

УДК 539.374

КОЭФФИЦИЕНТ ИНТЕНСИВНОСТИ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ОБЖАТИИ ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ЖЕСТКОЙ ОПРАВКЕ

Калёнова Н. В., Новожилова О. В., Садырин Е. В., Айзикович С. М.

STRAIN RATE INTENSITY FACTOR IN COMPRESSION OF A PLASTIC LAYER ON A
RIGID MANDREL

Kalenova N. V. *, Novozhilova O. V. **, Sadyrin E. V. ***, Aizikovich S. M. ***

* Moscow State Aviation Technological University, Moscow, 121552, Russia

** Moscow State Technical University, Moscow, 105005, Russia

*** Don State Technical University, Rostov-on-Don, 344010, Russia
e-mail: evgeniy.sadyrin@gmail.com

Abstract. Some components of the strain rate tensor and consequently the quadratic invariant of the strain rate tensor approach infinity in the vicinity of maximum friction surfaces in solutions for several rigid plastic material models. The coefficient of the leading singular term in a series expansion of the quadratic invariant of the strain tensor in the vicinity of maximum friction surfaces is named the strain rate intensity factor. This coefficient enters several evolution equations that describe the change in material properties in a narrow layer in the vicinity of surfaces with high friction stresses. Therefore, solutions that allow one to determine the effect of process parameters on the magnitude of the strain rate intensity factor are of interest. In the present paper, an analytic relationship between the strain rate intensity factor and parameters of the process consisting of contraction of a plastic layer on a rigid rod is found. It is assumed that the maximum friction law acts over the contact surface between the plastic layer and the rod. The material of the plastic layer rigid perfectly plastic and obeys the von Mises yield criterion and its associated flow rule.

Keywords: surface of maximum friction, strain rate intensity factor, ideal rigid-plastic body, analytical solution

Введение

Коэффициент интенсивности скорости деформации был введен в [1] как коэффициент при главном сингулярном члене в разложении в ряд эквивалентной скорости деформации (квадратичный инвариант тензора скорости деформации) в окрестности поверхности максимального трения. В этой работе принималась модель идеально жесткопластического материала, основанная на произвольном условии текучести, не завися-

щем от среднего напряжения, и ассоциированном законе пластического течения. Поверхность максимального трения при использовании такой модели материала определяется тем условием, что при проскальзывании удельные силы трения равны пределу текучести при чистом сдвиге. В [2–4] показано, что коэффициент интенсивности скорости деформации можно ввести и для других жесткопластических моделей.

Практическое значение коэффициента интенсивности скорости деформации состо-

Калёнова Наталья Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики МАТИ — Российского государственного технологического университет им. К. Э. Циолковского; e-mail: regepljuika@bk.ru.

Новожилова Ольга Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Московского государственного технического университета им. Н. Э. Баумана; e-mail: helgam@bk.ru.

Садырин Евгений Валерьевич, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики, мл. науч. сотрудник лаборатории функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета; e-mail: evgeniy.sadyrin@gmail.com.

Айзикович Сергей Михайлович, д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов НОЦ «Материалы» Донского государственного технического университета; e-mail: saizikovich@gmail.com.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (13-01-93000-Вьет_а, 14-08-92003 ННС_а, 14-07-00343-а).

