

УДК 539.3

КОЛЕБАНИЯ НЕОДНОРОДНОГО ПОРИСТОУПРУГОГО СЛОЯ**Ватульян А. О., Гусаков Д. В.**

OSCILLATIONS OF THE INHOMOGENEOUS POROELASTIC LAYER

Vatulyan A. O., Gusakov D. V.

South Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru, gusakov.dv@yandex.ru

Abstract. In this paper we consider the question of constructing wave fields in the problem of steady oscillations of an inhomogeneous over thickness poroelastic layer under the influence of load on the top face. The solutions of this problem, in the general case of inhomogeneous characteristics, can be constructed only numerically. Due to this fact the process of solving the problem is divided into three steps. The first step is the Fourier transformation over the longitudinal coordinate. The second step is the shooting method for constructing the solution in the transformants. In this step much attention is paid to the problem of stiff differential equations systems. And the final step is the numerical inversion of the transformation. The results of calculations of the wave fields for various values of the wave number and various irregularities are presented in the end of the paper.

Keywords: poroelasticity, inhomogeneity, oscillations

Введение

Теория пороупругости изучает динамическое поведение пористых твердых материалов, насыщенных жидкостью либо газом. Впервые данная теория была предложена М. А. Био [1, 2]. В своей классической форме пороупругость использует закон Гука для упругого поведения пористого скелета и закон Дарси для описания движения жидкости сквозь поры скелета. Подход, предложенный Био, позволяет эффективно моделировать поведение костной ткани, насыщенной жидкостью, водонасыщенных грунтов, а также других объектов пористой структуры.

Теория Био была эффективно применена для исследования множества различных динамических процессов, встречающихся в широком спектре задач для естественных и синтетических материалов, включая биомеханику [2–4].

Исследованию динамических задач для пористоупругих сред посвящено большое количество как зарубежных, так и отечественных работ. В [5] проанализированы фундаментальные решения для изотропной среды Био в нестационарном режиме, сформули-

рованы системы ГИУ и получены численные результаты для ряда практически важных задач. Вопросам распространения волн в неоднородной пороупругой среде и некоторым проблемам идентификации посвящена работа [6]. С точки зрения геомеханики в [7, 8] представлены подходы, позволяющие моделировать распространение волн в однородных водонасыщенных структурах.

Отдельного внимания заслуживает вопрос динамического поведения неоднородных пороупругих структур. В настоящей работе изучаются вынужденные колебания неоднородного пористоупругого слоя.

1. Постановка задачи

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω пористоупругого слоя толщины H в условиях плоской деформации под действием распределенной нагрузки, приложенной к границе.

Будем считать, что материал слоя является трансверсально-изотропным неоднородным по толщинной координате. В рамках

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории упругости Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Гусаков Дмитрий Владимирович, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: gusakov.dv@yandex.ru.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования» (114072870112) «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур».

плоской деформации примем, что

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1(x_1, x_2), \\ u_2 &= 0, \\ u_3 &= u_3(x_1, x_3). \end{aligned}$$

Тогда основные уравнения для поставленной задачи имеют следующий вид:

– уравнения движения:

$$\begin{aligned} \sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} + \rho\omega^2 u_1 &= 0, \\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \rho\omega^2 u_3 &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

– определяющие соотношения [2]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= C_{11}u_{1,1} + C_{13}u_{3,3} - A_{11}p, \\ \sigma_{33} &= C_{13}u_{1,1} + C_{33}u_{3,3} - A_{33}p, \\ \sigma_{13} &= C_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

– уравнения для давления в порах [2]:

$$\begin{aligned} (K_{11}p_{,1})_{,1} + (K_{33}p_{,3})_{,3} + \\ + i\omega(A_{11}u_{1,1} + A_{33}u_{3,3}) + i\omega\frac{\phi^2}{R}p = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где u_i – компоненты вектора смещений, p – давление в порах, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений, C_{ij} – коэффициенты тензора упругих модулей, A_{ii} – коэффициенты Био, K_{ii} – коэффициенты проницаемости, R – гидростатическая константа, ϕ – пористость, ρ – плотность.

Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} x_3 = 0 : u_1 = 0, \quad u_3 = 0, \quad p_{,3} = 0; \\ x_3 = H : \sigma_{33} = F_1(x_1), \quad \sigma_{13} = F_2(x_1), \\ p = p_0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Механические граничные условия соответствуют закреплению слоя по нижней границе $x_3 = 0$ и заданию нормальной и касательной нагрузки при $x_3 = H$. Граничные условия на давление в порах соответствуют заданию давления в порах при $x_3 = H$ и условию непроницаемости при $x_3 = 0$.

