УДК 539.3

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПЛОСКИХ ТРЕЩИН В УПРУГОЙ СРЕДЕ[1]

А. О. Ватульян[2], А. Н. Соловьев[3]

IDENTIFICATION OF PLANE CRACKS IN ELASTIC MEDIUM

Vatulyan A.O., Soloviev A.N.

An approach has been offered, which is based on the development of some integral equality, on a set of particular solutions of equations of the anisotropic elasticity theory and its further application in inverse problems of the theory of cracks taking into account a priori information, stating that all cracks are located in the same plane. The procedure of identification has been developed based on the measurements of fields of displacements on the whole extension of a solid.

Задача обнаружения и идентификации трещин и трещиноподобных дефектов в упругих телах — одна из актуальных практических проблем геофизики, дефектометрии, прогнозирования предразрушающего состояния конструкций ответственного назначения и предупреждения крупномасштабных техногенных катастроф. Наиболее часто в практической идентификации в геофизике используется мониторинг упругих волн, отраженных от дефекта, а при определении дефектов в элементах конструкций — анализ упругих, электростатических или температурных полей. В любой из таких постановок приходится строить решение обратной геометрической задачи (ОГЗ) для некоторого эллиптического оператора — либо для оператора Лапласа, либо для оператора теории упругости. Если задачи такого типа для оператора Лапласа исследованы достаточно подробно [1,2], то разработка методов решения подобных задач для оператора теории упругости с последующим определением характерных размеров и конфигурации дефектов по измеренному на границе тела полю перемещений представляет собой сложную математическую проблему. При этом, если размеры дефекта соизмеримы с длиной волны зондирующего поля или меньше ее, то использование надежных математических моделей становится принципиально важным, поскольку в этом случае измеряемое на поверхности тела поле упругих перемещений мало меняется при наличии дефекта. Возникающие при этом ОГЗ теории упругости требуют достаточно строгого подхода, базирующегося на решении соответствующих краевых задач динамической теории упругости.

Наиболее популярной моделью трещины в настоящее время является математический разрез, причем предполагается, что берега трещины раскрыты и свободны от нагрузок, а перемещения терпят конечные скачки. Такая модель базируется на постановках для статических задач теории упругости для тел с трещинами. Основной способ анализа таких проблем — предварительное сведение краевой задачи к системе граничных интегральных уравнений и формулировка системы операторных уравнений относительно неизвестной конфигурации трещины.

Метод сведения к системам граничных интегральных уравнений, позволяющий понизить размерность прямых задач, является одним из наиболее эффективных методов исследования прямых и обратных задач теории трещин в динамической теории упругости. Подобный подход для дефектов типа полостей реализован, например в [3, 4]. Для дефектов типа плоских трещин идея сведения прямых задач к системам гиперсингулярных ГИУ относительно скачков смещений на трещине реализована в большом количестве работ (например, в [5–7]).Что касается процедуры определения конфигурации трещины в упругой среде по отраженному от дефекта волновому полю, то в последние годы появился ряд работ, посвященных этому направлению [8, 9]. При этом следует отметить, что экспериментальные данные акустического зондирования свидетельствуют о том, что если полости являются линейными дефекта-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-01124).

[2]Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета РГУ.

[3]Соловьев Аркадий Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической механики конструкторского факультета ДГТУ. E-mail: soloviev@math.rsu.ru

ми, то трещины проявляют себя как нелинейные объекты [10], для которых не выполняется принцип суперпозиции. Нелинейность их поведения при отражении упругих волн связана, как правило, с взаимодействием берегов. Нелинейные модели для описания колебаний трещин делают невозможной постановку в рамках установившихся колебаний и значительно усложняют как процедуру модельных расчетов отраженных полей и коэффициентов интенсивности [11], так и процедуру идентификации. В то же время сложности расчета при использовании нелинейной (нестационарной) модели настолько велики, что подавляющее большинство авторов предпочитает обращаться при формулировке систем ГИУ в динамике к условию отсутствия напряжений на берегах, что фактически соответствует случаю, когда трещина раскрыта под действием некоторого поля нагрузок.

