Э к о н о м и к а

УДК 338.47

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ АСПЕКТ ФОРМИРОВАНИЯ ТРАНСПОРТНОГО ПРОСТРАНСТВА

***А. М. Скряго*[1], *А. А. Кизим*[2]**

METHODOLOGICAL ASPECT OF TRANSPORT SPACE FORMATION

Skryago A. M., Kizim A. A.

The paper examines methodological aspects related to the application of mathematical methods in economics. In particular, a variant for determining a mathematical model is offered, and categorization approach is used to determine transport space as an economic subspace. The paper includes examples of tables for the calculation of different transport space characteristics that underlie its statistical model.

В настоящей работе предлагается вариант определения математической модели, как системы математических предложений, содержащих определение геометрического пространства модели, систему уравнений «движения» модели в этом пространстве и описание группы симметрии этой системы уравнений. Приводится пример построения соответствующей модели транспортного пространства.

Экономическое пространство — это область действия основных факторов, проявляемых в процессе финансово-хозяйственной деятельности субъектов на определенной территории, где действуют единые законы регулирования экономических процессов.

Известно, что с течением времени эти законы изменяются, формы экономического развития совершенствуются, что влечет за собой изменение или разрушение экономического пространства. Функционирование экономического пространства существенно зависит от сложности его структурных составляющих, которые можно назвать подпространствами. Одним из основных подпространств экономического пространства является транспортное. О нем в дальнейшем пойдет речь.

В качестве метода исследования структуры экономического пространства выбран метод математического моделирования. Несмотря на обилие работ, посвященных «математическим моделям», определение этого понятия в научной литературе (например, в [2, 4, 5, 7]) неполно. Приводимые определения, по существу, представляют математическую модель как некий набор уравнений и неравенств, устанавливающих связь между параметрами моделируемой системы. Часто это алгебраические уравнения и неравенства, дифференциальные уравнения, обыкновенные или в частных производных. Таким образом, реализация математической модели — это решение некоторой системы уравнений и неравенств, что отражает лишь аналитический уровень модели. Специфика неизвестных этой системы определяется в основном характером целевых функций и условиями эксперимента по созданию. Среди системообразующих факторов могут быть дискретные и непрерывные величины, векторные и числовые характеристики и т. д. Следовательно, неизвестные системы уравнений, определяющих модель, порождают некоторое геометрическое пространство. Используя ковариа-

[1]Скряго Александр Михайлович, канд. физ.-мат. наук, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии Кубанского государственного университета.

[2]Кизим Анатолий Александрович, канд. экон. наук, доцент кафедры мировой экономики Кубанского государственного университета.

ционный анализ, можно определить главные факторы системы уравнений, приняв их за базисные факторы того пространства, в координатной системе которого и записана система уравнений, задающая модель. Вместе с координатной системой пространства вводится система параметров, задающих «вид» модели, как части пространства, которое будем называть пространством модели, а систему уравнений модели — уравнениями «движения» модели.

Построение математической модели кроме геометрического и аналитического уровней должно включать и алгебраический, состоящий в построении группы симметрии модели. При этом нужно выделить все геометрические преобразования пространства модели, которые переводят систему уравнений, определяющих модель, в эквивалентную систему, то есть те, при которых модель «не разрушается». Такие преобразования образуют группу, которую будем называть группой симметрии модели. Данная группа действует на пространстве модели и имеет конечный набор инвариантов. В терминах инвариантов система уравнений «движения» модели имеет канонический вид. В прикладных задачах (в том числе и в задачах математической экономики) основные закономерности «поведения» модели следует формулировать в терминах инвариантов, а не в понятиях первичного эксперимента при создании модели. Использование концепции математического моделирования в экономических исследованиях подразумевает логистическую цепочку (рис. 1).

