } \mathbf{A})^2 \right] dV. \quad (19)$$

Результаты расчета квадрата параметра порядка для асимметричных колец представлены на рис. 2 и 3, из которых следует, что

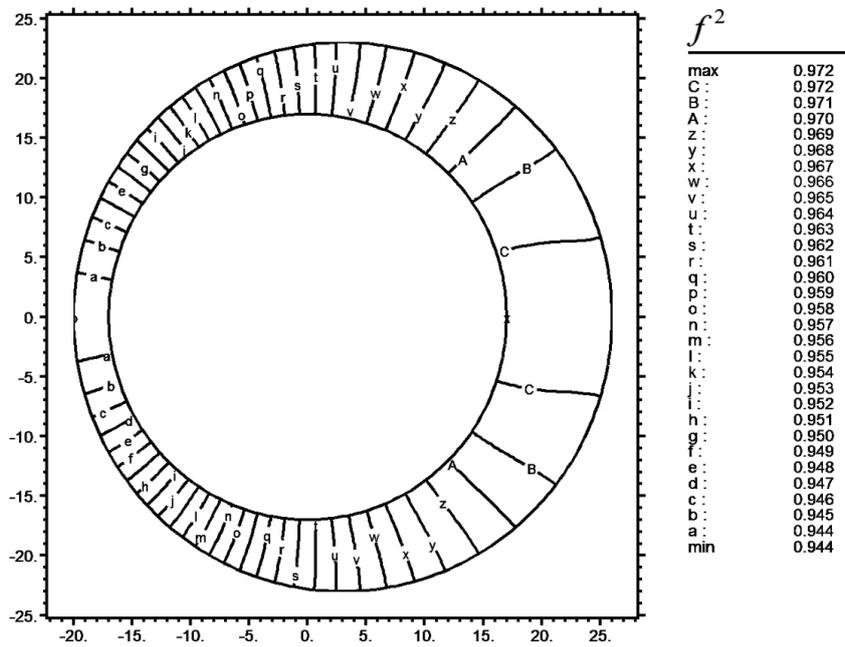


Рис. 2. Квадрат амплитуды параметра порядка (представлен изолиниями) для сверхпроводящего кольца с  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,02$ ,  $n = 0$

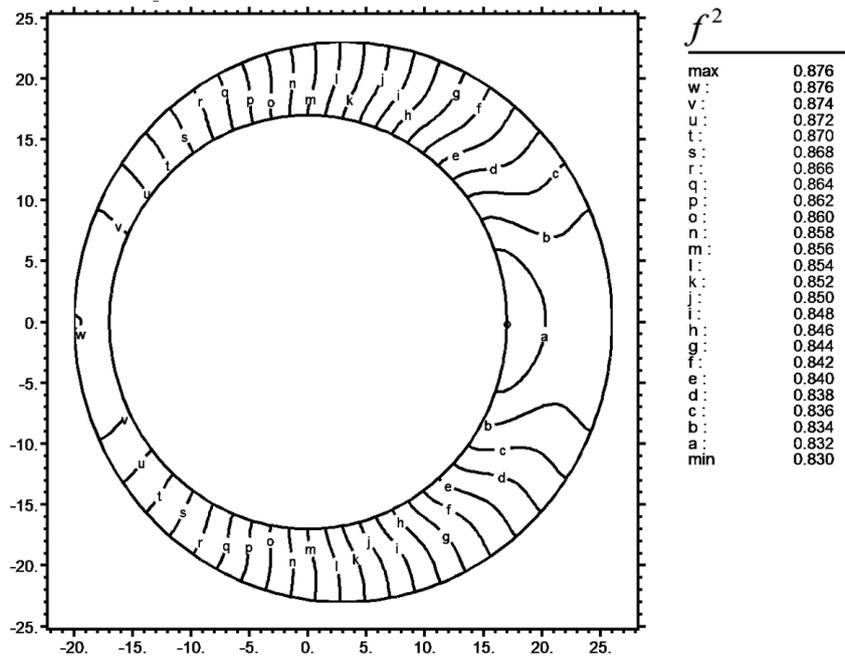


Рис. 3. Квадрат амплитуды параметра порядка (представлен изолиниями) для сверхпроводящего кольца с  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,18$ ,  $n = 1$

квадрат амплитуды параметра порядка так же, как и в широком симметричном кольце [4], является практически постоянным.