В настоящее время в рамках изотропной теории упругости с помощью подхода ГИУ получены решения широкого класса задач о колебаниях упругих тел с трещинами без взаимодействия берегов. В работах В. А. Бабешко и его учеников разработаны методы, позволяющие изучать колебания тел с одиночной трещиной, системой параллельных трещин в полупространстве, слое и получать решение интегральных уравнений в полуаналитической форме, что не требует больших вычислительных затрат. Если же трещина наклонена по отношению к прямолинейной границе или же не является плоской, то практически единственным эффективным средством исследования прямых и обратных задач теории трещин следует считать общий метод ГИУ, а при численной реализации — основанный на нем метод граничных элементов.

Заметим, что очень часто для построения адекватной модели отражения упругих волн от трещины необходим учет анизотропии, которой обладают многие горные породы, конструкционные материалы и сплавы, что в значительной степени усложняет волновую картину и расчет полей.

Настоящая работа посвящена построению некоторого функционала, обобщающего функционал взаимности, и описанию метода идентификации плоскости расположения системы трещин в анизотропной упругой среде.

1. Постановка обратной задачи

Рассмотрим установившиеся колебания с круговой частотой ω упругого тела, занимающего конечную односвязную область V с границей S. В плоском сечении S_{cr} области V имеется система трещин $\Gamma = \cup_{p=1}^{M}\Gamma_p$ ($\Gamma_p = \Gamma_p^+ \cup \Gamma_p^-$), а плоскость Π с единичной нормалью $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$, содержащая это сечение, задается уравнением

$$N_1x_1 + N_2x_2 + N_3x_3 = c. \qquad (1.1)$$

Уравнения установившихся колебаний имеют вид

$$\sigma_{ij,j} = \rho\omega^2 u_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{x} \in V/\Gamma, \qquad (1.2)$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}u_{k,l}. \qquad (1.3)$$

Будем полагать, что берега трещин не взаимодействуют:

$$t_i|_{\Gamma_p^\pm} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, M. \qquad (1.4)$$

Для определения характеристик плоскости Π будем считать, что на всей границе известны все компоненты вектора смещений и вектора напряжений:

$$u_i|_S = \psi_i, \quad t_i|_S = \sigma_{ij}n_j|_S = \phi_i. \qquad (1.5)$$

Замечание. В принципе для решения обратной задачи достаточно знать поле перемещений на части границы, а для продолжения поля на всю границу тела использовать методику, предложенную в [12] или в [13].

2. Построение основного функционала

Введем в рассмотрение пробные решения u_i^*, удовлетворяющие уравнениям движения

$$\sigma_{ij,j}^* = \rho\omega^2 u_i^*, \quad i = 1, 2, 3, \quad \underline{x} \in V, \qquad (2.1)$$

$$\sigma_{ij}^* = c_{ijkl}u_{k,l}^*. \qquad (2.2)$$

Компоненты вектора смещений и вектора напряжений пробного решения на границе S обозначим через ψ_i^*, ϕ_i^*:

$$u_i^*|_S = \psi_i^*, \quad t_i^*|_S = \sigma_{ij}^*n_j|_S = \phi_i^*.$$

На множестве пробных решений определим линейный функционал

$$G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{u}^*) = \int\limits_S (\psi_i\phi_i^* - \psi_i^*\phi_i)\, dS. \qquad (2.3)$$

Проводя разрез в сечении S_{cr}, охватывающий все трещины и выходящий на поверхность S, и применяя для такого односвязного тела теорему взаимности, нетрудно показать, что

$$\int\limits_{\Gamma^+} \chi_i q_i^* \, dS = G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{u}^*), \tag{2.4}$$

где $\chi_i = u_i|_{\Gamma^+} - u_i|_{\Gamma^-}$ — скачки перемещений на трещинах; $q_i^*|_{\Gamma^+} = \sigma_{ij}^* N_j|_{\Gamma^+}$ — компоненты вектора пробных напряжений на берегах трещин. В случае, когда трещина отсутствует, соотношение (2.4) превращается в известное соотношение взаимности. Отметим, что функционал (2.3) в постановке настоящей работы, когда поля смещений и напряжений известны на всей границе тела, может быть вычислен для любого пробного поля.

