

УДК 532.517.013.4:537.2

ЧИСЛЕННОЕ НАХОЖДЕНИЕ ГРАНИЦЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ И СВЕРХПРЕДЕЛЬНЫХ ТОКОВ В ПОЛУПРОВОДЯЩЕЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МЕМБРАНЕ

Кирий В. А., Хасматулина Н. Ю., Демёхин Е. А.

NUMERICAL FINDING OF BORDER SEPARATING LIMITED AND OVERLIMITING
CURRENTS IN A SEMICONDUCTING ELECTRIC MEMBRANE

Kiriy V. A., Khasmatulina N. Y., Demekhin E. A.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: n.khasmatulina@gmail.com

Abstract. One of the possible physical mechanisms of transition from limited to overlimiting currents in the electrolyte located between two electric membranes considered from theoretical point of view. This mechanism can be named electrokinetic instability. The boundary separating the limited and overlimiting modes is found numerically, according to the stability or instability of one-dimensional state of equilibrium. We can find the conclusion to develop new numerical method of solving the problem. Finding of the nonequilibrium one-dimensional equilibrium state as well as its research on stability is conducted numerically using τ -version of Galerkin's method. The system of Chebyshev's polynomials is used as a complete system of basis functions. Boundary eigenvalue problem is described by linearized system of ordinary differential Nernst–Planck–Poisson–Stokes equations with the appropriate boundary conditions, which is reduced to generalized algebraic eigenvalue problem after projection on the basis functions: $\det(A + \lambda B) = 0$, where A , B – the complex matrixes, λ – eigenvalues. If the real part of at least one eigenvalue of discrete spectrum is positive, then one-dimensional equilibrium position corresponding to the limited currents is unstable, the regime changes and the transition to overlimiting currents takes place. Physically, by this transition two ion transport mechanism, diffusion and electromigration, are complemented by the third mechanism – advection. Numerical data of the work is well corresponded to the results obtained analytically for small Debye numbers.

Keywords: numerical simulation, overlimiting currents, electrokinetic instability

Введение

Возросший интерес к задачам электродинамики микромасштабов диктуется их широкими приложениями в нанотехнологиях, биотехнологиях, проблемах очистки и опреснения воды и т. д.

В настоящей работе рассматривается поведение электролита между двумя полупроницаемыми электрическими мембранами при некоторой приложенной разности потенциалов, вызывающей поток ионов от одной поверхности к другой. Известно [1], что при малой разности потенциалов между поверхностями мембран ΔV электрический ток I пропорционален ΔV . Это фактически яв-

ляется проявлением закона Ома для данной задачи, поэтому подобный режим, кроме допределельного, иногда называется омическим или квазиравновесным. При достаточно больших ΔV зависимость $I(\Delta V)$, или вольт-амперная характеристика, становится нелинейной, происходит насыщение зависимости тока от напряжения, то есть при таком режиме изменение напряжения практически не влияет на величину электрического тока, поэтому данный режим называется предельным (неравновесным). Его появление впервые описали Штильман и Рубинштейн [2], а очень простое решение, полученное сведением нелинейного дифференци-

Кирий Владимир Александрович, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: vladimir@kiriy.ru.

Хасматулина Наталья Юрьевна, магистрант факультета компьютерных технологий и прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: n.khasmatulina@gmail.com.

Демёхин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: edemekhi@gmail.com.

Работа была частично финансирована грантами РФФИ (12-08-00924-а, 14-08-00789-а и 14-08-01171-а).

ального уравнения к алгебраическому кубическому уравнению при стремлении числа Дебая к нулю было получено и интерпретировано Уртенковым [3–5]. При дальнейшем увеличении разности потенциалов происходит переход к новому режиму: электрический ток снова становится пропорциональным разности потенциалов. Этот режим называется режимом сверхпределных токов. Имеется несколько физических механизмов, которые могут быть ответственными за появление сверхпределных токов: а) неустойчивость Рэлея–Бенара, в свою очередь вызванная джоулевым нагреванием жидкости при прохождении в ней электрического тока; б) явление диссоциации воды; в) новый вид неустойчивости, теоретически предсказанный в 2000 г. Зальцманом и Рубинштейном [6], причём название нового типа неустойчивости еще не определилось (электрокинетическая, электроосмотическая или электроконвективная). Экспериментальное подтверждение существования электрокинетической неустойчивости дано в работе [7], асимптотическое решение задачи об электрокинетической устойчивости получено в [8] для случая предельно малых чисел Дебая. В [9] и [10] проведено прямое численное моделирование режима электрокинетической неустойчивости.