Рис. 2, 3 также иллюстрируют влияние асимметрии кольца на радиальную и угловую зависимость параметра порядка. Последняя обуславливает разную величину параметра порядка в широкой и узкой частях кольца, однако не всегда максимальное значение достигается в узкой части кольца, как на рис. 3, отвечающем значению напряженности внешнего поля  $H = 0,18$ . Для напряженности внешнего поля  $H = 0,02$  при той же геометрии кольца максимальное значение параметра порядка достигается в широкой части кольца.

Численные расчеты подтверждают тот факт, что фаза волновой функции параметра порядка в асимметричном кольце действительно имеет зависящую от координат добавку по сравнению с зависимостью  $\theta = n\phi$ , имеющей место для симметричного кольца. Наиболее характерной оказывается следующая особенность фазы параметра порядка: производная по нормали к границе всегда равна нулю, то есть изолинии  $\theta = \text{const}$  всегда направлены ортогонально к границе, а градиент, наоборот, всегда имеет только касательную к границе компоненту. Сказанное иллюстрируется рис. 4, на котором показана фаза параметра порядка в виде изолиний для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,18$ ,  $n = 1$

Другой особенностью, хорошо заметной на иллюстрации, является зависимость производной  $\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}$  от ширины кольца, которая обуславливает большее значение локальной плотности тока в узкой части кольца.

На иллюстрации ниже представлен вектор-потенциал  $\mathbf{A}'$  с учётом калибровки. Хорошо видно, что это векторное поле имеет вихревой характер. Кроме того, видно, что выполняются граничные условия из (4), а именно вектор-потенциал обладает только касательной к границе компонентой, нормальная компонента равна нулю. Кроме того, в отличие от симметричного кольца [4], величина и направление вектор-потенциала обладает как радиальной, так и угловой зависимостью. Эта величина принимает большие значения в узкой части кольца, и меньшие — в широкой при любых значениях магнитного поля. Кроме того, величина вектор-потенциала растёт от внутренней границы кольца к внешней. Общее направление вращения (по или против часовой стрелки) за-

висит только от направления внешнего магнитного поля. Типичная картина распределения вектор-потенциала в кольце показана на рис. 5.

Перейдём к рассмотрению плотности сверхпроводящего тока. В случае широкого симметричного сверхпроводящего кольца существовало два типа решений: содержащие один вихрь, и содержащие два вихря. В токовых состояниях, содержащих один вихрь, ток течёт в одном направлении как у внешней так и у внутренней границы кольца. В состояниях, содержащих два вихря, вблизи внешней границы кольца ток течёт в одном направлении, а вблизи внутренней границы — в противоположном. В этих состояниях в пределах кольца существует контур нулевого тока, представляющий собой окружность, концентрическую с окружностями, ограничивающими симметричное кольцо. Плотность сверхпроводящего тока на этом контуре равна нулю. Для асимметричного кольца также существуют токовые состояния, содержащие контур нулевого тока, который приближенно является окружностью, центр которой, однако, лежит между центрами окружностей, ограничивающих кольцо, поэтому наряду с токовыми состояниями, для которых этот контур нулевого тока целиком лежит в области кольца, существуют токовые состояния, для которых контур частично выходит за пределы кольца. Такое промежуточное состояние характеризуется наличием в кольце двух областей. В одной из областей имеет место сформировавшийся токовый вихрь, распределение токов во второй области можно охарактеризовать как вихрь в стадии формирования. Таким образом, токовые состояния в асимметричном кольце можно разделить на состояния с одним вихрем, с двумя вихрями, и состояния, содержащие «полтора» вихря.

Численные расчеты показывают что, несмотря на кажущуюся парадоксальность распределения токов в асимметричном сверхпроводящем кольце в последнем случае, закон сохранения тока выполняется: суммарный ток через любое сечение остаётся постоянным во всех трех случаях, то есть выполняется условие неразрывности, являющееся следствием уравнений (11)-(15).