3. Выбор пробных полей и определение плоскости Π

Используем функционал (2.4) для нахождения плоскости. Пробные поля необходимо выбирать таким образом, чтобы параметры, характеризующие плоскость Π, находились бы наиболее просто. В частности, их следует выбирать так, чтобы обнулить левую часть равенства (2.4) либо исключить неизвестные скачки. Далее приводится один из способов выбора пробного решения.

Введем новую систему координат $OX_1X_2X_3$, в которой плоскость Π имеет уравнение вида $X_3 = c$. Положение такой системы координат определяется двумя углами — φ и θ, причем первый задает поворот вокруг оси Ox_3, второй — вокруг оси OX_1.

Компоненты решения краевой задачи (1.2)–(1.5) и пробного решения (2.1)–(2.2) в новой системе координат обозначим U_i и U_i^*, $i = 1, 2, 3$ соответственно. Левая часть соотношения (2.4) в принятых обозначениях примет вид

$$\int\limits_{\Gamma^+} \chi_i \, q_i^* dS = \int\limits_{\Gamma^+} \mathrm{X}_i \, Q_i^* \, dS,$$

где

$$\mathrm{X}_i = U_i|_{\Gamma^+} - U_i|_{\Gamma^-}, \quad Q_i^* = \sigma_{X_i X_3}^*.$$

В качестве пробных решений обычно выбирается система плоских волн, распространяющихся вдоль направления X_3, которая легко строится; в частности, для изотропного тела эта совокупность шести решений имеет достаточно простой вид:

$$\begin{aligned}
\underline{U}^{*1} &= (\cos k_2 X_3, 0, 0),\\
\underline{U}^{*2} &= (\sin k_2 X_3, 0, 0),\\
\underline{U}^{*3} &= (0, \cos k_2 X_3, 0),\\
\underline{U}^{*4} &= (0, \sin k_2 X_3, 0),\\
\underline{U}^{*5} &= (0, 0, \cos k_1 X_3),\\
\underline{U}^{*6} &= (0, 0, \sin k_1 X_3),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\lambda+2\mu}}$, $k_2 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2}{\mu}}$ — соответственно продольное и поперечное волновые числа. Векторы пробных напряжений в сечении S_{cr} имеют вид

$$\begin{aligned}
\underline{Q}^{*1} &= (-\mu k_2 \sin k_2 c, 0, 0),\\
\underline{Q}^{*2} &= (\mu k_2 \cos k_2 c, 0, 0),\\
\underline{Q}^{*3} &= (0, -\mu k_2 \sin k_2 c, 0),\\
\underline{Q}^{*4} &= (0, \mu k_2 \cos k_2 c, 0),\\
Q^{*5} &= (0, 0, -(\lambda + 2\mu) k_1 \sin k_1 c),\\
Q^{*6} &= (0, 0, (\lambda + 2\mu) k_1 \cos k_1 c).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1),(3.2) в соотношение (2.4), получим шесть уравнений относительно шести неизвестных φ, θ, c, I_1, I_2, I_3 ($I_i = \int\limits_{\Gamma^+} \mathrm{X}_i \, dS$):

$$\begin{aligned}
-I_1 \mu k_2 \sin k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*1}),\\
I_1 \mu k_2 \cos k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*2}),
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\begin{aligned}
-I_2 \mu k_2 \sin k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*3}),\\
I_2 \mu k_2 \cos k_2 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*4}),
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
-I_3 (\lambda + 2\mu) k_1 \sin k_1 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*5}),\\
I_3 (\lambda + 2\mu) k_1 \cos k_1 c &= G(\underline{\phi}, \underline{\psi}, \underline{U}^{*6}).
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Считая, что I_1, I_2, I_3 отличны от нуля, сведем систему (3.3)–(3.5) к трем уравнениям относительно φ, θ, c:

$$F_1(\varphi, \theta) - F_2(\varphi, \theta) = 0, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{tg} k_2 c = F_2(\varphi, \theta), \tag{3.7}$$

$$\operatorname{tg} k_1 c = F_3(\varphi, \theta), \tag{3.8}$$

где

$$F_1(\varphi,\theta) = -\frac{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*1})}{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*2})},$$

$$F_2(\varphi,\theta) = -\frac{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*3})}{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*4})},$$

$$F_3(\varphi,\ \theta) = -\frac{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*5})}{G(\underline{\phi},\underline{\psi},\underline{U}^{*6})}.$$