Стоит отметить, что величины материальных констант (и значения функций), входящих в уравнения (1.1)–(1.3) для реальных пористоупругих материалов, на несколько порядков различаются между собой, что осложняет прямое применение численных методов при исследовании задачи. В качестве примера приведем значения констант

для пористоупругого материала – компактная кость [3]:

$$\begin{aligned} C_{11} &= 11,2, \quad C_{13} = 6,98, \quad C_{33} = 21,1, \\ C_{55} &= 2,02, \quad R = 0,169 \text{ (ГПа)} \\ A_{11} &= 0,567, \quad A_{33} = 0,494, \\ \phi &= 0,1, \quad \rho = 1469 \text{ (кг/м}^3\text{)} \\ K_{11} &= 1,47 \cdot 10^{-29}, \\ K_{33} &= 6,36 \cdot 10^{-13} \text{ (м}^2\text{)} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Аналогично [6] введем следующие безразмерные параметры и функции:

$$\begin{aligned} x_i &= \xi_i H, \quad u_k = \bar{u}_k H, \quad p = \bar{p} P^*, \\ \sigma_{ij} &= \bar{\sigma}_{ij} C_m, \quad F_j = \bar{F}_j C_m, \\ \gamma_1(\xi) &= \frac{C_{11}(x)}{C_m}, \quad \gamma_4(\xi) = \frac{C_{33}(x)}{C_m}, \\ \gamma_5(\xi) &= \frac{C_{55}(x)}{C_m}, \quad \gamma_7(\xi) = \frac{C_{13}(x)}{C_m}, \\ \beta_j(\xi) &= \frac{A_{jj}(x)P^*}{C_m}, \quad \eta_j(\xi) = \frac{A_{jj}(x)H}{K_m P^*} \sqrt{\frac{C_m}{\rho}}, \\ \delta(\xi) &= \frac{\phi^2 H}{K_m R(x)} \sqrt{\frac{C_m}{\rho}}, \\ \kappa^2 &= \frac{\rho\omega^2 H^2}{C_m}, \quad \mu_j(\xi) = \frac{K_{jj}(x)}{K_m}, \\ K_m &= \max_{\xi \in [0,1]} K_{33}, \quad C_m = \max_{\xi \in [0,1]} C_{33}. \end{aligned}$$

С учетом введенных обозначений система уравнений (1.1)–(1.3) запишется в виде

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{11,1} + \bar{\sigma}_{13,3} + \kappa^2 \bar{u}_1 &= 0, \\ \bar{\sigma}_{13,1} + \bar{\sigma}_{33,3} + \kappa^2 \bar{u}_3 &= 0, \\ \bar{\sigma}_{11} &= \gamma_1 \bar{u}_{1,1} + \gamma_7 \bar{u}_{3,3} - \beta_1 \bar{p}, \\ \bar{\sigma}_{33} &= \gamma_7 \bar{u}_{1,1} + \gamma_4 \bar{u}_{3,3} - \beta_3 \bar{p}, \\ \bar{\sigma}_{13} &= \gamma_5 (\bar{u}_{1,3} + \bar{u}_{3,1}), \\ \mu_1 \bar{p}_{,11} + (\mu_3 \bar{p}_{,3})_{,3} + \\ + i\kappa (\eta_1 \bar{u}_{1,1} + \eta_3 \bar{u}_{3,3}) + i\kappa \delta \bar{p} &= 0; \\ \xi_3 = 0 : \bar{u}_1 &= 0, \quad \bar{u}_3 = 0, \quad \bar{p}_{,3} = 0; \\ \xi_3 = 1 : \bar{\sigma}_{33} &= \bar{F}_1(\xi_1), \quad \bar{\sigma}_{13} = \bar{F}_2(\xi_1), \\ \bar{p} &= p_0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В дальнейшем знак « $\bar{}$ », обозначающий безразмерную величину, опустим.

