ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2014. №4. С. 13–20

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ВИБРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА В ПОКРЫТИЯХ С ДЕФЕКТАМИ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Гладской И. Б., Грищенко Д. В., Лозовой В. В., Плужник А. В., Шестопалов В. Л.

CONCERNING THE PROBLEM OF VIBRATIONAL PROCESS LOCALIZATION ON COATINGS WITH DEFECTS

Babeshko V. A.*, Evdokimova O. V.**, Babeshko O. M.*, Gladskoi I. B.*, Grishchenko D. V.*, Lozovoy V. V.**, Pluzhnik A. V.**, Shestopalov V. L.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. We described earlier, that both in dynamic and in static mixed boundary value problems can occur the localization of processes, which are described by the considered boundary problem. At the same time some new phenomena, which were not investigated earlier, are revealed. Block element approach is a useful tool for the investigation of phenomena of localization processes because the wording of the conditions of localization is based on the integral method of factorization, which is included in the algorithm of block elements building. The conditions of vibration localization process by the example of the mixed boundary problem concerning the vibration of coatings with defects are listed below. The investigation is based on the block element approach and also on "natural viruses" theory developed earlier in the study. The connection between the integral equations of the considered boundary value problem with the same ones in the specified theory is found.

Keywords: localization, anomaly natural process, natural virus, boundary-value problems, differential equations

---

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Гладской Игорь Борисович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: i.glad@list.ru.

Грищенко Дмитрий Вадимович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: icmm@fpm.kubsu.ru.

Лозовой Виктор Викторович, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru

Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru

Шестопалов Валерий Леонидович, канд. техн. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: vlshestopalov@gmail.com

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (12-01-00330, 12-01-00332, 13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 14-08-00404, 13-01-12003-м), гранта Президента РФ (НШ-1245.2014.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН (проект 43), выполняемых Южным научным центром РАН.

1. Возможность локализации процессов, описываемых смешанными граничными задачами, достаточно детально описана в [1–4]. Процесс локализации отличается от резонансного состояния прежде всего тем, что его параметры нельзя определить традиционным вариационным подходом, который применяется для выявления параметров резонанса. Для выявления локализации применяется достаточно сложный математический аппарат, использующий факторизационные методы, метод блочного элемента, тесно связанного с применением топологии, внешнего анализа. Практически все смешанные граничные задачи при некоторых соотношениях параметров, названных «проявлениями природного вируса» [1–4], приводятся к локализации решений. Ниже на примере задачи [5] показано, каким образом достигается локализация процесса, описываемого смешанной граничной задачей. Не вдаваясь в детали алгоритма применения блочных элементов в граничных задач и факторизационных подходов, изложенных в [4–14], приведем определяющие уравнения для блочной структуры, состоящей из двумерных фрагментов покрытия на трехмерной подложке, сохранив обозначения работ [5–7]. Уравнение Кирхгофа для некоторого блока b покрытия, $b = 1{,}2, \ldots, B$, занимающего область Ω_b с границей $\partial\Omega_b$, при вертикальных гармонических воздействиях напряжением t_{3b} имеет вид

$$r_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right) u_{3b} - \varepsilon_{5b} g_{3b} = \varepsilon_{5b} t_{3b}, \qquad (1)$$

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = (\varepsilon_{3b}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{4b})U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2} g_{3b}, \quad b = 1{,}2, \ldots, B.$$

Здесь u_{3b} — амплитуда вертикальных перемещений пластины

$$\begin{gathered} \varepsilon_{1b} = 0{,}5(1 - \nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1 + \nu_b), \\ \varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12}, \quad \varepsilon_{4b} = \omega^2 \rho_b \frac{1 - \nu_b^2}{E_b}, \\ \varepsilon_{5b} = \frac{1 - \nu_b^2}{E_b h_b}. \end{gathered} \qquad (2)$$

Здесь для пластин приняты обозначения: ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h — толщина, ρ — плотность, ω — частота колебаний, g_{3b}, t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b, $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

В локальной системе координат $x_1 x_2 x_3$ с плоскостью $x_1 x_2$, совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3, направленной по нормали к пластине, осью ox_1, направленной по касательной к границе, осью ox_2 — по нормали к границе, граничные условия могут быть заданы любыми двумя из представленных ниже четырех соотношений, а именно, в виде вертикального перемещения на границе

$$u_{3b} = f_1(\partial\Omega_b); \qquad (3)$$

поворота срединной плоскости вокруг оси x_1,

$$\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} = f_2(\partial\Omega_b); \qquad (4)$$