Исследования экономического направления (блок 1, рис. 1) практически не содержит определений, лемм и теорем, с другой стороны (блок 4), исследование в теоретической математике не обходится без них. То есть, логистическая база блока 4 является более содержательной. Промежуточные блоки 2 и 3 последовательно усиливают логистическую базу блока 1, доводя ее до уровня базы блока 4. На уровне связей блоков 2 и 3 и формируется математическая модель.

Наличие в описании модели всех трех уровней (геометрического, аналитического и алгебраического) облегчает поиск адекватной абстрактной математической модели (блок 4). Язык теории категорий [9] вполне подходит для формального описании математической модели. Например, для линейных моделей — это линейная алгебра, где объекты — линейные пространства, а морфизмы — линейные операторы, группы симметрии — это линейные группы, которые сводятся к группам матриц и т.д. Теория категорий как математическая теория достаточно популярна, она позволяет четко уяснить методологическую суть прикладного исследования [7, 9]. Популярность теории категорий как метода исследования может подсказать путь развития соответствующей экономико-математической модели по аналогии с тем, как математическая категория, соответствующая модели, «развивалась» в абстрактной математике.

В современной литературе достаточно много примеров использования в прикладных целях **концепции математического моделирования.** В данной работе предлагается вариант определения математической модели и приводится пример построения соответствующей модели транспортного пространства.

1. Определение математической модели

Математическая модель — это система математических предложений, содержащих определение геометрического пространства модели, систему уравнений «движения» модели в этом пространстве, описание группы симметрии этой системы уравнений.

В качестве примера математической модели (без алгебраической составляющей) можно привести так называемый метод «затраты-выпуск» В. В. Леонтьева для количественного анализа динамики экономики США [3], в отечественной науке называемый экономико-математической моделью межотраслевого баланса. Модель Леонтьева «затраты-выпуск» сводится к системе линейных уравнений и неравенств, в которых переменные — координаты вектора валового выпуска, а элементы матрицы системы (технологической матрицы) — коэффициенты прямых затрат ресурсов по отраслям для производства соответствующего объема товаров. В этой модели пространство отраслевого производства (пространство модели) подразумевается евклидовым, размерность его равна числу отраслей, а система уравнений «движения» является алгебраической системой линейных уравнений и неравенств. Очевидно, что это будет группа неособенных матриц $\mathbf{H}$, перестановочных с технологической матрицей $\mathbf{T}$. В данном случае все эти матрицы $\mathbf{H}$ соответствуют тем ли-

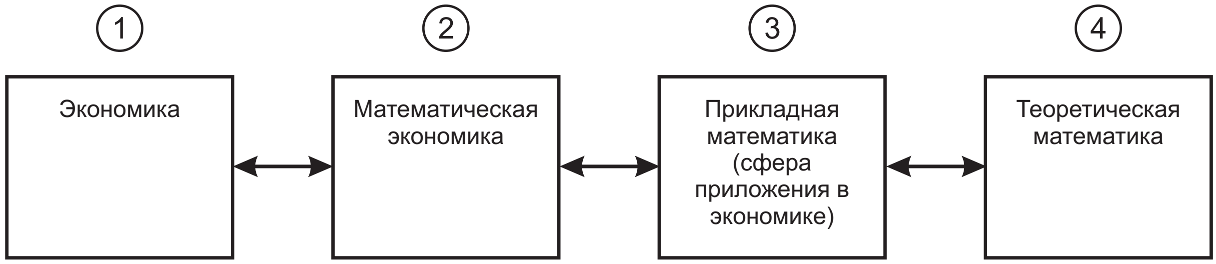

Рис. 1. Схема формирования экономико-математической модели

нейным преобразованиям пространства модели, которые не меняют технологию производства (из перестановочности $\mathbf{HT} = \mathbf{TH}$ следует сохранение матрицы $\mathbf{T}$: $\mathbf{HTH}^{-1} = \mathbf{T}$).