Асимптотическое исследование устойчивости по ряду причин не может заменить точного численного решения: для микроканалов возможен перехлест двойных слоёв, когда число Дебая не является малым; в случае более сложных типов неустойчивости (при учёте эффекта Соре или сцепленной неустойчивости Рэлея–Бенара и электрокинетической неустойчивости и т. д.) аналитический анализ становится невозможным и единственным подходом является прямое численное решение задачи. Применение метода Галёркина с базисными функциями, имеющими сгущение нулей вблизи границ (то есть обладающими лучшей разрешающей способностью вблизи тонких слоёв Дебая) имеет преимущество перед разностными методами, позволяющее решить задачу с разным числом базисных функций, намного меньшим, чем число узлов сетки в случае применения конечно-разностного метода. Авторам неизвестны результаты успешного применения конечно-разностного метода для дискретизации данной задачи. Пред-

ставленное в работе численное решение задачи об устойчивости при малых числах Дебая хорошо совпадает с известным аналитическим решением Зальцмана–Рубинштейна [8].

1. Постановка задачи

Рассматривается поведение раствора бинарного электролита между двумя полупроницаемыми мембранами ($z_+ = -z_- = 1$, коэффициенты диффузии катионов и анионов считаются равными: $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$). Явление в безразмерном виде описывается уравнениями переноса анионов и катионов, уравнением Пуассона для электрического поля и уравнениями движения жидкости в стоковском приближении. В качестве базисных величин для приведения к безразмерному виду взяты: расстояние между мембранами \tilde{h}_0 , характерное время \tilde{h}_0^2/\tilde{D} , динамическая вязкость $\tilde{\mu}$, термический потенциал $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R}\tilde{T}/\tilde{F}$, \tilde{c}_0 — концентрация нейтрального раствора ионов одномерного состояния равновесия. Тильда означает размерную величину. Далее \tilde{R} — универсальная газовая постоянная, \tilde{T} — температура в градусах Кельвина, \tilde{F} — постоянная Фарадея, $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость, λ_D — длина Дебая.

Безразмерная система уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса имеет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^+}{\partial t} + \frac{\partial(U C^+)}{\partial x} + \frac{\partial(V C^+)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial^2 C^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial y^2}, \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^-}{\partial t} + \frac{\partial(U C^-)}{\partial x} + \frac{\partial(V C^-)}{\partial y} = \\ = -\frac{\partial}{\partial x} \left(C^- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \\ + \frac{\partial^2 C^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^-}{\partial y^2}, \quad (1.2) \end{aligned}$$

$$\nu^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right\} = C^- - C^+, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^2 \partial x^2} + \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} = \\ = \frac{\varkappa}{\nu^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.4)$$

где функция тока ψ и компоненты скорости U, V связаны соотношением

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad V = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Краевые условия принимают вид

$$\begin{aligned} y = 0: \quad C^+ = p, \quad \Phi = 0, \\ -C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^-}{\partial y} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} y = 1: \quad C^+ = p, \quad \Phi = \Delta V, \\ -C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^-}{\partial y} = 0, \quad \psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Здесь C^\pm — концентрация положительных и отрицательных ионов, Φ — электростатический потенциал, $\rho = C^+ - C^-$ — плотность заряда.

Первое условие предполагает равенство концентрации положительных ионов в растворе концентрации ионов на мембране, два следующих условия задают разность потенциала на верхней и нижней мембранах, третье условие означает отсутствие потока отрицательных ионов через поверхности мембран, последние — задают условия прилипания и непроницаемости на твердой поверхности.

Задача описывается четырьмя параметрами: числом Дебая ν , разностью потенциалов ΔV , коэффициентом сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи \varkappa , концентрацией положительных ионов на мембране $p \gg 1$:

$$\nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{h}_0}, \quad \varkappa = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0^2}{\tilde{\mu} \tilde{D}}, \quad \tilde{\lambda}_D^2 = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0^2}{\tilde{F} \tilde{c}_0}.$$

Влияние p слабо [8], поэтому расчеты проводились при фиксированном $p = 5$, что позволило сократить число параметров до трёх.