момента изгиба на границе

$$\begin{gathered} M = -D\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) = f_3(\partial\Omega_b), \\ D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)}; \end{gathered} \qquad (5)$$

перерезывающей силы на границе

$$Q = -D\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = f_4(\partial\Omega_b). \qquad (6)$$

Соотношения между напряжениями на поверхности слоистой среды g_{kb}, $k = 1{,}2{,}3$ и перемещениями u_k, $k = 1{,}2{,}3$, имеют вид (2), со свойствами

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3) G(\alpha_1, \alpha_2) \times e^{-i\langle\alpha, x\rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \qquad (7)$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2, 0) = O(A^{-1}),$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty.$$

Здесь $K\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3\right)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k, в частности, мероморфная, ее многочисленные примеры приведены в [15–19].

2. Для рассматриваемого случая в [5–7] построены функциональные уравнения граничной задачи для каждого блока, причем вопрос взаимодействия блоков не изучался.

Для исследования взаимодействия блоков ограничимся блочной структурой, состоящей из двух разнотипных полубесконечных пластин Кирхгофа, контактирующих по координатной оси x_1. Тогда, отправляясь от функциональных уравнений для пластин, имеющих в общем случае вид [5–7]

$$\begin{gathered}R_b(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})U_{3b}\equiv\\ \equiv(\varepsilon_{3b}(\alpha_{1b}^2+\alpha_{2b}^2)^2-\varepsilon_{4b})U_{3b}=\\ =-\int\limits_{\partial\Omega_b}\omega_b+\varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(g_{3b}+t_{3b}),\qquad(8)\end{gathered}$$

$$b=1{,}2,\ldots,B,$$

$$\begin{gathered}\omega_b=\varepsilon_{3b}e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_2^2}-\\ -\alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}+i\alpha_2^3u_{3b}+2\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}\Bigg]dx_1+\\ +\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3b}\Bigg]dx_2\Bigg\},\end{gathered}$$

а в частном случае прямолинейной границы — форму

$$\begin{gathered}\omega_b=\varepsilon_{3b}e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[i\alpha_2MD^{-1}-QD^{-1}-\\ -(\alpha_2^2+\nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2^r}+\\ +i\alpha_2\left[\alpha_2^2+(2-\nu)\alpha_1^2\right]u_{3b}\Bigg]\Bigg\}dx_1,\end{gathered}$$

получаем на левом берегу дефекта следующую систему псевдодифференциальных уравнений [12]

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}}\Bigg\{i\alpha_{21-}D_\lambda^{-1}M_\lambda-D_\lambda^{-1}Q_\lambda-\\ -(\alpha_{21-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2^\lambda}+\\ +i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}e^{i\alpha_1^\lambda x_1^\lambda}dx_1^\lambda+\\ +\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_{3\lambda}+t_{3\lambda})\Bigg\rangle=0,\qquad(9)\end{gathered}$$

$$\alpha_2=\alpha_{21-},\quad\xi_1^\lambda\in\partial\Omega_{b\lambda},$$

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}}\Bigg\{i\alpha_{22-}D_\lambda^{-1}M_\lambda-D_\lambda^{-1}Q_\lambda-\\ -(\alpha_{22-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2^\lambda}+\\ +i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}\times\\ \times e^{i\alpha_1^\lambda x_1^\lambda}dx_1^\lambda+\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_{3\lambda}+t_{3\lambda})\Bigg\rangle=0,\end{gathered}$$

$$\alpha_2=\alpha_{22-},\quad\xi_1^\lambda\in\partial\Omega_{b\lambda}.$$

На правом берегу дефекта такие уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{br}}\Bigg\{i\alpha_{21+}D_r^{-1}M_r-D_r^{-1}Q_r-\\ -(\alpha_{21+}^2+\nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r}+\\ +i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}\times\\ \times e^{i\alpha_1^rx_1^r}dx_1^r+\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(g_{3r}+t_{3r})\Bigg\rangle=0,\qquad(10)\end{gathered}$$

$$\alpha_2=\alpha_{21+},\quad\xi_1^r\in\partial\Omega_{br},$$

$$\begin{gathered}\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{br}}\Bigg\{i\alpha_{22+}D_r^{-1}M_r-D_r^{-1}Q_r-\\ -(\alpha_{22+}^2+\nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2^r}+\\ i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}\times\\ \times e^{i\alpha_1^rx_1^r}dx_1^r+\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(g_{3r}+t_{3r})\Bigg\rangle=0,\end{gathered}$$

$$\alpha_2=\alpha_{22+},\quad\xi_1^r\in\partial\Omega_{br}.$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{-1}$ — обратный оператор к одномерному преобразованию Фурье.