По аналогии с моделью Леонтьева построим модель транспортного пространства. Математическая модель, как любая математическая категория, состоит из объектов и морфизмов. В модели транспортного пространства объекты — точки линейного пространства, т. е. вектора, характеризующие состояние транспортной системы в данный момент времени. В дальнейшем будет показано, как можно определить базис пространства и истолковать координаты вектора. Морфизмами являются линейные преобразования, матрицы которых представляют собой аналог технологических матриц в модели Леонтьева. В дальнейшем будем называть их матрицами управления состояния транспортной системы.

Выбор линейной модели для иллюстрации идеи категорного подхода не является наилучшим или однозначно определяемым существом транспортной системы. Однако линейная модель наиболее разработана, чаще других применяема и наиболее понятна для специалистов самого различного профиля, тем более, что на локальном уровне любая математическая модель линейна.

Для реализации предлагаемой идеи необходимо предварительно проанализировать бытующее определение транспорта и выделить в нем то существенное, что влияет на выбор геометрической модели пространства, в которой функционирует транспорт. Понятие «транспорт» за последние 200 лет серьезно изменилось по содержательному наполнению. Согласно классическому определению транспорт — это механическое средство, позволяющее перемещать грузы и людей в физическом пространстве [1, 8]. С появлением сети автомобильных и железных дорог на первое место вышла стоимостная характеристика. Следующее расширение толкования транспортного средства произошло за счет подключения к понятию «транспорт» трубопроводов. В работе [6] введено также понятие электропроводного транспорта.

Вместе с тем, переход на стоимостные характеристики позволяет расширить перечень видов транспорта, предполагая, например, перемещение финансовых, информационных потоков и т. д. Это дает возможность использовать универсальную количественную характеристику различных видов транспорта. В дальнейшем будем придерживаться следующего определения: транспорт — средство, позволяющее перемещать в экономическом пространстве товар или его стоимостной эквивалент.

Перейдем непосредственно к построению линейной модели транспортного пространства (в дальнейшем по тексту Т-пространство). Прежде всего, рассмотрим 6 видов транспорта: $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}$ — автомобильный; $\mathbf{T}_{\text{в}}$ — воздушный; $\mathbf{T}_{\text{вд}}$ — водный; $\mathbf{T}_{\text{ж}}$ — железнодорожный; $\mathbf{T}_{\text{тр}}$ — трубопроводный; $\mathbf{T}_{\text{э}}$ — электропроводный, как пространствообразующие факторы, которые можно считать независимыми с точностью до технологической зависимости одного вида транспорта от другого. Доля технологической зависимости входит в соответствующий стоимостной коэффициент эксплуатации данного вида транспорта в определенный период времени. Технологическая внутривидовая зависимость не сказывается существенно на видах транспорта, как средствах перемещения продукта в экономическом пространстве. Корреляционная матрица межвидовых транспортных зависимостей предполагается незначимой. Тогда указанные 6 видов транспорта как пространствообразующие факторы можно отнести к базисной системе векторов Т-пространства.

Таблица связей пространств V_T и V_R

Виды ресурсов (ресурсное наполнение транспортного пространства)	Виды транспорта					
	Автомобильный	Воздушный	Водный	Железнодорожный	Трубопроводный	Электропроводный
R_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}	C_{16}
R_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{25}	C_{26}
...	...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...
R_{t-1}	$\mathrm{C}_{t-1,1}$	$\mathrm{C}_{t-1,2}$	$\mathrm{C}_{t-1,3}$	$\mathrm{C}_{t-1,4}$	$\mathrm{C}_{t-1,5}$	$\mathrm{C}_{t-1,6}$
R_t	C_{t1}	C_{t2}	C_{t3}	C_{t4}	C_{t5}	C_{t6}

Следовательно, размерность Т-пространства равна 6 ($\mathbf{dim}\ \mathrm{T} = 6$). Точка $\mathbf{x} \in \mathrm{T}$, имеет вид $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6)$ и, следовательно $\mathbf{x} = x_1\mathbf{T}_{\mathrm{A}} + x_2\mathbf{T}_{\mathrm{B}} + \ldots + x_6\mathbf{T}_{\mathrm{Э}}$.