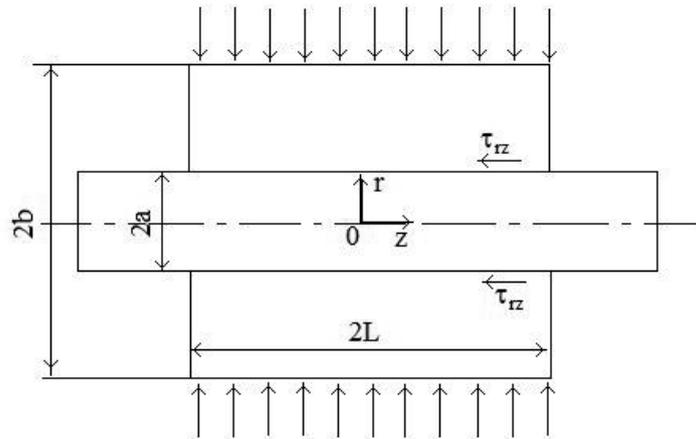


Схема процесса

ит в том, что в процессах обработки металлов давлением вблизи поверхностей трения часто образуется тонкий слой интенсивной пластической деформации [5–7]. При этом свойства материала в этом слое значительно отличаются от свойств в основном объеме. Такое распределение свойств материала качественно согласуется с полем скорости деформации, контролируемым в окрестности поверхности трения коэффициентом интенсивности скорости деформации. В связи с этим предложены теоретические подходы для описания отмеченного распределения свойств на основе коэффициента интенсивности скорости деформации [7,8]. Известные решения для коэффициента интенсивности скорости деформации получены при плоскодеформированном состоянии или при применении условия Треска в осесимметричных задачах. Обзор таких решений приведен в [9]. В публикуемой работе принимается условие текучести Мизеса. Рассмотренная краевая задача является обобщением на осесимметричную деформацию известной задачи Прандтля о сжатии полосы пластического материала между параллельными плитами [10]. Решение для условия текучести Треска построено в [11].

1. Постановка задачи

Рассмотрим обжатие равномерным давлением осесимметричного слоя материала на жесткой оправке. Давление приложено к внешней поверхности слоя. Геометрическая схема процесса показана на рисунке. Длина слоя равна $2L$. Радиус оправки и внутренний

радиус слоя равны a , а внешний радиус слоя — b . Введем цилиндрическую систему координат $r\theta z$, ось z которой совпадает с осью симметрии слоя и оправки, а плоскость $z = 0$ — с плоскостью симметрии краевой задачи. В такой системе координат достаточно получить решение в области $0 \leq z \leq L$. Внешний радиус слоя определяется уравнением $r = b$, его внутренний радиус и радиус оправки — уравнением $r = a$.

Определяющие уравнения состоят из условия текучести Мизеса

$$\sigma_{eq} = \sigma_0 \quad (1.1)$$

и ассоциированного закона течения

$$\xi_{ij} = \lambda \tau_{ij}, \quad \lambda \geq 0, \quad (1.2)$$

где $\sigma_0 = \text{const}$ — предел текучести при одноосном растяжении, σ_{eq} — эквивалентное напряжение, τ_{ij} — девиаторные компоненты тензора напряжения, ξ_{ij} — компоненты тензора скорости деформации. Эквивалентное напряжение и эквивалентная скорость деформации ξ_{eq} определяются как

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{3}{2} \tau_{ij} \tau_{ij}}, \\ \xi_{eq} &= \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{ij} \xi_{ij}}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Из (1.2) следует уравнение несжимаемости. Уравнения (1.1) и (1.2) должны быть дополнены уравнениями равновесия. В случае осевой симметрии эти уравнения имеют следу-

ющий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где σ — среднее напряжение. В цилиндрической системе при осесимметричной деформации условие текучести (1.2) принимает форму

$$3(\tau_{rr}^2 + \tau_{zz}^2 + \tau_{rr}\tau_{zz} + \tau_{rz}^2) = \sigma_0^2. \quad (1.5)$$

Точные краевые условия для напряжений имеют вид

$$\tau_{rz} = 0 \quad (1.6)$$

при $r = b$ и

$$\tau_{rz} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (1.7)$$

при $r = a$. Условие (1.7) выражает закон максимального трения. Точные статические краевые условия на концах слоя замещаются приближенным условием в форме

$$\int_a^b \sigma_{zz} r dr = 0 \quad (1.8)$$

при $z = L$. Здесь σ_{zz} — осевое напряжение, которое равно $\sigma_{zz} = \sigma + \tau_{zz}$.