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{21-}=-i\sqrt{(\alpha_1^r)^2-\sqrt{\varepsilon_{4\lambda}/\varepsilon_{3\lambda}}},$$

$$\alpha_{22-}=-i\sqrt{(\alpha_1^r)^2+\sqrt{\varepsilon_{4\lambda}/\varepsilon_{3\lambda}}},$$

$$\alpha_{21+} = i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 - \sqrt{\varepsilon_{4r}/\varepsilon_{3r}}},$$

$$\alpha_{22+} = i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 + \sqrt{\varepsilon_{4r}/\varepsilon_{3r}}}.$$

Введем следующую систему обозначений

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g,$$

$$y_{1\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$

$$y_{1r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 Q_r,$$

$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$

$$z_{1r} = \mathbf{F}_1\frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(g_\lambda + t_\lambda),$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22-})(g_\lambda + t_\lambda),$$

$$k_{1r} = \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(g_r + t_r),$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22+})(g_r + t_r).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$-i\alpha_{21-}y_{1\lambda} + y_{2\lambda} - (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda\alpha_1^2)z_{1\lambda} + \\ + i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]z_{2\lambda} + k_{1\lambda} = 0,$$

$$-i\alpha_{22-}y_{1\lambda} + y_{2\lambda} - (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda\alpha_1^2)z_{1\lambda} + \\ + i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]z_{2\lambda} + k_{2\lambda} = 0,$$

$$-i\alpha_{21+}y_{1r} + y_{2r} - (\alpha_{21+}^2 + \nu_r\alpha_1^2)z_{1r} + \\ + i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right]z_{2r} + k_{1r} = 0,$$

$$-i\alpha_{22+}y_{1r} + y_{2r} - (\alpha_{22+}^2 + \nu_r\alpha_1^2)z_{1r} + \\ + i\alpha_{22+}\left[\alpha_{22+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right]z_{2r} + k_{2r} = 0.$$

В матричной форме она имеет вид

$$\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda\mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0, \\ \mathbf{A}_r\mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r = 0, \qquad (11)$$

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11\lambda} & a_{12\lambda} \\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\lambda = \begin{pmatrix} b_{11\lambda} & b_{12\lambda} \\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11r} & a_{12r} \\ a_{21r} & a_{22r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} b_{11r} & b_{12r} \\ b_{21r} & b_{22r} \end{pmatrix},$$

$$a_{11\lambda} = -i\alpha_{21-}, \quad a_{12\lambda} = 1,$$

$$a_{21\lambda} = -i\alpha_{22-}, \quad a_{22\lambda} = 1,$$

$$b_{11\lambda} = (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda\alpha_1^2),$$

$$b_{12\lambda} = -i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21\lambda} = (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda\alpha_1^2),$$

$$b_{22\lambda} = -i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$a_{11r} = -i\alpha_{21+}, \quad a_{12r} = 1,$$

$$a_{21r} = -i\alpha_{22+}, \quad a_{22r} = 1,$$

$$b_{11r} = (\alpha_{21+}^2 + \nu_r\alpha_1^2),$$

$$b_{12r} = -i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21r} = (\alpha_{22+}^2 + \nu_r\alpha_1^2),$$

$$b_{22r} = -i\alpha_{22+}\left[\alpha_{22+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right].$$

Достоинство топологического метода решения граничных задач состоит в том, что он охватывает все естественные виды граничных условий, которые могут быть сформулированы на дефектах, трещинах или разломах, и независимо от типа нагружения покрытий позволяет однотипно исследовать граничную задачу. Рассматривая псевдодифференциальные уравнения, можно видеть, что для случая только вертикальных воздействий на покрытие существует значительное множество соотношений между напряжениями и перемещениями, действующими на берега трещины, характеризующих дефект — потенциальную возможность разрушения целостности покрытия. Некоторые из типов разрушений могут оказаться безопасными для эксплуатации изделия с покрытием, в то время, как другие могут оказаться недопустимыми. Для выявления состояния покрытия с трещинами необходим детальный анализ решений граничной задачи.