Таким образом, состояние транспортной системы в конкретной точке $\mathbf{x} \in \mathrm{T}$ — это линейная комбинация базисных видов. Координаты $x_{\text{к}}$ — коэффициенты насыщения данным видом транспорта состояния системы в точке $\mathbf{x}$ в стоимостном эквиваленте (удельная стоимость расходов конкретного вида транспорта в точке $\mathbf{x} \in \mathrm{T}$). Будем считать $x_k \geqslant 0$. Следовательно, Т-пространство — это выпуклое подмножество шестимерного евклидова пространства. Если виды транспорта $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}$, $\mathbf{T}_{\text{в}}, \ldots, \mathbf{T}_{\text{э}}$ линейно независимы, то это выпуклое подмножество является пятимерным симплексом с вершинами $\mathbf{T}_{\mathrm{A}}, \mathbf{T}_{\text{в}}, \ldots, \mathbf{T}_{\text{э}}$, тогда $x_{\text{к}}$ — барицентрические координаты точек симплекса.

После формализации объекта транспортного пространства, рассмотрим вопрос о морфизмах этого пространства. Поскольку транспортное пространство Т — это выпуклое подмножество линейного пространства (обозначим его $\mathrm{V_T}$), морфизмами будут линейные преобразования $\mathbf{F} : V_T \to V_T$, для которых Т-пространство является инвариантным подмножеством, т. е. $\mathbf{F}(T) \subset T$. Если рассматривается вопрос взаимодействия двух транспортных пространств T_1 и T_2, (это могут быть транспортные пространства различных территорий), то морфизмами являются линейные операторы $\mathbf{S} : V_{T_1} \to V_{T_2}$, для которых $\mathbf{S}(T_1) \subset T_2$. Пусть $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_6) \in \mathrm{T}_1$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_6) \in \mathrm{T}_2$. Тогда матрица $\mathbf{S}$ размера $6{\times}6$ ведет себя как технологическая матрица в схеме «вход – выход» $\mathbf{Sx}' = \mathbf{y}'$, где $\mathbf{x}', \mathbf{y}'$ — транспонированные строки $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (рис. 2).

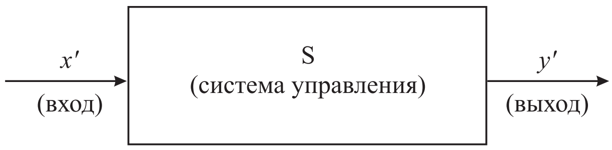

Рис. 2

Таким образом, технология управления транспортным пространством, определяемая матрицей $\mathbf{S}$, распространяется если и не на все Т-пространство, то на достаточно большое подмножество из T_1. Например, на всюду плотное подмножество $A \subset T_1$. Возникает ситуация, в которой приходится рассматривать действие $\mathbf{S}$ на k векторов из T_1, которые $\mathbf{S}$ преобразует в k векторов из T_2. Если k векторов из T_1 записать столбцами матрицы $\mathbf{X}$, а соответствующие им k векторов из T_2 записать столбцами матрицы $\mathbf{Y}$, то действие $\mathbf{S}$ на систему векторов можно представить произведением матриц $\mathbf{SX}{=}\mathbf{Y}$. В результате получим схему (рис. 3) и матричную реализацию $\mathbf{SX}{=}\mathbf{Y}$, где $\mathbf{X}$ — матрица размера $6{\times}k$, в которой каждый столбец является вектором из T_1. Аналогично: $\mathbf{Y}$ — матрица размера $6{\times}k$, все столбцы которой являются векторами из T_2.