4. Случай плоской деформации

В случае плоской деформации в плоскости Ox_2x_3 положение плоскости Π определяется двумя параметрами — углом θ и расстоянием c, которые вместе с интегральными раскрытиями I_2, I_3 связаны 4 уравнениями (3.4), (3.5) или уравнениями (3.7) и (3.8), которые принимают вид

$$\operatorname{tg} k_2 c = F_2(0,\theta), \quad \operatorname{tg} k_1 c = F_3(0,\theta). \tag{4.1}$$

Система (4.1) может быть сведена к одному уравнению при некоторых ограничениях. В качестве примера рассмотрим область V, диаметр d сечения которой в плоскости Ox_2x_3 не превосходит 1,0 м, материал тела — сталь ($E = 0,2\cdot 10^{12}$ Н/м^2, $\nu = 0,29$). Тогда для частот колебаний $f = \frac{\omega}{2\pi} < \frac{1}{4d}\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ($f < 0,785$ кГц), система (4.1) сводится к одному уравнению

$$\operatorname{arctg} F_2(0,\theta) - \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}}\operatorname{arctg} F_3(0,\theta) = 0, \tag{4.2}$$

$$\theta \in [0;\pi],$$

после решения которого расстояние c находится по формулам

$$c = \frac{\operatorname{arctg} F_3(0,\theta)}{k_1} \quad \text{или} \quad c = \frac{\operatorname{arctg} F_2(0,\theta)}{k_2}.$$

5. Реконструкция трещин

После того как определено сечение S_{cr}, задача реконструкции трещин сводится к задаче определения интерфейсных трещин, и ее решение может быть проведено одним из перечисленных далее методов.

Пусть V_1 и V_2 — подобласти, S_1, S_2 — поверхности, на которые плоскость Π делит исходную область V и поверхность S. Для тел, занимающих области V_1 и V_2, могут быть сформулированы неклассические краевые задачи [12], в которых на поверхности S_{cr} неизвестны векторы смещений и напряжений, однако по их структуре можно судить о расположении трещин. Для определения этих векторов также может быть применен неклассический метод граничных интегральных уравнений [12].

В качестве другого способа определения носителей трещин в плоскости Π может быть предложено использование интегрального равенства (2.4) при ином выборе пробных решений u_i^* следующего вида:

$$u_{ipq}^* = A_i e^{i(pX_1+qX_2)} e^{\lambda_{pq}X_3}.$$

При этом из (2.4) вычисляются коэффициенты Фурье X_{ipq}, а регуляризованная процедура суммирования рядов Фурье позволяет найти носитель функций X_i, а вместе с ним и область трещины Γ^+.

Замечание. Такой подход дает возможность определять наличие и конфигурацию не только отдельной трещины, но и множественные дефекты, расположенные в одной плоскости.

6. Численный эксперимент

В качестве примера применения предложенного метода определения расположения трещины рассмотрены установившиеся колебания с частотой $f = 1,0$ кГц для квадрата (материал — сталь) со стороной 0,1 м, ослабленного прямолинейной трещиной AB (рис. 1) A(0,02; 0,06), B(0,04; 0,08). На нижней и верхней сторонах квадрата задавалась уравновешенная нагрузка в виде нормального напряжения (или равномерно распределенного с интенсивностью $Q_0 = 10^4$ Н/м^2, или изменяющегося по линейному закону от нуля до Q_0), боковые стороны были свободны от нагрузок. Для решения прямой задачи использован конечно-элементный комплекс ACELAN [14], при расчетах конечно-элементная сетка искусственно сгущалась в окрестности вершин трещины, общее количество узлов равнялось 1 181. На рис. 2 представлены (с сеткой изолиний) амплитудные значения компонент вектора смещений. На рис. 2, *а* показано распределение u_2, максимальное значение амплитуды ($1,151 \cdot 10^{-9}$ м, отмеченно крестиком) изображено белым цветом, а минимальное значение ($-1,055 \cdot 10^{-9}$ м, отмеченно кружком) — черным; рис. 2, *б* соответствует u_3, на котором максимальное значение равно $2,975 \cdot 10^{-9}$ м, минимальное — $2,449 \cdot 10^{-9}$ м.