Рассмотрим несколько примеров треснувших покрытий. При отсутствии дефекта напряжения и перемещения берегов трещины обязаны совпадать.

Рассмотрим тот случай, когда дефект представляет свободные от напряжений края трещины, то есть $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r = 0$. Тогда из системы (11) находим

$$\mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda, \quad \mathbf{Z}_r = -\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r \qquad (12)$$

Рассмотрим случай, когда берега дефекта жестко закреплены, не могут смещаться, то есть $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r = 0$. Тогда имеем решение в форме

$$\mathbf{Y}_\lambda = -\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda, \quad \mathbf{Y}_r = -\mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{K}_r \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r$ и $y_{1\lambda} = y_{1r} = 0$. Тогда, решение дается соотношениями

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = -\mathbf{C}_{\lambda r}^{-1}(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r),$$

$$\mathbf{C}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r,$$

$$\mathbf{C}_{\lambda r} = \begin{pmatrix} c_{12\lambda} & -c_{12r} \\ c_{22\lambda} & -c_{22r} \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = \{y_{2\lambda}, y_{2r}\},$$

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{0, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Y}_r = \{0, y_{2r}\},$$

$$\mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda.$$

Этот случай можно отнести к категории наличия скрытого дефекта, не наблюдаемого визуально, поскольку перемещения и углы поворота пластин на дефекте непрерывны. Тем не менее, имеет место нарушение связности для компоненты напряжений, что свидетельствует о присутствии дефекта. Подобные примеры различных типов дефектов, трещин или разломов можно продолжить. Чтобы понять возможную причину разрушения покрытия в исследуемом месте, целесообразно изучить случай отсутствия дефекта и определить напряженно-деформированное состояние в этом случае. Тогда надо принять $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r$, $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r$. В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\lambda &= (\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{B}_\lambda - \mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{B}_r)\times \\ &\quad\times(\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{K}_r), \\ \mathbf{Z}_\lambda &= (\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r)\times \\ &\quad\times(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r). \end{aligned} \tag{15}$$

Таким образом, из приведенных примеров видно, что топологический метод для данного типа граничных задач удобен и позволяет однотипно исследовать задачи как с дефектами всех типов, так и при их отсутствии.

Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и каждого блока, внеся в них соответствующие граничные условия и решив извлеченные из псевдодифференциальных уравнений интегральные уравнения, получим из (8) представление решений в каждом блоке, соответствующем полуплоскости в виде

$$\begin{aligned} u_{3\lambda} &= \mathbf{F}_2^{-1}\left[R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\times \\ &\quad\times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda)\right\rangle, \\ u_{3r} &= \mathbf{F}_2^{-1}\left[R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\times \\ &\quad\times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r + \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(g_r + t_r)\right\rangle \end{aligned} \tag{16}$$

3. Представим соотношение (7) при $x_3 = 0$ в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_\lambda u_3(x_1, x_2{,}0) + \mathbf{P}_r u_3(x_1, x_2{,}0) &= \\ = \mathbf{F}_2^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2{,}0)&\times \\ \times\left[G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)\right]&, \end{aligned} \tag{17}$$

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\lambda g(x_1, x_2),$$

$$G_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_r g(x_1, x_2).$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$ — проекторы на левую и правую полуплоскости, являющиеся носителями соответствующих плит. Внося соотношения (16) в левые части (17) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$\begin{aligned} &\left[R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\times \\ &\quad\times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}(G_\lambda + T_\lambda)\right\rangle + \\ &\quad+\left[R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1}\times \\ &\quad\times\left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r + \varepsilon_{5r}(G_r + T_r)\right\rangle - \\ &-K(\alpha_1, \alpha_2{,}0)\left[G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)\right] = 0, \end{aligned}$$

$$T_\lambda = \mathbf{F}_2 t_\lambda(x_1, x_2), \quad T_r = \mathbf{F}_2 t_r(x_1, x_2).$$

Функции $G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $G_r(\alpha_1, \alpha_2)$, являющиеся преобразованиями Фурье функций с носителями в полуплоскостях, являются регулярными функциями параметров α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = G_-(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$G_r(\alpha_1, \alpha_2) = G_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида

$$MG_+ = G_- + V, \quad M = K_1 K_2^{-1},$$

$$K_1 = R_r^{-1}\varepsilon_{5r} - K, \quad K_2 = K - R_\lambda^{-1}\varepsilon_{5\lambda}, \quad (18)$$

$$V = K_2^{-1}\left(R_\lambda^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + R_r^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r - \right.$$
$$\left. - R_\lambda^{-1}\varepsilon_\lambda T_\lambda - R_r^{-1}\varepsilon_r T_r\right).$$