Точные кинематические условия имеют вид

$$u_r = 0 \quad (1.9)$$

при $r = a$ и

$$u_r = -U \quad (1.10)$$

при $r = b$. Здесь u_r — радиальная скорость. Точные кинематические краевые условия на концах слоя замещаются приближенным условием в форме

$$\int_a^b u_z r dr = 0 \quad (1.11)$$

при $z = 0$. Здесь u_z — радиальная скорость.

2. Решение

Используя полуобратный метод, предположим, что распределение радиальной скорости дается соотношением

$$u_r = -Ug(\rho), \quad (2.1)$$

где $\rho = r/a$, а $g(\rho)$ — произвольная функция ρ . Используя (2.1), радиальная и окружная скорости деформации определяются соотношениями $\xi_{rr} = \partial u_r / \partial r$ и $\xi_{\theta\theta} = u_r / r$. Тогда, подставляя эти скорости деформации в уравнение несжимаемости $\xi_{rr} + \xi_{\theta\theta} + \xi_{zz} = 0$, находится осевая скорость деформации. Из (2.1) и уравнения несжимаемости очевидно, что ξ_{zz} не зависит от осевой координаты. Поэтому осевая скорость получается в виде

$$u_z = U \left(g'(\rho) + \frac{g}{\rho} \right) \zeta + Uf(\rho), \quad (2.2)$$

где $\zeta = z/a$, а $f(\rho)$ — произвольная функция ρ . С использованием (2.1) и (2.2) сдвиговая скорость деформации в цилиндрической системе координат представляется в форме

$$\begin{aligned} 2\xi_{rz} = \frac{U}{a} \left(g''(\rho) + \frac{1}{\rho}g'(\rho) - \frac{g}{\rho^2} \right) \zeta + \\ + \frac{U}{a} f'(\rho). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Предположим, что девиаторные компоненты тензора напряжения не зависят от z . Тогда из (1.2) и (2.1) следует, что сдвиговая скорость деформации не зависит от z . Из (2.3) находим, что это возможно только при

$$g = C\rho + \frac{C_1}{\rho}, \quad (2.4)$$

$$C = \text{const}, \quad C_1 = \text{const}.$$

С помощью (1.3), (2.1)–(2.4) эквивалентная скорость деформации и компоненты тензора скорости деформации представляются в форме

$$\begin{aligned} \xi_{rr} = -\frac{U}{a}(C - \varphi), \quad \xi_{\theta\theta} = -\frac{U}{a}(C + \varphi), \\ \xi_{zz} = \frac{2UC}{a}, \quad \xi_{rz} = \frac{U}{2a}f'(\rho), \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\xi_{eq} = \frac{2U}{\sqrt{3}a} \sqrt{3C^2 + \varphi^2 + \frac{1}{4}(f'(\rho))^2},$$

где $\frac{C_1}{\rho^2} = \varphi$.

Уравнение (1.5) удовлетворяется подстановкой

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{rz}}{\sigma_0} &= \frac{\cos \omega}{\sqrt{3}}, \\ \frac{\tau_{rr}}{\sigma_0} &= -\frac{2}{3} \sin \omega \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{3} \right), \\ \frac{\tau_{zz}}{\sigma_0} &= \frac{2}{3} \sin \omega \cos \left(\gamma + \frac{\pi}{6} \right), \\ \frac{\tau_{\theta\theta}}{\sigma_0} &= \frac{2}{3} \sin \omega \sin \gamma. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Так как девиаторные компоненты тензора напряжения не зависят от осевой координаты, то уравнения равновесия (1.4) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho} + \frac{d\tau_{rr}}{d\rho} + \frac{\tau_{rr} - \tau_{\theta\theta}}{\rho} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial \zeta} + \frac{d\tau_{rz}}{d\rho} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставляя (2.6) в первое уравнение системы (2.7), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\sigma_0 \partial \rho} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{d\rho} \left[\sin \omega \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{3} \right) \right] - \\ - \frac{\sin \omega (\sqrt{3} \sin \gamma + \cos \gamma)}{\sqrt{3} \rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Из первого уравнения системы (2.7) следует, что $\frac{\partial^2 \sigma}{\partial \rho \partial \zeta} = 0$. Тогда, из второго уравнения этой системы получим

$$\begin{aligned} \frac{d\tau_{rz}}{d\rho} + \frac{\tau_{rz}}{\rho} &= 2\sigma_0 A, \\ A &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{rz}}{\sigma_0} &= A\rho + \frac{C_2}{\rho}, \\ C_2 &= \text{const}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляя (2.9) во второе уравнение системы (2.7) и интегрируя, получим