Для доказательства этого факта вычислим дивергенцию плотности сверхпроводящего тока  $\mathbf{j} = f^2\mathbf{p}$

$$\text{div } \mathbf{j} = \nabla (f^2\mathbf{p}) = 2f\nabla f\mathbf{p} + f^2\nabla (\kappa^{-1}\nabla\theta - \mathbf{A}').$$

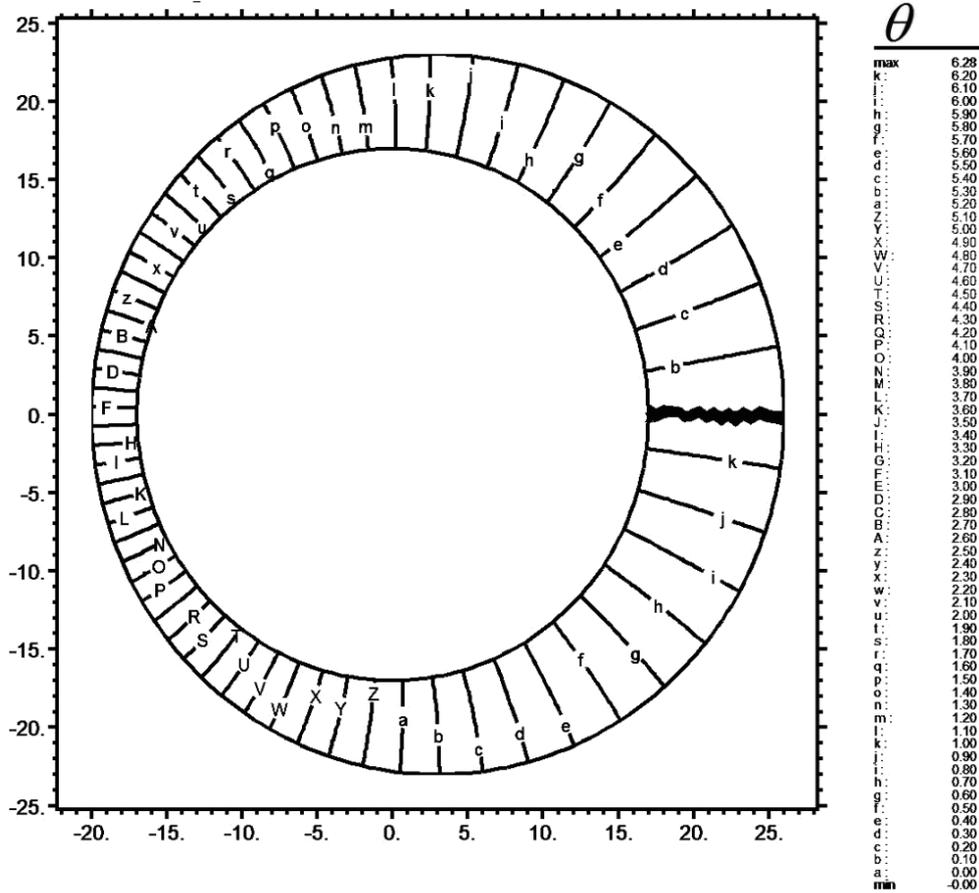


Рис. 4. Фаза параметра порядка (в виде изолиний) для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,18$ ,  $n = 1$

Вследствие (14) калибровочное преобразование (12) не изменяет поперечный характер вектор-потенциала, согласно которому  $\nabla \mathbf{A}' = 0$ . Далее, согласно (11)

$$\kappa^{-1} f \nabla^2 \theta = -2\mathbf{p} \nabla f,$$

откуда следует закон сохранения тока  $\text{div} \mathbf{j} = 0$ . На рис. 6 показано токовое состояние кольца, содержащее один вихрь, на рис. 7 — содержащее два вихря. Распределение токов в промежуточном состоянии показано на рис. 8.

Выше рассмотрены токовые состояния асимметричного сверхпроводящего кольца, отвечающие фиксированным значениям квантового числа  $n$  и напряженности внешнего магнитного поля  $H$ . Представляет интерес рассмотрение токовых состояний кольца в зависимости от внешнего магнитного поля. Как отмечено в [4], при изменении  $H$  изменяется квантовое число  $n$ , принимая такое значение, при котором функционал свободной энергии (19) достигает минимума. Для

описания токового состояния вводятся такие интегральные характеристики, как среднее значение амплитуды параметра порядка, свободная энергия, среднее значение величины тока (с учётом направления)

$$\overline{f^2} = \frac{1}{S} \int_S f^2 dS, \quad \overline{j_\phi} = \frac{1}{S} \int_S j_\phi dS, \quad (20)$$

интегрирование выполняется по площади кольца  $S$ .