2. Одномерное состояние равновесия

Система (1.1)–(1.4) всегда имеет одномерное решение, для которого скорость тождественно равна нулю и перенос ионов определяется двумя механизмами: диффузией и электромиграцией. При $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} = 0$ система (1.1)–(1.4) переходит в систему с краевыми условиями

$$\begin{aligned} K \frac{d\Phi}{dy} + \frac{d\rho}{dy} = 4j, \quad \rho \frac{d\Phi}{dy} + \frac{dK}{dy} = 4j, \\ \nu^2 \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = -\rho, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} y = 0: \quad K + \rho = 2p, \quad \Phi = 0; \\ y = 1: \quad K + \rho = 2p, \quad \Phi = \Delta V, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $K = C^+ + C^-$ — концентрация соли, $\rho = C^+ - C^-$ — плотность заряда, j — плотность тока.

Решение разыскивалось в виде разложения по полиномам Чебышёва

$$K = \sum_{m=0}^N K_m T_m(z), \quad (2.3)$$

$$\rho = \sum_{m=0}^N \rho_m T_m(z), \quad (2.4)$$

$$\Phi = \sum_{m=0}^N \Phi_m T_m(z), \quad (2.5)$$

где $z = 2y - 1$, $z \in [-1, 1]$.

Разложения (2.3)–(2.5) подставлялись в (2.1)–(2.2) и проектировались с весом $1/\sqrt{1-z^2}$ на базисные функции $T_r(z)$, $r = 0, 1, \dots, N$. Четыре последние проекции заменялись на линейные уравнения относительно K_m , ρ_m и Φ_m , полученные подстановкой в (2.2) разложений (2.3)–(2.5). В последнем и заключается суть τ -метода.

Получившаяся система нелинейных алгебраических уравнений решалась методом Ньютона. В качестве начального приближения использовалось либо аналитическое решение для малых ν [4, 5], либо предыдущее решение. Таким образом, фактически был использован метод продолжения по параметру (таких параметров три: ν , ΔV и \varkappa).

На рис. 1 приведено полученное численное решение типа одномерного состояния

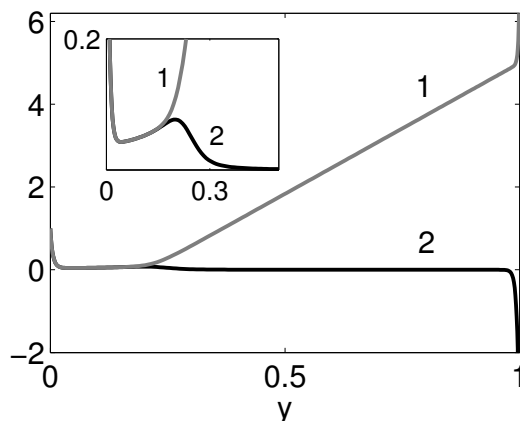


Рис. 1. Одномерное стационарное решение 1 – концентрация соли K ; 2 – плотность распределения заряда ρ ($\Delta V = 30$, $\nu = 0,01$)

равновесия. Кривая 1, соответствующая концентрации соли, показывает практически нулевые K вблизи левой мембраны ($y = 0$), исключая зону тонкого двойного слоя у самой мембраны (так называемая зона обессоливания), использующуюся при практическом применении мембран. Затем K увеличивается по прямой линии в зоне повышенного соледержания. Плотность заряда ρ после тонкого слоя Дебая имеет типичный максимум и затем уменьшается до нуля в квази-электронейтральной области (исключая тонкий участок двойного электрического слоя у границы $y = 1$). Полученное авторами численное решение находится в хорошем соответствии с асимптотическими решениями [2–5, 8].