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = -2A\zeta + \beta(\rho), \quad (2.11)$$

где $\beta(\rho)$ — произвольная функция ρ . Исключая σ в (2.8) с помощью (2.11) приходим к

уравнению для определения β

$$\begin{aligned} \frac{d\beta}{d\rho} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{d}{d\rho} \left[\sin \omega \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{3} \right) \right] - \\ - \frac{\sin \omega (\sqrt{3} \sin \gamma + \cos \gamma)}{\sqrt{3} \rho} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Из (1.2) и (2.6) следует

$$\begin{aligned} \frac{\tau_{\theta\theta}}{\tau_{rz}} &= \frac{\xi_{\theta\theta}}{\xi_{rz}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \gamma \operatorname{tg} \omega, \\ \frac{\tau_{rr} - \tau_{zz}}{\tau_{rz}} &= \frac{\xi_{rr} - \xi_{zz}}{\xi_{rz}} = -2 \operatorname{tg} \omega \cos \gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.5) и (2.10) в (2.13), найдем

$$\begin{aligned} -\sqrt{3} \left(C + \frac{C_1}{\rho^2} \right) &= \sin \gamma \operatorname{tg} \omega \frac{df}{d\rho}, \\ 3C - \frac{C_1}{\rho^2} &= \operatorname{tg} \omega \cos \gamma \frac{df}{d\rho}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Отсюда зависимость γ от ρ определяется как

$$\operatorname{tg} \gamma = -\sqrt{3} \frac{(C\rho^2 + C_1)}{(3C\rho^2 - C_1)}. \quad (2.15)$$

Исключая τ_{rz} в (2.6) с помощью (2.10), найдем зависимость ω от ρ в форме

$$\cos \omega = \sqrt{3} \left(A\rho + \frac{C_2}{\rho} \right). \quad (2.16)$$

Функция $f(\rho)$ определяется из (2.14) в виде

$$f = \int_1^\rho \left(3C - \frac{C_1}{\chi^2} \right) \frac{\operatorname{ctg} \omega}{\cos \gamma} d\chi + f_0 \quad (2.17)$$

где γ и ω — известные функции χ вследствие (2.15) и (2.16); f_0 — постоянная интегрирования. Уравнение (2.12) теперь может быть проинтегрировано

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \omega \sin \left(\gamma + \frac{\pi}{3} \right) + \\ + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_1^\rho \frac{\sin \omega \sin \left(\gamma + \pi/6 \right)}{\chi} d\chi &+ A\beta_0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь β_0 — постоянная интегрирования, а ω и γ , как функции χ и ρ , должны быть выражены с помощью (2.15) и (2.16).

Вычислив f , ω и γ как функции ρ , можно найти зависимость компонент тензора скорости деформации и девиаторных компонент

тензора напряжения от радиуса в соответствии с (2.5) и (2.6). Компоненты вектора скорости определяются с использованием (2.1), (2.2), (2.4) и (2.17). Среднее напряжение находится из (2.11) и (2.18).