Полученные зависимости для асимметричных колец близки к решениям для симметричного кольца, асимметрия не вносит значительных изменений. На рис. 9 представлена зависимость среднего значения амплитуды параметра порядка для колец с асимметрией  $\Delta = 1$  и  $\Delta = 2$ .

Зависимости среднего значения тока и свободной энергии от внешнего магнитного поля незначительно отличаются для колец с разной степенью асимметрии и в данной работе не приводятся.

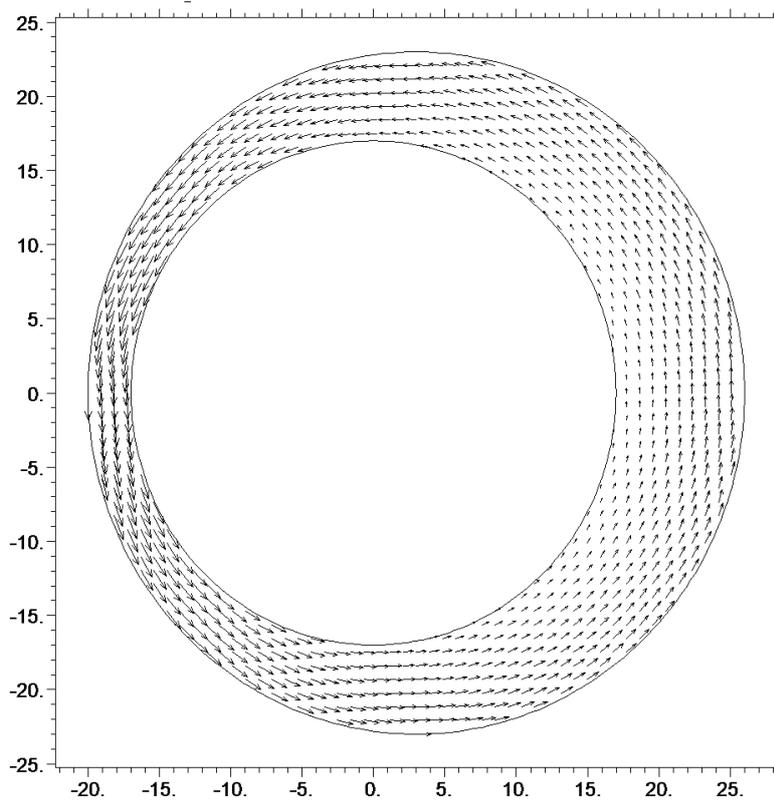


Рис. 5. Вектор-потенциал для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,18$ ,  $n = 1$