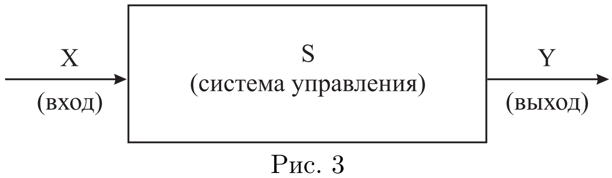

Рис. 3

В матрице $\mathbf{X}$ все столбца различны, а столбцы матрицы $\mathbf{Y}$ могут быть одинаковыми. Произведение матриц $\mathbf{S}$ и $\mathbf{X}$ имеет вполне определенный смысл на языке управления. Пусть $\mathbf{X}^{(i)}$ и $\mathbf{Y}^{(i)}$ соответственно i-тая строка матрицы $\mathbf{X}$ и j-тая строка матрицы $\mathbf{Y}$, тогда $\mathbf{Y}^{(j)} = \sum\limits_{i=1}^{6} s_{ji}\mathbf{X}^{(i)}$. Можно считать, что строчки матрицы $\mathbf{S}$ описывают технологический потенциал управления транспортной системой $\mathbf{X}$. Поскольку $\mathbf{SE}{=}\mathbf{S}$ ($\mathbf{E}$ — единичная матрица), то можно сказать, что этот потенциал «отсчитывается» от единичной матрицы, у которой потенциал управления равен нулю, так как $\mathbf{EX}{=}\mathbf{X}$.

В экономическом пространстве любой территории с транспортом связано еще одно пространство, которое будем называть ресурсным Т-пространством и обозначим его через R. Каждый вид транспорта имеет ресурсное наполнение и представляется вектором ресурсного наполнения, принадлежащим выпуклому подмножеству R, входящему в линейное пространство V_R, размерность которого равна числу базисных ресурсов. Таковыми могут быть товарная и денежная массы, трудовой и информационные ресурсы и т.п.

Предположим, что число базисных ресурсов в нашей модели равно t, т. е. $\dim V_R = t$. Линейное преобразование $\mathbf{P} : \mathrm{V_R} \to \mathrm{V_R}$ — преобразование ресурсного пространства (матрица $\mathbf{P}$ имеет размер $t \times t$, при этом $\mathbf{P}\,(\mathrm{R}) \subset \mathrm{R}$). Пусть $\mathbf{L} : \mathrm{V_T} \to \mathrm{V_R}$ — линейный оператор, ставящий в соответствие вектору $\mathbf{x} \in \mathrm{T} \subset \mathrm{V_T}$ вектор $\mathbf{L}\,(\mathbf{x}) \in \mathrm{R} \in \mathrm{V_R}$, т.е. $\mathbf{L}\,(\mathrm{T}) \subset \mathrm{R}$ (размер матрицы $\mathbf{L}$ равен $t \times 6$). Поскольку преобразование транспортного пространства $T \subset V_T$ адекватно описывается на языке ресурсного обеспечения видов транспорта, необходимо потребовать коммутативность диаграммы (рис. 4)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{V_T} \arrow[r, "\mathrm{L}"] \arrow[d, "\mathrm{F}"'] & \mathrm{V_R} \arrow[d, "\mathrm{P}"] \\
\mathrm{V_T} \arrow[r, "\mathrm{L}"'] & \mathrm{V_R}
\end{tikzcd}$$

Рис. 4

где $\mathbf{P}$ — линейное преобразование $V_R \to V_R$, соответствующее преобразованию $\mathbf{F} : \mathrm{V_T} \to \mathrm{V_T}$ на языке ресурсного обеспечения точек пространства Т.

Коммутативность диаграммы $\mathbf{PL}{=}\mathbf{LF}$ означает, что результат преобразования транспортной системы $\mathbf{F} : \mathrm{T} \to \mathrm{T}$ в пространстве V_T, т. е. на «языке» базисных видов транспорта, переведенный на язык базисных ресурсов транспортной системы оператором $\mathbf{L}$, должен совпадать с результатом преобразования в ресурсном пространстве $\mathbf{P} : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, которое действует на вектора ресурсного наполнения видов транспорта, переведенных на «язык» ресурсов оператором $\mathbf{L}$.