Определение перехода от предельных к сверхпредельным токам

Точка перехода от предельных токов к сверхпредельным, в соответствии с идеей Зальтсмана и Рубинштейна [8], определяется как точка потери устойчивости одномерного решения (2.1)–(2.2). Наложим на решение системы (2.1)–(2.2) малые возмущения вида

$$K = K_0(y) + \hat{K}(y) \exp(i\alpha x + \lambda t), \quad (2.6)$$

$$\rho = \rho_0(y) + \hat{\rho}(y) \exp(i\alpha x + \lambda t), \quad (2.7)$$

$$\Phi = \Phi_0(y) + \hat{\Phi}(y) \exp(i\alpha x + \lambda t), \quad (2.8)$$

$$\psi = \hat{\psi}(y) \exp(i\alpha x + \lambda t). \quad (2.9)$$

Здесь α – волновое число, $\lambda = \lambda(\alpha)$ – коэффициент роста, определяемый как соб-

ственное значение задачи. α является заданным действительным числом, λ – заранее неизвестное комплексное число. Индекс «0» означает невозмущенные решения, шляпка – возмущенное. В нижеприведенных уравнениях индекс «0» опускается.

После подстановки (2.6)–(2.9) в (1.1)–(1.4), (1.5)–(1.6) и линеаризации системы получим следующую краевую задачу на комплексные собственные значения λ :

$$\lambda \hat{K} - i\alpha \frac{dK}{dy} \hat{\psi} = \frac{d}{dy} \left(\rho \frac{d\hat{\Phi}}{dy} + \frac{d\Phi}{dy} \hat{\rho} \right) - \alpha^2 \rho \hat{\Phi} + \frac{d^2 \hat{K}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{K}, \quad (2.10)$$

$$\lambda \hat{\rho} - i\alpha \frac{d\rho}{dy} \hat{\psi} = \frac{d}{dy} \left(K \frac{d\hat{\Phi}}{dy} + \frac{d\Phi}{dy} \hat{K} \right) - \alpha^2 K \hat{\Phi} + \frac{d^2 \hat{\rho}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\rho}, \quad (2.11)$$

$$\nu^2 \left(\frac{d^2 \hat{\Phi}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\Phi} \right) = -\hat{\rho}, \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \hat{\psi}}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \hat{\psi}}{dy^2} + \alpha^4 \hat{\psi} = \\ = \frac{\varkappa}{\nu^2} i\alpha \left(\frac{d\rho}{dy} \hat{\Phi} - \frac{d\Phi}{dy} \hat{\rho} \right), \end{aligned} \quad (2.13)$$

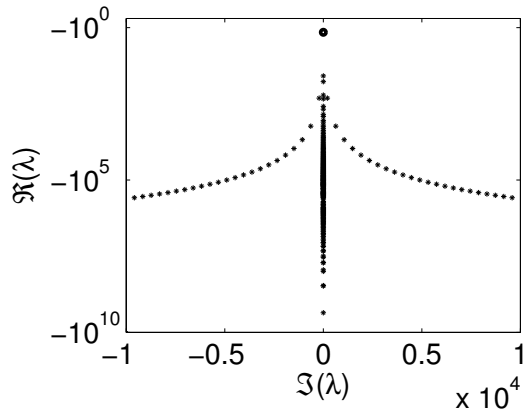


Рис. 2. Дискретный спектр задачи на собственные значения ($\varkappa = 0,2$, $\nu = 0,01$, $\Delta V = 20$, $\alpha = 1$)

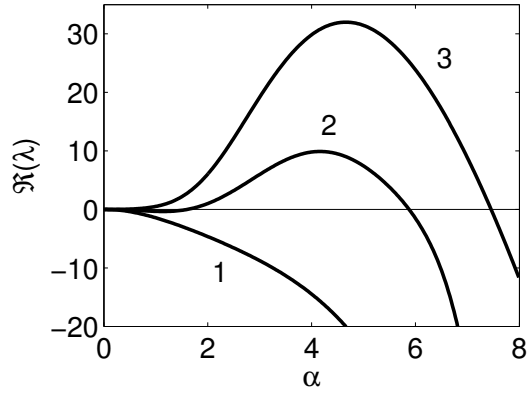


Рис. 3. Зависимость $\text{Re}(\lambda)$ от волнового числа α для 1 – $\Delta V = 20$, 2 – 30, 3 – 35 ($\varkappa = 0,2$, $\nu = 0,01$)

$$y = 0: \quad \hat{C}^+ = 0, \\ -\hat{C}^- E - C^- \frac{d\hat{\Phi}}{dy} + \frac{d\hat{C}^-}{dy} = 0, \\ \hat{\Phi} = 0, \quad (2.14)$$

$$\hat{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{dy} = 0; \quad (2.15)$$