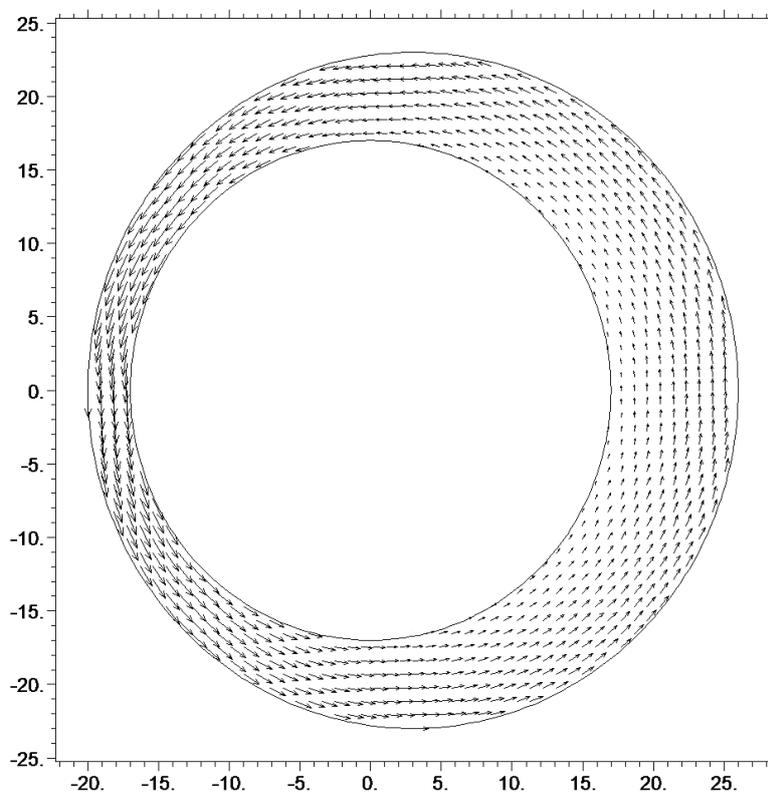


Рис. 6. Плотность сверхпроводящего тока для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,02$ ,  $n = 0$  (решение, содержащее один вихрь)

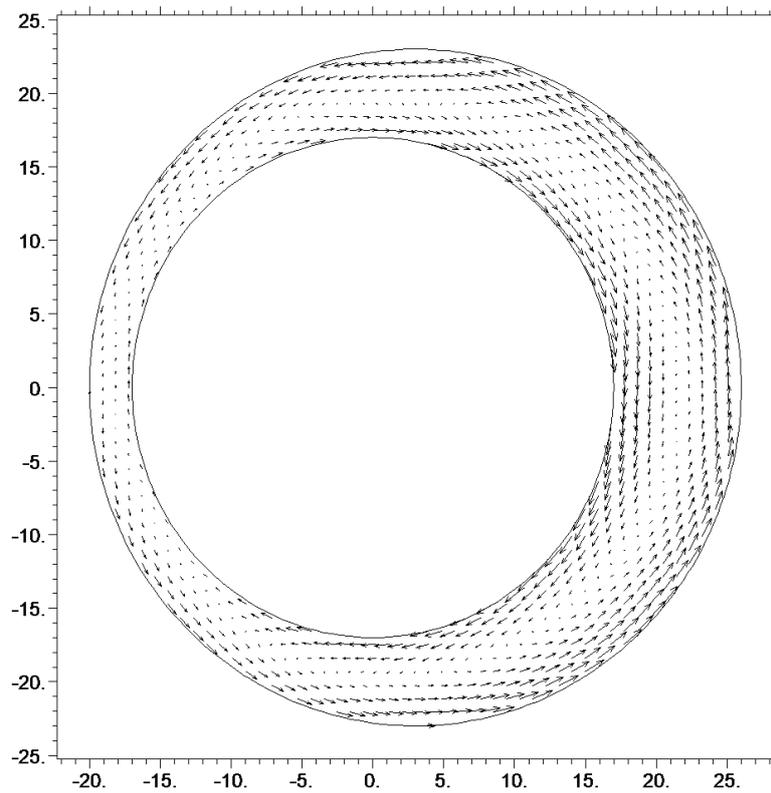


Рис. 7. Плотность сверхпроводящего тока для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,02$ ,  $n = 1$  (решение, содержащее два вихря)