Для решения задачи применим интегральное преобразование Фурье по переменной ξ_1 . Введем следующие обозначения:

$$\Sigma_{kl} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{kl} e^{i\alpha\xi_1} d\xi_1, \quad U_k = \int_{-\infty}^{\infty} u_k e^{i\alpha\xi_1} d\xi_1,$$

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} p e^{i\alpha\xi_1} d\xi_1.$$

Тогда задача (1.6)–(1.7) примет вид

$$\begin{aligned} -i\alpha\Sigma_{11} + \Sigma'_{13} + \kappa^2 U_1 &= 0, \\ -i\alpha\Sigma_{13} + \Sigma'_{33} + \kappa^2 U_3 &= 0, \\ \Sigma_{11} &= -i\alpha\gamma_1 U_1 + \gamma_7 U'_3 - \beta_1 P, \\ \Sigma_{33} &= -i\alpha\gamma_7 U_1 + \gamma_4 U'_3 - \beta_3 P, \\ \Sigma_{13} &= \gamma_5 (U'_1 - i\alpha U_3), \\ -\alpha^2 \mu_1 P + (\mu_3 P')' + \\ &+ i\kappa (-i\alpha\eta_1 U_1 + \eta_3 U'_3) + i\kappa\delta P = 0; \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, P' = 0; \\ \xi_3 = 1 : \Sigma_{33} = F_1(\alpha), \Sigma_{13} = F_2(\alpha), \\ P = P_0(\alpha); \end{aligned}$$

Вводя новую функцию

$$S = \mu_3 P', \quad (1.9)$$

приведем систему (1.8) к каноническому виду с учетом (1.9)

$$\begin{aligned} U'_1 &= \frac{1}{\gamma_5} \Sigma_{13} + i\alpha U_3, \\ U'_3 &= \frac{1}{\gamma_4} (\Sigma_{33} + i\alpha\gamma_7 U_1 + \beta_3 P), \\ \Sigma'_{13} &= \left(\alpha^2 \left(\gamma_1 - \frac{\gamma_7}{\gamma_4} \right) - \kappa^2 \right) U_1 + \\ &+ i\alpha \frac{\gamma_7}{\gamma_4} \Sigma_{33} - \left(\frac{\gamma_7}{\gamma_4} \beta_3 - \beta_1 \right) i\alpha P, \\ \Sigma'_{33} &= i\alpha \Sigma_{13} - \kappa^2 U_3, \\ P' &= \frac{S}{\mu_3}, \\ S' &= \left(\alpha^2 \mu_1 - i\kappa \left(\delta + \frac{\eta_3}{\gamma_4} \beta_3 \right) \right) P - \\ &- \kappa\alpha \left(\eta_1 - \frac{\eta_3}{\gamma_4} \gamma_7 \right) U_1 - i\kappa \frac{\eta_3}{\gamma_4} \Sigma_{33}; \\ \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0; \\ \xi_3 = 1 : \Sigma_{33} = F_1(\alpha), \Sigma_{13} = F_2(\alpha), \\ P &= P_0(\alpha). \end{aligned} \quad (1.10)$$

При переменных характеристиках среды краевую задачу (1.10)–(1.11) можно решить лишь численно.

2. Численное решение задачи

Для решения (1.10)–(1.11) воспользуемся методом стрельбы [9]. Соответственно строим решение трех задач Коши со следующими условиями:

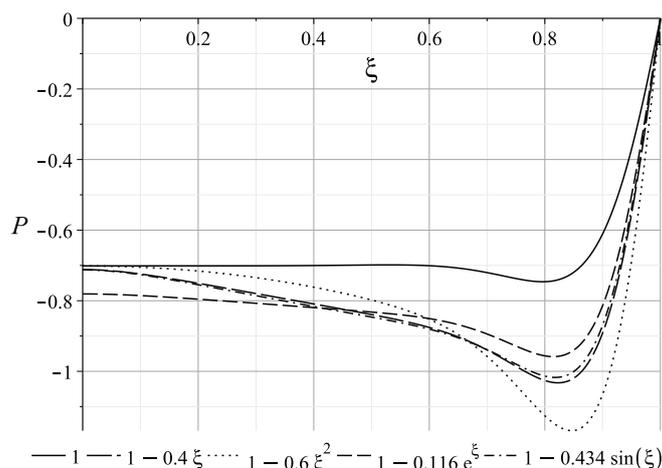
$$\begin{aligned} \text{I : } \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = 1, \Sigma_{13} = 0, P = 0; \\ \text{II : } \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{13} = 1, P = 0; \\ \text{III : } \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{13} = 0, P = 1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Для построения искомого решения необходимо составить линейные комбинации решений задач Коши. При этом полученные линейные комбинации должны удовлетворять исходным граничным условиям (1.11).

Численный анализ соответствующих задач Коши показал, что с ростом $|\alpha|$ растут значения коэффициентов при $U_1, U_3, \Sigma_{13}, \Sigma_{33}, P, S$, что эквивалентно наличию малого коэффициента при старшей производной. В литературе [10] такие системы называют «жесткими» системами. Для численного решения систем такого вида необходимо обратиться к специальным методам. Соответственно для решения задач Коши (1.10)–(2.1) воспользуемся методом Гира [10], реализованным в вычислительной среде Maple 13. Этот метод дает возможность эффективно строить решения «жестких» систем, кроме того, реализация метода Гира позволяет осуществлять контроль погрешности. При численной реализации использовались следующие значения параметров контроля погрешности: $abserr = relerr = 10^{-12}$, что позволяет обеспечивать значения абсолютной и относительной погрешности построения решения не более 10^{-12} .