Из (1.9), (1.10), (2.1) и (2.4) следует, что

$$C = -C_1 = \frac{ab}{b^2 - a^2}. \quad (2.19)$$

Тогда уравнение (2.15) преобразуется к виду

$$\operatorname{tg} \gamma = \sqrt{3} \frac{(1 - \rho^2)}{(1 + 3\rho^2)}. \quad (2.20)$$

Используя (2.6), краевые условия (1.6) и (1.7) можно представить в виде $\omega = \pi/2$ при $\rho = b/a$ и $\omega = 0$ при $\rho = 1$. Из этих условий и (2.16) следует

$$A = -\frac{a^2}{\sqrt{3}(b^2 - a^2)}, \quad (2.21)$$

$$C_2 = \frac{b^2}{\sqrt{3}(b^2 - a^2)}.$$

Постоянные f_0 и β_0 , входящие в (2.17) и (2.18), могут быть определены из условий (1.8) и (1.11). Однако эти постоянные не оказывают влияния на коэффициент интенсивности скорости деформации, поэтому соответствующие выражения не выписываются в явной форме.

3. Коэффициент интенсивности скорости деформации

Коэффициент интенсивности скорости деформации определяется следующим образом [1]

$$\xi_{eq} = \frac{D}{\sqrt{s}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{s}}\right) \quad (3.1)$$

при $s \rightarrow 0$. Здесь o — символ порядка, D — коэффициент интенсивности скорости деформации, s — расстояние по нормали до поверхности максимального трения. Из (2.5) видно, что $\xi_{eq} \rightarrow \infty$ только при условии $|df/d\rho| \rightarrow \infty$. В рассматриваемом случае $s = r - a = a(\rho - 1)$. Используя (2.5) и (3.1), найдем

$$D = \frac{U}{\sqrt{3}a} \lim_{\rho \rightarrow 1} \left(\left| \frac{df}{d\rho} \right| \sqrt{\rho - 1} \right). \quad (3.2)$$

Из (2.14) и (2.19) получим

$$\frac{df}{d\rho} = \frac{ab}{(b^2 - a^2)} \frac{(3\rho^2 + 1)}{\rho^2 \cos \gamma \operatorname{tg} \omega}. \quad (3.3)$$

Из (2.20) следует, что $|\cos \gamma| = 1$ при $\rho = 1$. Таким образом, в окрестности поверхности $\rho = 1$ уравнение (3.3) преобразуется к виду

$$\left| \frac{df}{d\rho} \right| = \frac{4ab}{(b^2 - a^2)} |\operatorname{ctg} \omega|. \quad (3.4)$$

Подставляя (2.21) в (2.11), найдем

$$\cos \omega = \frac{1}{(b^2 - a^2)} \left(-a^2 \rho + \frac{b^2}{\rho} \right). \quad (3.5)$$

Раскладывая правую часть (3.5) в ряд в окрестности поверхности $\rho = 1$, получим

$$\cos \omega = 1 - \frac{(a^2 + b^2)}{(b^2 - a^2)} (\rho - 1) + o(\rho - 1) \quad (3.6)$$

при $\rho \rightarrow 1$. Тогда

$$|\sin \omega| = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} =$$

$$= \sqrt{2} \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2 - a^2}} \sqrt{\rho - 1} + o(\sqrt{\rho - 1}) \quad (3.7)$$

при $\rho \rightarrow 1$. Подставляя (3.4), (3.6) и (3.7) в (3.2), найдем коэффициент интенсивности скорости деформации в форме

$$D = \frac{2\sqrt{2}Ub\sqrt{a}}{\sqrt{3}\sqrt{b^4 - a^4}}. \quad (3.8)$$

Удобно ввести безразмерный коэффициент интенсивности скорости деформации d как

$$d = \frac{D\sqrt{b}}{U} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{a}{b}} \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^4 \right]^{-1/2}. \quad (3.9)$$

Заключение

Получено новое аналитическое выражение для коэффициента интенсивности скорости деформации, позволяющее установить зависимость безразмерного коэффициента интенсивности скорости деформации от отношения a/b . В частности, из (2.20) очевидно, что d — монотонно возрастающая функция a/b . Таким образом, в соответствии с теорией [8] более интенсивные изменения структуры материала вблизи поверхности трения будут происходить в трубе с меньшими значениями a/b . Отметим, что для анализа сложного распределения свойств в тонком поверхностном слое развиты эффективные методы [12–15]. Эти методы совместно с экспериментальными результатами могут быть использованы для проверки теорий, основанных на использовании коэффициента интенсивности скорости деформации.