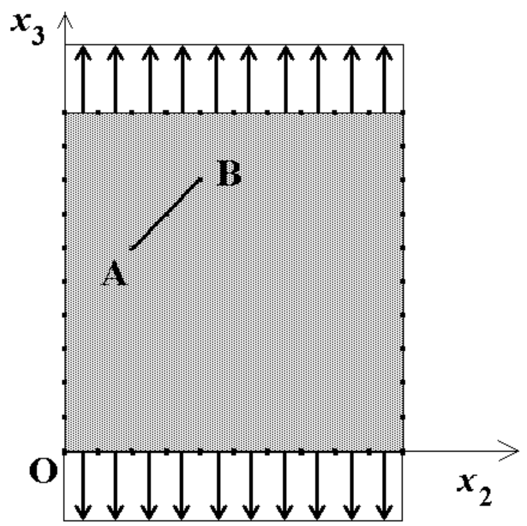

Рис. 1

На сторонах квадрата, кроме узлов в его вершинах, было выбрано по 9 внутренних узлов, равноотстоящих друг от друга (рис. 1). Найденные смещения этих узлов моделировали процесс измерения граничных полей в обратной задаче реконструкции, а при вычислении функционала (2.3) сомножители подынтегральных функций интерполировались непрерывными кусочно-линейными функциями.

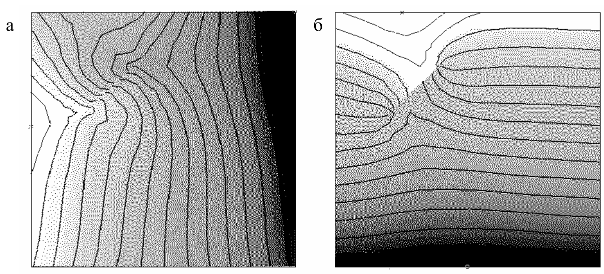

Рис. 2

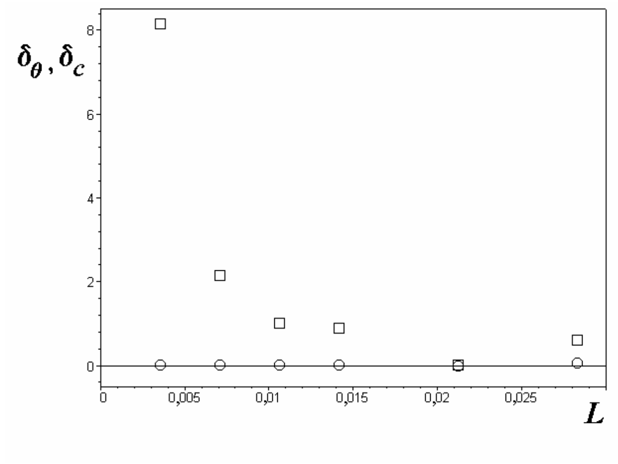

Рис. 3

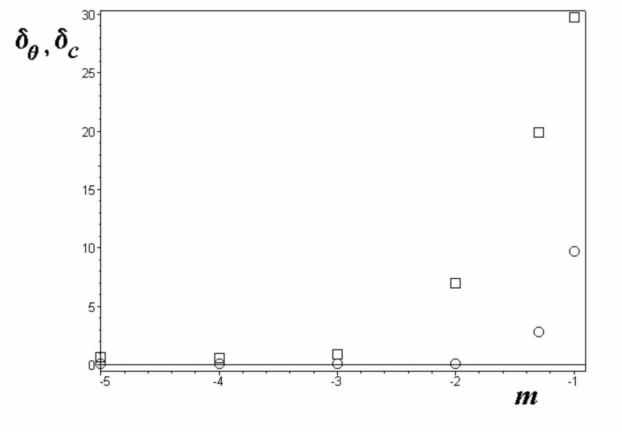

Рис. 4

Отметим, что в результате численного решения нелинейного уравнения (4.2) было найдено несколько его корней, причем для однозначного выбора истинного решения необходимо было анализировать исходную систему (3.4), (3.5), или изменить характер нагрузки (равномерное распределение напряжений заменить линейным распределением), или проводить эксперимент в некотором наборе частот.