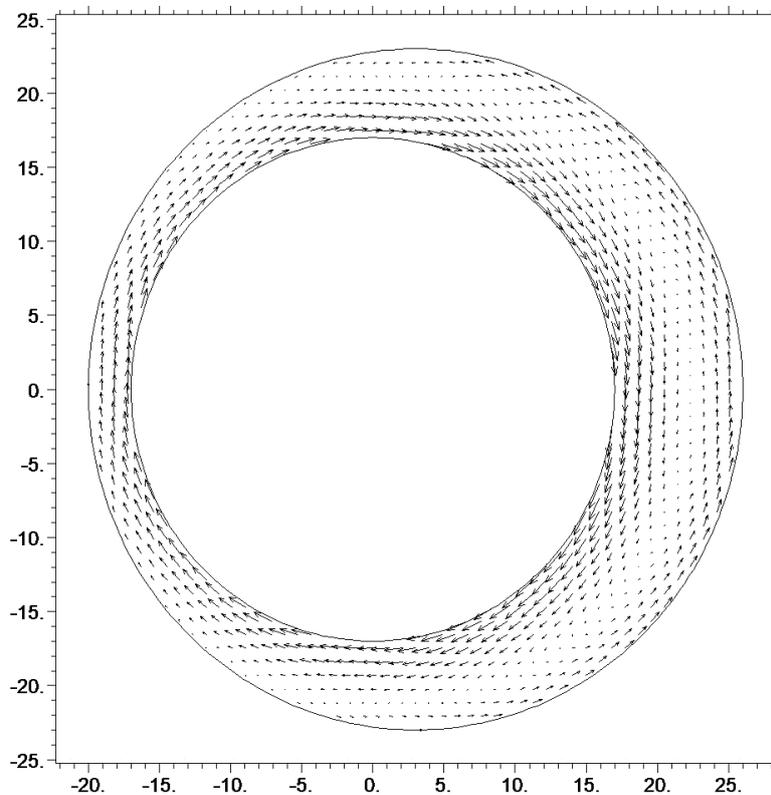


Рис. 8. Плотность сверхпроводящего тока для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\Delta = 3$ ,  $\kappa = 0,026$ ,  $H = 0,165$ ,  $n = 1$  (промежуточное решение)

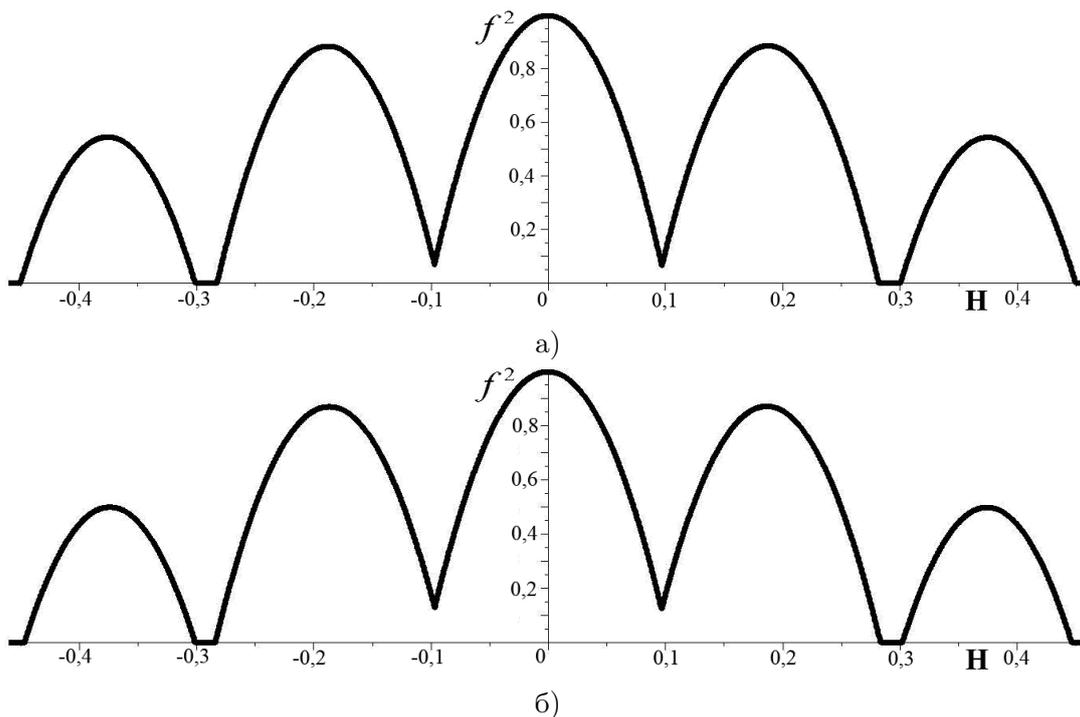


Рис. 9. Среднее значение амплитуды параметра порядка в зависимости от внешнего магнитного поля для кольца с параметрами  $R = 20$ ,  $w = 6$ ,  $\kappa = 0,026$  и а)  $\Delta = 1$ ; б)  $\Delta = 2$

В заключение сформулируем основные результаты работы.

1. В асимметричных сверхпроводящих кольцах возможны решения, в которых ток в узком сегменте кольца течёт строго в одном направлении, а в широком – течёт в разных направлениях вблизи внешней и внутренней границы. Таких решений не существует в симметричных кольцах.