$$y = 1: \quad \hat{C}^+ = 0, \\ -\hat{C}^- E - C^- \frac{d\hat{\Phi}}{dy} + \frac{d\hat{C}^-}{dy} = 0, \\ \hat{\Phi} = 0, \quad (2.16)$$

$$\hat{\psi} = \frac{d\hat{\psi}}{dy} = 0; \quad (2.17)$$

Идея решения задачи на устойчивость заключается в следующем: (а) если для всех $\alpha \in (0, \infty)$ действительная часть λ меньше нуля, то решение (2.1)–(2.2) устойчиво; (б) если хотя бы для одного α из указанного интервала действительная часть λ положительна, то решение (2.1)–(2.2) неустойчиво. Эта идея и использовалась при решении (2.10)–(2.17).

Для решения краевой задачи (2.10)–(2.13), как и для нахождения одномерного состояния равновесия, применялся τ -метод Галёркина с полиномами Чебышёва в качестве базисных функций. Число базисных полиномов менялось вплоть до 512 до достижения требуемой точности. Как и для

одномерного решения, последние проекции заменялись на уравнения краевых условий (2.14)–(2.17) при подстановке в них разложения (2.3)–(2.5). В результате задача сводилась к решению обобщенной задачи на собственные значения для комплексных матриц A и B

$$\det(A + \lambda B) = 0,$$

которая решалась с применением стандартного QR-алгоритма.

Задача на собственные значения (2.10)–(2.17) для фиксированного волнового числа α имеет счётное число собственных значений $\{\lambda_k\}$. Для конечного числа галеркинских функций число собственных значений тоже конечно (см. рис. 2, где изображены действительная и мнимая части λ). Только одно собственное значение может быть неустойчивым. На рис. 3 представлено поведение действительной части этого собственного значения при изменении волнового числа α для трех значений разности потенциалов: при $\Delta V = 20$ одномерное состояние равновесия устойчиво, при $\Delta V = 30$ появляется зона неустойчивых волновых чисел α_1 и α_2 , таких, что $\text{Re}(\lambda) > 0$, $\alpha \in (\alpha_1, \alpha_2)$, то есть одномерное равновесие неустойчиво и при данном ΔV имеет место режим сверхпредельных токов, как и при $\Delta V = 35$.

Кривые нейтральной устойчивости в координатах $\Delta V - \alpha$ представлены на рис. 4 для разных значений коэффициента сцепления \varkappa . Имеет место идеальное соотношение

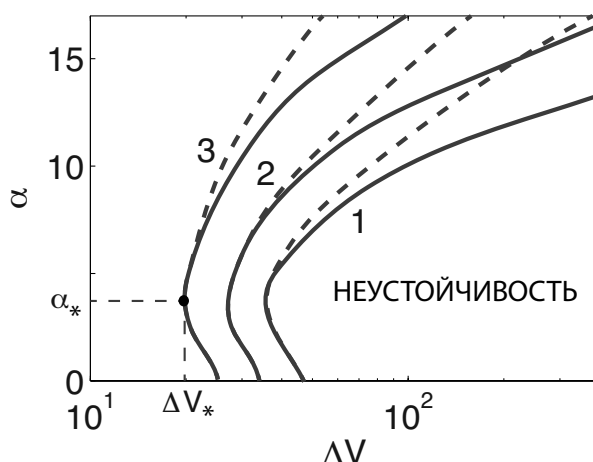


Рис. 4. Кривые нейтральной устойчивости ($\nu = 0,01$) для 1 — $\kappa = 0,1$; 2 — $\kappa = 0,2$; 3 — $\kappa = 0,5$. Сплошная линия — численный анализ, пунктир — аналитическое решение [8]

нижней ветви нейтральной кривой и критических значений параметров α_* , ΔV_* , когда впервые происходит потеря устойчивости, с аналитическими результатами [8].

Как видно из рис. 3, система дестабилизируется при увеличении коэффициента сцепления электростатической и гидродинамической частей задачи κ , что подтверждается как асимптотическими решениями [4, 5, 8], так и экспериментальными данными [7].