В численном эксперименте изучалось также влияние размера дефекта на относительные погрешности определения угла θ и расстояния c.

$$\delta_\theta = (\theta_0 - \theta_n)/\theta_0 \cdot 100\%,$$
$$\delta_c = (c_0 - c_n)/c_0 \cdot 100\%,$$

где $\theta_0 = \pi/4$ и $c_0 = 0,04\sqrt{2}$ м — точные значения; θ_n и c_n — найденные параметры.

На рис. 3 квадратиками отмечены значения δ_c, когда длина трещины L изменяется от 0,0035 до 0,0283 м, при этом значения δ_θ (кружочки) по модулю не превышают 1%.

Проверка устойчивости алгоритма восстановления трещины к случайным ошибкам входных данных моделировалась случайными возмущениями амплитуд «измеренных» величин так, что

$$\tilde{u}_i(x_{(k)}) = u_i(x_{(k)})\left[1 + (2R_k - 1)\varepsilon\right],$$

где возмущенные значения — величины с тильдой; k определяет номер точки на границе, в которой проводятся «измерения»; R_k — равномерно распределенная на (0;1) случайная величина; $\varepsilon = 10^m$ — малый параметр.

На рис. 4 представлены зависимости погрешностей δ_c и δ_θ при изменении показателя m от -5 до -1 (обозначения такие же, как на рис. 3), из которого видно, что порядок ошибки восстановления не превышает порядок ошибки входных данных.

Литература

1. *Andrieux S., B. Abda A, Jaoua M.* Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae // Inverse Problems. 1996. № 12. P. 553–563.
2. *Bannour T., B. Abda A, Jaoua M.* A Semi-explisit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks // Inverse Problems. 1997. №. 13. P. 899–917.
3. *Tanaka M., Nakamura M., Yamagiwa K.* Application of boundary element method for elastodynamics to defect shape identification // Math. Comput. Modeling. 1991. Vol. 15. № 3–5. P. 295–302.
4. *Ватульян А. О., Коренский С. А.* Метод линеаризации в геометрических обратных проблемах теории упругости // ПММ. 1997. Т. 61. Вып. 4. С. 639–646.
5. *Bostrem A.* Acoustic scattering by a sound-hard rectangle // J. Acoust. Soc. Am. 1991. 90(6). P. 3344–3347.
6. *Бабешко В. А.* Тела с неоднородностями: случай совокупностей трещин // ДАН. 2000. Т. 373. № 2. С. 191–193.
7. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Дифракция упругих волн на пространственных трещинах произвольной в плане формы // ПММ. 1996. Т. 6. Вып. 2. С. 282–289.
8. *Alves C. J. S, Duong T. Ha.* On inverse scattering by screens // Inverse Problems. 1995. № 13. P. 1161–76.
9. *Alves C. J. S, Duong T. Ha.* Inverse scattering for elastic planar cracks // Inverse Problems. 1999. № 15. P. 91–97.
10. *Казаков В. В., Сутин А. М.* Использование эффекта модуляции ультразвука вибрациями для импульсной локализации трещин // Акуст. журнал. 2001. Т. 47. № 3. С. 364–369.
11. *Гузь А. Н., Зозуля В. В.* Упругие динамические односторонние контактные задачи с трением для тел с трещинами // Прикл. мех. 2002. Т. 38. № 8. С. 3–45.
12. *Ватульян А. О., Ворович И. И., Соловьев А. Н.* Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 373–380.
13. *Козлов В. А., Мазья В. Г., Фомин А. В.* Итерационный метод решения задачи Коши для эллиптических уравнений // ЖВМ и МФ. 1991. Т. 31. С. 45–52.
14. *Белоконь А. В., Наседкин А. В., Соловьев А. Н.* Новые схемы конечно-элементного динамического анализа пьезоэлектрических устройств // ПММ. 2002. Т. 66. № 3. С. 491–501.

Статья поступила 6 мая 2003 г.
Ростовский государственный университет, Донской государственный технический университет