Последнее эквивалентно исследованию интегрального уравнения Винера–Хопфа следующего вида

$$\int\limits_0^\infty m(x-\xi)g(\xi)d\xi = v^+(x),$$

$$m(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} M(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

$$v^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} V(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad x \geqslant 0.$$

Для дальнейшего исследования условий локализации вибрационного процесса и построения параметров локализации достаточно воспользоваться условиями, приведенными в [4].

Решение функционального уравнения (18) не представляет сложности.

Способы построения его точных или приближенных решений можно найти в работах [15–19].

Учитывая, что при $\alpha_2 \to \pm\infty$ имеет место соотношение $M \to \mathrm{const}$, решение может быть записано в форме

$$G_+ = M_+^{-1}\left\{M_-^{-1}V\right\}^+,$$

$$G_- = -M_-\left\{M_-^{-1}V\right\}^-, \quad M = M_+M_-,$$

$$M_-^{-1}V = \left\{M_-^{-1}V\right\}^+ + \left\{M_-^{-1}V\right\}^-.$$

Здесь приняты обозначения работы [16].

Построенные таким образом решения обладают следующей структурой:

$$G_+(\alpha_1,\alpha_2) = C_{1+}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$
$$+ C_{2+}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) +$$
$$+ C_{3+}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$G_-(\alpha_1,\alpha_2) = C_{1-}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$
$$+ C_{2-}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) +$$
$$+ C_{3-}(\alpha_1,\alpha_2). \quad (19)$$

Здесь функции $C_{n+}(\alpha_1,\alpha_2)$, $C_{n-}(\alpha_1,\alpha_2)$, $n = 1{,}2{,}3$ являются известными, а $G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})$, $G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})$ требуется определить. Для их определения положим в первом уравнении $\alpha_2 = \alpha_{2+}$, а во втором — $\alpha_2 = \alpha_{2-}$. Получаем простую алгебраическую систему для определения неизвестных $G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})$, $G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})$

$$G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) = C_{1+}(\alpha_1,\alpha_{2+})G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$
$$+ C_{2+}(\alpha_1,\alpha_{2+})G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) + C_{3+}(\alpha_1,\alpha_{2+}),$$

$$G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) = C_{1-}(\alpha_1,\alpha_{2-})G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) +$$
$$+ C_{2-}(\alpha_1,\alpha_{2-})G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) + C_{3-}(\alpha_1,\alpha_{2-}),$$

и из которой легко находятся искомые функции.

Внесение найденных решений в соотношения (12)–(15), в зависимости от поставленной граничной задачи, с последующим использованием соотношений (19), (16) дает возможность полностью определить напряженно-деформированное состояние покрытия с любым из рассматриваемых дефектов или без них.

Вывод

Таким образом, исследование показало, что наличие дефектов в смешанных граничных задачах может приводить к локализации вибрационного процесса.

Литература

1. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О локализации энергии природных процессов и природные вирусы // ДАН. 2013. Т. 448, № 4. С. 406–409.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* «Вирусная теория» некоторых природных аномалий // ДАН. 2012. Т. 447. № 6. С. 624–628.

4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О локализации, резонансах и некоторых аномальных явлениях // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 1. С. 5–10.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О скрытых дефектах в наноструктурах, телах с покрытиями и сейсмологии // ДАН. 2014. Т. 457. № 1. С. 45–49.
6. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Федоренко А.Г.* К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход // ДАН. 2013. Т. 450. № 2. С. 166–170.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Федоренко А.Г., Шестопалов В.Л.* К проблеме покрытий с трещинами в сейсмологии и наноматериалах // Механика твердого тела. 2013. № 5. С. 39–45.
8. *Бабешко В.А. Павлова А.В., Ратнер С.В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382, № 5. С. 625–628.
9. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 767–770.
10. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 163–167.
11. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М, Евдокимова О.В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
14. *Бабешко В.А., Бабешко О.М, Евдокимова О.В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
15. *Бабешко В.А. Белянкова Т.И., Калинчук В.В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.
16. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
17. *Бабешко В.А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1293–1296.
18. *Бабешко В.А.* Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 505–512.
19. *Бабешко В.А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1094–1097.