Литература

1. *Alexandrov S., Richmond O.* Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2001. Vol. 36. No. 1. P. 1–11.
2. *Александров С.Е., Лямина Е.А.* Сингулярные решения при плоском пластическом течении материалов, чувствительных к среднему напряжению // *Доклады Академии наук*. 2002. Т. 383. № 4. С. 492–495.
3. *Александров С.Е., Лямина Е.А.* О возможности введения коэффициента интенсивности скорости деформации в вязкопластичности // В сб. «Актуальные проблемы механики: механика деформируемого твердого тела». М.: Наука, 2009. С. 313–326.
4. *Alexandrov S, Jeng Y.-R.* Singular rigid/plastic solutions in anisotropic plasticity under plane strain conditions // *Continuum Mechanics and Thermodynamics*. 2013. Vol. 25. No. 5. P. 685–689.
5. *Moylan S.P., Kompella S., Chandrasekar S., Farris T.N.* A new approach for studying mechanical properties of thin surface layers affected by manufacturing processes // *Journal of Manufacturing Science and Engineering - ASME*. 2003. Vol. 125. No. 2. P. 310–315.
6. *Трунина Т.А., Коковихин Е.А.* Формирование мелкодисперсной структуры в поверхностных слоях стали при комбинированной обработке с применением гидропрессования // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2008. № 2. С. 71–74.
7. *Александров С.Е., Грабко Д.З., Шижимака О.А.* К определению толщины слоя интенсивных деформаций в окрестности поверхности трения в процессах обработки металлов давлением // *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2009. № 3. С. 72–78.
8. *Александров С.Е., Лямина Е.А.* К построению теории пластического разрушения в окрестности поверхностей трения // *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52. № 4. С. 183–190.
9. *Alexandrov S.* The strain rate intensity factor and its applications: a review // *Materials Science Forum*. 2009. Vol. 623. P. 1–20.
10. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: Гостехиздат, 1956. 407 с.
11. *Spencer A.J.M.* A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres // *International Journal of Mechanical Sciences*. 1965. Vol. 7. P. 197–209.
12. *Volkov S., Aizikovich S., Wang Y.-S., Fedotov I.* Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer // *Acta Mechanica Sinica*. 2013. Vol. 29. No. 2. P. 196–201.
13. *Айзикович С.М., Васильев А.С.* Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства // *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77. № 1. С. 129–137.
14. *Васильев А.С., Садырин Е.В., Федотов И.А.* Контактная задача о кручении круглым штампом трансверсально-изотропного упругого полупространства с неоднородным трансверсально-изотропным // *Вестник ДГТУ*. 2013. № 1–2. С. 25–34.
15. *Васильев А.С., Садырин Е.В., Васильева М.Е.* Кручение упругого полупространства с многослойным покрытием с непрерывным или скачкообразным характером изменения упругих свойств по глубине покрытия // *Вестник ДГТУ*. 2013. № 5–6. С. 6–13.

References

1. Alexandrov S., Richmond O. Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2001, vol. 36, no. 1, pp. 1–11.
2. Aleksandrov S.E., Ljamina E.A. Singuljarnye reshenija pri ploskom plasticheskom techenii materialov, chuvstvitel'nyh k srednemu naprjazheniju [Singular solutions for plane plastic flow of materials sensitive to medium voltage]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2002, vol. 383, no. 4, pp. 492–495. (In Russian)
3. Aleksandrov S.E., Ljamina E.A. O vozmozhnosti vvedenija kojefficienta intensivnosti skorsti deformacii v vjazkoplastichnosti [On the possibility of the introduction of strain rate intensity factor in the viscoplastic]. *V sb. "Aktual'nye problemy mehaniki: mehanika deformiruемого tverdogo tela"* [In proc. "Problems in Mechanics: Mechanics of deformable solids"]. Moscow, Nauka, 2009, pp. 313–326. (In Russian)
4. Alexandrov S, Jeng Y.-R. Singular rigid/plastic solutions in anisotropic plasticity under plane strain conditions. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2013, vol. 25, no. 5, pp. 685–689.
5. Moylan S.P., Kompella S., Chandrasekar S., Farris T.N. A new approach for studying mechanical properties of thin surface layers affected by manufacturing processes. *Journal of Manufacturing Science and Engineering - ASME*, 2003, vol. 125, no. 2, pp. 310–315.
6. Trunina T.A., Kokovihin E.A. Formirovanie melkodispersnoj struktury v poverhnostnyh slojah stali pri kombinirovannoj obrabotke s primeneniem gidroressovaniija [The formation