Столбцами матрицы $\mathbf{L}$ являются вектора ресурсного наполнения базисных видов транспорта. Строками — векторы распределения конкретного ресурса по всем базисным видам транспорта (таблица).

Пусть $\sum_k = \sum\limits_{j=1}^{6} C_{kj}$. Введем удельный стоимостной коэффициент $s_{kj} = C_{kj} / \sum_k$. Таким образом, $\sum\limits_{j=1}^{6} s_{kj} = 1$, а удельные стоимостные коэффициенты s_{kj} являются элементами матрицы $\mathbf{S}$.

Для диаграммы (рис. 4) $\mathbf{PL} = \mathbf{LF}$ определяются две группы линейных операторов преобразований $\mathbf{G}_P : V_R \to V_R$ и $\mathbf{G}_F : V_T \to V_T$. $\mathbf{G}_P$ — это группа всех линейных преобразований $\mathbf{H} : \mathrm{V}_R \to \mathbf{V}_R$ таких, что $\mathbf{HP} = \mathbf{PH}$. Соответственно, группа $\mathbf{G}_F$ — это множество всех линейных преобразований $\mathbf{F} : V_T \to V_T$ таких, что $\mathbf{FL} = \mathbf{LF}$. На этом и заканчивается построение математической модели в соответствии с категорным подходом.

Таким образом, мы можем сделать следующие выводы.

1) Пространство модели имеет две реализации: $\mathrm{V_T}$ — пространство по видам транспорта, V_R — пространство с позиции ресурсного наполнения видов транспорта. Линейный оператор $\mathbf{L}$ (сплетающий оператор) связывает оба представления транспортного пространства коммутативной диаграммой (рис. 4). Оба пространства евклидовы, а операторы диаграммы — линейные.

2) Аналитическая часть построенной модели выражается алгебраическими системами линейных уравнений $\mathbf{Sx} = \mathbf{y}$ ($\mathbf{x} \in \mathrm{V_T}$, $\mathbf{y} \in \mathrm{V_R}$), либо матричными уравнениями $\mathbf{SX} = \mathbf{Y}$.

3) Алгебраический уровень модели характеризуется парой групп линейных преобразований $\mathbf{G}_P$ и $\mathbf{G}_F$, связанных коммутативной диаграммой (рис. 4).

Литература

1. *Альбеков А. У., Федько В. П., Митько О. А.* Логистика коммерции. Ростов н/Д: Феникс, 2001. 512 с.
2. *Арнольд В. И.* «Жесткие» и «мягкие» математические модели // Аналитика в государственных учреждениях: Материалы научно-практического семинара. М.: МЦНМО, 2000. 32 с.
3. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984. 260 с.
4. *Жак С. В.* Математические модели менеджмента и маркетинга. Ростов-н/Д: ЛаПО, 1997. 320 с.
5. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике. М.: ДИС, 1997. 365 с.
6. *Кизим А. А.* Транспорт и логистика: организация, планирование сервисных услуг. Краснодар: КубГУ, 2002. 578 с.
7. Математическая энциклопедия. Т. 2. Т. 3 / Под ред. И. М. Виноградова. М.: Сов. энциклопедия, 1977. Т. 2. 1104 с.; Т. 3. 1184 с.
8. Современная логистика. Дж. С. Джонсон, Дональд Ф. Вуд, Дэниел Л. Вордлоу, Поль Р. Мэрфи-мл. / Пер. с англ. М.: Издат. дом. «Вильямс», 2002. 624 с.
9. *Цаленко М. Ш., Шульгейфер Е. Г.* Основы теории категории. М.: Наука, 1974. 202 с.

Статья поступила 10 марта 2004 г.
Кубанский государственный университет