References

1. Babeshko V.A., Rittser D., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O lokalizatsii energii prirodnykh protsessov i prirodnye virusy [On the localization energy of natural processes and natural viruses]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2013, vol. 448, no. 4, pp. 406–409. (In Russian)
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O "virusnoy" teorii nekotorykh anomal'nykh prirodnykh yavleniy [About "viral" theory some anomalous natural phenomena]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2012, vol. 447, no. 1, pp. 33–37. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. "Virusnaya teoriya" nekotorykh prirodnykh anomaliy [A "viral theory" some natural anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2012, vol. 447, no. 6, pp. 624–628. (In Russian)
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O lokalizatsii, rezonansakh i nekotorykh anomal'nykh yavleniyakh [About localization, resonances and some abnormal phenomena]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no. 1, pp. 5–10. (In Russian)
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O skrytykh defektakh v nanostrukturakh, telakh s pokrytiyami i seysmologii [Hidden defects in nanostructures, bodies, coatings and seismology]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no. 1, pp. 45–49. (In Russian)
6. Babeshko V.A., Rittser D., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Fedorenko A.G. K teorii prognoza seysmichnosti na osnove mekhanicheskoy kontseptsii, topologicheskiy podkhod [To the theory of prediction of seismicity based on mechanical concepts topological approach]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2013, vol. 450, no. 2, pp. 166–170. (In Russian)
7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Fedorenko A.G., Shestopalov V.L. K probleme pokrytiy s treshchinami v seysmologii i nanomaterialakh [The problem surfaces with cracks in seismology and nanomaterials]. *Mekhanika tverdogo tela* [Rigid Body Mechanics], 2013, no. 5, pp. 39–45. (In Russian)

8. Babeshko V.A. Pavlova A.V., Ratner S.V., Vil'yams R. K resheniyu zadachi o vibratsii uprugogo tela, soderzhashchego sistemu vnutrennikh polostey treshchin [To the solution of the problem of vibration of the elastic body containing a system of internal cavities cracks]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2002, vol. 382, no. 5, pp. 625–628. (In Russian)
9. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Metod faktorizatsii v kraevykh zadachakh v neogranichennykh oblastyakh [Method of factorization in boundary-value problems in unbounded domains]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2003, vol. 392, no. 6, pp. 767–770. (In Russian)
10. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matrits-funktsiy [Formula factorization of some meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)
11. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Metod faktorizatsii resheniya nekotorykh kraevykh zadach [Method factorization solution of some boundary value problems]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2003, vol. 389, no. 2, pp. 184–188. (In Russian)
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob avtomorfizme i psevdodifferentsial'nykh uravneniyakh v metode blochnogo elementa [About the automorphism and pseudodifferential equations in method block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 5, pp. 623–625. (In Russian)
13. Babeshko V.A., Babeshko O.M, Evdokimova O.V. K probleme issledovaniya materialov s pokrytiyami [The problem of research materials and coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 1, pp. 49–52. (In Russian)
14. Babeshko V.A., Babeshko O.M, Evdokimova O.V. K probleme otsenki sostoyaniya materialov s pokrytiyami [The problem of assessing the condition of materials and coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2006, vol. 409, no. 4, pp. 481–485. (In Russian)
15. Babeshko V.A. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. Metod fiktivnogo pogloshcheniya v zadachakh teorii uprugosti dlya neodnorodnogo poluprostranstva [Method bogus absorption problems of elasticity theory for inhomogeneous half-space]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2002, vol. 66, iss. 2, pp. 276–284. (In Russian)
16. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
17. Babeshko V.A. O sistemakh integral'nykh uravneniy dinamicheskikh kontaktnykh zadach [About systems of integral equations of dynamic contact problems]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 220, no. 6, pp. 1293–1296. (In Russian)
18. Babeshko V.A. Staticheskie i dinamicheskie kontaktnye zadachi so stsepleniem [Static and dynamic contact problems with adhesion]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1975, vol. 39, iss. 3, pp. 505–512. (In Russian)
19. Babeshko V.A. Faktorizatsiya odnogo klassa matrits-funktsiy i ee prilozheniya [Factorization of a class of matrix functions and its applications]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 223, no. 5, pp. 1094–1097. (In Russian)

Статья поступила 7 декабря 2014 г.