Заключение

Численно рассмотрена электрокинетическая неустойчивость как один из возможных механизмов перехода от предельных к сверхпредельным режимам около электрической мембраны. На состояние одномерного равновесия, соответствующее предельным токам, накладывались малые возмущения и рассматривалось поведение этих возмущений. В случае роста возмущений происходит смена токовых режимов. Разработан новый подход к решению линеаризованной системы Нернста–Планка–Пуассона–Стокса: τ -модификация метода Галёркина с полиномами Чебышёва в качестве базисных функций. При малых числах Дебая численные расчеты хорошо соответствуют аналитическим результатам.

Литература

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматлит, 1959. 316 с.
2. Rubinstein I., Shtilman L. Voltage against current curves of cation exchange membranes // J. Chem. Soc. Faraday Trans. II. 1979. № 75. P. 231–246.
3. Заболоцкий И. И., Никоненко В. В. Перенос ионов в мембранах. М.: Наука, 1996. 392 с.
4. Уртенев М. Х., Сеидов Р. Р. Математические модели электромембранных систем очистки воды. Краснодар: КубГУ, 2000. 140 с.
5. Уртенев М. Х., Никоненко В. В. Анализ решения краевой задачи для уравнений Нернста–Планка–Пуассона: Случай 1:1 электролита // Электрохимия. 1993. Т. 29. № 2. С. 239–245.
6. Nikonenko V. V., Kovalenko A., Urtenov M. H., Pismenskaya N. D., Han J., Sizat P., Pourcelly G. Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives // Desalination. 2014. № 342. P. 85–106.
7. Rubinstein S. M., Manukyan G., Staicu A., Rubinstein I., Zaltman B., Lammertink R. G. H., Nagele F., Wessling M. Direct observation of nonequilibrium electroosmotic instability // Phys. Rev. Lett. 2008. № 101. P. 236101.
8. Zaltman B., Rubinstein I. Electroosmotic slip and electroconvective instability // Fluid Mech. 2007. № 579. p. 173–226.
9. Demekhin E. A., Shelistov V. S., Polyanskikh S. V. Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability // Phys. Rev. E. 2011. № 84. P. 036318.
10. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux // Annu. Rev. Fluid Mech. 2012. № 44. P. 401–426.

References

1. Levich V.G. *Physicochemical hydrodynamics*. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962, 700 p.
2. Rubinstein I. Voltage against current curves of cation exchange membranes. *J. Chem. Soc. Faraday Trans. II*, 1979, no. 75, pp. 231–246.
3. Zabolotsky I. I., Niconenko V. V. *Perenos ionov v membrane* [Ion's transport in membrane]. Moscow, Nauka Publ., 1996, 392 p. (In Russian)
4. Urtenov M. H., Seidov R. R. *Matematicheskie modeli elektromembrannyh sistem ochistki vody* [Mathematical models of electromembrane systems of water purification]. Krasnodar, KubSU Publ., 2000, 140 p. (In Russian)
5. Urtenov M. H., Niconenko V. V. *Analiz resheniya kraevoy zadachi dlja uravnenij Nernsta–Plancka–Puassona: Sluchaj 1:1 elektrolita* [The analysis of the solution of boundary problem for Nernst–Planck–Poisson equations: case of 1:1 electrolyte]. *Electrochimia* [Electrochemistry], 1993, vol. 29, no. 2, pp. 239–245. (In Russian)
6. Niconenko V. V., Kovalenko A., Urtenov M. H., Pismenskaya N. D., Han J., Sizat P., Pourcelly G. Desalination at overlimiting currents: State-of-the-art and perspectives. *Desalination*, 2014, no. 342, pp. 85–106.
7. Rubinstein S. M., Manukyan G., Staicu A., Rubinstein I., Zaltman B., Lammertink R. G. H., Nagele F., Wessling M. Direct observation of nonequilibrium electroosmotic instability. *Phys. Rev. Lett.*, 2008, no. 101, pp. 236101.
8. Zaltman B., Rubinstein I. Electroosmotic slip and electroconvective instability. *Fluid Mech.*, 2007, no. 579, pp. 173–226.
9. Demekhin E. A., Shelistov V. S., Polyanskikh S. V. Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability. *Phys. Rev. E.*, 2011, no. 584, pp. 036318.
10. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2012, no. 44, p. 401–426.

Статья поступила 4 сентября 2014 г.

© Кирий В. А., Хасмагулина Н. Ю., Демёхин Е. А., 2014