2. Амплитуда параметра порядка может быть наибольшей как в узкой так и в широкой части кольца.

3. Средние интегральные характеристики (среднее значение амплитуды параметра порядка, среднее значение плотности тока, свободная энергия) незначительно зависят от асимметрии кольца.

### Литература

1. Гуртовой В.Л., Дубонос С.В., Никулов А.В., Осипов Н.Н., Тулин В.А. Зависимость величины и направления устойчивого тока от величины магнитного потока в сверхпроводящих кольцах // Журнал экспериментальной и теоретической физики. 2007. Т. 132. С. 1320–1339.
2. Гринштейн Дж., Зайонц А. Квантовый вызов. Современные исследования оснований квантовой механики. М.: ИД «Интеллект», 2008. 400 с.

3. Третьяк Д.Н., Тумаев Е.Н. Неоднозначность токового состояния одномерного сверхпроводящего кольца // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. №1. С. 60–67.
4. Третьяк Д.Н., Тумаев Е.Н. Численное исследование спектра устойчивых состояний сверхпроводящего мезоскопического кольца конечной ширины во внешнем магнитном поле // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. №4. Т. 3. С. 138–144.
5. Vodolazov D.Y., Baelus B.J., Peeters F.M. Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings // Phys. Rev. B 2002. Vol. 66 (5). P. 054531–054536.
6. Baelus B.J., Peeters F.M., Schweigert V.A. Vortex states in superconducting rings // Phys. Rev. B 2000. Vol. 61 (15). P. 9734–9747.
7. Абрикосов А.А. Основы теории металлов. М.: Физматлит, 2010. 600 с.
8. Вайнберг С. Квантовая теория поля. Т. 2. М.: Физматлит, 2003. 528 с.

### References

1. Gurtovoj V.L., Dubonos S.V., Nikulov A.V., Osipov N.N., Tulin V.A. Zavisimost' velichiny i napravleniya ustojchivogo toka ot velichiny magnitnogo potoka v sverhprovodjashhikh kol'cah [The dependence of the magnitude and direction of sustainable current on the magnetic flux in superconducting rings]. Zhurnal

- jeksperimental'noj i teoreticheskoj fiziki* [Journal of experimental and theoretical physics], 2007, vol. 132, pp. 1320–1339. (In Russian)
2. Grinshtejn Dzh., Zajonc A. *Kvantovyy vyzov. Sovremennye issledovaniya osnovanij kvantovoj mehaniki* [Quantum call. Modern study the foundations of quantum mechanics]. Moscow, Intellect Publ., 2008, 400 p. (In Russian)
  3. Tretjak D.N., Tumaev E.N. Neodnoznachnost' tokovogo sostojanija odnomernogo sverhprovodjashhego kol'ca [The ambiguity of a current state of a one-dimensional superconducting rings]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 1, pp. 60–67. (In Russian)
  4. Tretjak D.N., Tumaev E.N. Chislennoe issledovanie spektra ustojchivyh sostojanij sverhprovodjashhego mezoskopicheskogo kol'ca konechnoj shiriny vo vneshnem magnitnom pole [Numerical study of the spectrum of stable States mesoscopic superconducting rings of finite width in an external magnetic field]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 4, vol. 3, pp. 138–144. (In Russian)
  5. Vodolazov D.Y., Baelus B.J., Peeters F.M. Stationary-phase slip state in quasi-one-dimensional rings. *Phys. Rev. B*, 2002, vol. 66, no. 5, pp. 054531–054536.
  6. Baelus B.J., Peeters F.M., Schweigert V.A. Vortex states in superconducting rings. *Phys. Rev. B*, 2000, vol. 61, no. 15, pp. 9734–9747.
  7. Abrikosov A.A. *Osnovy teorii metallov* [Fundamentals of the theory of metals]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2010, 600 p. (In Russian)
  8. Vajnberg S. *Kvantovaja teorija polja. T. 2* [Quantum field theory. Vol. 2]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2003, 528 p. (In Russian)

---

Статья поступила 18 февраля 2014 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Третяк Д. Н., Тумаев Е. Н., 2014