- of the fine structure in the surface layers of steel with a combined treatment using a hydro-forming]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and reliability], 2008, no. 2, pp. 71–74. (In Russian)
7. Aleksandrov S.E., Grabko D.Z., Shikimaka O.A. K opredeleniyu tolshhiny sloja intensivnykh deformatsij v okrestnosti poverhnosti treniya v processah obrabotki metallov davleniem [To determine the thickness of intense deformation in the vicinity of the surface friction in metal forming processes]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Problems of mechanical engineering and reliability], 2009, no. 3, pp. 72–78. (In Russian)
 8. Aleksandrov S.E., Ljamina E.A. K postroeniju teorii plasticheskogo razrusheniya v okrestnosti poverhnostej treniya [To construct a theory of plastic failure in the vicinity of friction surfaces]. *Prikladnaya mehanika i tehniceskaja fizika* [Journal of applied mechanics and theoretical physics], 2011, vol. 52, no. 4, pp. 183–190. (In Russian)
 9. Alexandrov S. The strain rate intensity factor and its applications: a review. *Materials Science Forum*, 2009, vol. 623, pp. 1–20.
 10. Hill R. *Matematicheskaja teorija plastichnosti* [The mathematical theory of plasticity]. Moscow, Gostehizdat Publ., 1956, 407 p.
 11. Spencer A.J.M. A theory of the failure of ductile materials reinforced by elastic fibres. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1965, vol. 7, pp. 197–209.
 12. Volkov S., Aizikovich S., Wang Y.-S., Fedotov I. Analytical solution of axisymmetric contact problem about indentation of a circular indenter into a soft functionally graded elastic layer. *Acta Mechanica Sinica*, 2013, vol. 29, no. 2, pp. 196–201.
 13. Ajzikovich S.M., Vasil'ev A.S. Dvuhstoronnij asimptoticheskij metod reshenija integral'nogo uravnenija kontaktnoj zadachi o kruchenii neodnorodnogo po glubine uprugogo poluprostranstva [Two-sided asymptotic method for solving integral equations of the contact problem of the torsion of inhomogeneous elastic half-space depth]. *Prikladnaja matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics], 2013, vol. 77, no. 1, pp. 129–137. (In Russian)
 14. Vasil'ev A.S., Sadyrin E.V., Fedotov I.A. Kontaktnaja zadacha o kruchenii kruglym shtampom transversal'no-izotropnogo uprugogo poluprostranstva s neodnorodnym transversal'no-izotropnym [Contact problem of torsion of a round stamp transversely isotropic elastic half-space with an inhomogeneous transversely isotropic]. *Vestnik DGTU* [Proc. of DSTU], 2013, no. 1–2, pp. 25–34. (In Russian)
 15. Vasil'ev A.S., Sadyrin E.V., Vasil'eva M.E. Kruchenie uprugogo poluprostranstva s mnogoslojnym pokrytiem s nepreryvnym ili skachkoobraznym harakterom izmeneniya uprugih svojstv po glubine pokrytija [Twisting of an elastic half-space multi-coated with a continuous or discontinuous nature of change in the elastic properties with depth coverage]. *Vestnik DGTU* [Proc. of DSTU], 2013, no. 5–6, pp. 6–13. (In Russian)

Статья поступила 11 июня 2014 г.

© Калёнова Н. В., Новожилова О. В., Садырин Е. В., Айзикович С. М., 2014