При реализации численного решения (1.10)–(2.1) было выяснено, что граничные условия (2.1) не позволяют получить требуемую точность результатов. Так как решения (1.10) с граничными условиями (2.1) при больших значениях параметра $|\alpha|$ имеют сильный (экспоненциальный) рост, для преодоления данной трудности условия (2.1) были заменены условиями, позволяющими компенсировать экспоненциальный рост

$$\begin{aligned} \text{I : } \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = e^{-|\alpha|}, \Sigma_{13} = 0, P = 0; \end{aligned}$$

Рис. 1. Трансформанта P при $\alpha = 0$

$$\text{II} : \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{13} = e^{-|\alpha|}, P = 0;$$

$$\text{III} : \xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0, \\ \Sigma_{33} = 0, \Sigma_{13} = 0, P = e^{-|\alpha|}.$$

что по сути представляет собой один из вариантов метода моделирующих функций [11].

Отметим, что если положить коэффициенты системы (1.8) постоянными, то решение может быть построено аналитически стандартным образом. Построенное таким образом решение позволяет проверить точность численного алгоритма на примере этого частного случая.

С целью тестирования программы осуществлено сравнение результатов построения трансформант для случая постоянных характеристик.

При расчетах в качестве материала слоя был взят биологический материал — компактная кость [3] с механическими постоянными (1.5).

Учитывая линейность задачи, практический интерес представляет рассмотрение задачи с граничными условиями вида:

$$\xi_3 = 0 : U_1 = 0, U_3 = 0, S = 0; \\ \xi_3 = 1 : \Sigma_{33} = 1, \Sigma_{13} = 0, P = 0. \quad (2.2)$$

Сравнительный анализ результатов расчетов, полученных при помощи численного и аналитического решения, позволяет сделать вывод о том, что численное решение для трансформант совпадает с аналитическим с точностью порядка 10^{-10} .

Далее представлены результаты численного решения при различных законах изменения характеристик материала. Решение построено для неоднородностей следующего вида:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}(\xi) &= C_{ij}(1 - 0,4\xi), \\ \bar{C}_{ij}(\xi) &= C_{ij}(1 - 0,6\xi^2), \\ \bar{C}_{ij}(\xi) &= C_{ij}(1 - 0,434 \sin(\xi)), \\ \bar{C}_{ij}(\xi) &= C_{ij}(1 - 0,116e^\xi). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Функции для неоднородности, представленные на рис. 1, выбраны таким образом, чтобы интегралы от данных функций по промежутку $[0,1]$ были равны друг другу. При этом в случае (2.3) значения упругих модулей убывают по мере приближения к верхней границе слоя. На рис. 1 также видно, что решения для трансформанты P различаются в зависимости от закона изменения характеристик материала.

3. Нахождение обращения преобразования Фурье

Далее рассмотрим вопрос нахождения обращения полученных ранее решений в трансформантах.

Общее представление решения исходной задачи (1.1)–(1.4) имеет вид

$$u_j(\xi_1, \xi_3) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D_j(\alpha, \kappa, \xi_3)}{D_0(\alpha, \kappa)} e^{-i\alpha\xi_1} d\alpha, \quad (3.1)$$

где D_j, D_0 — аналитические функции своих аргументов [12].

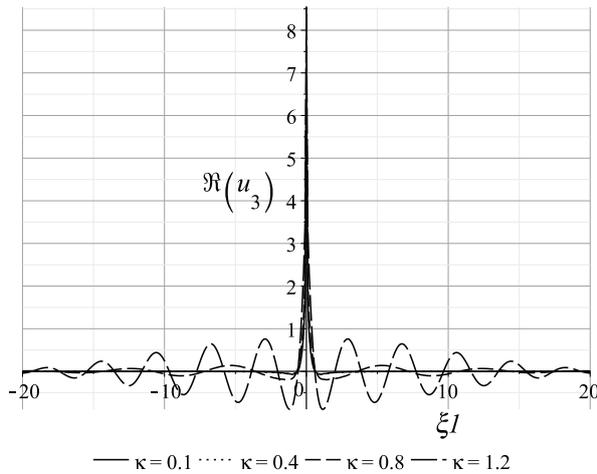


Рис. 2. Перемещения $\Re(u_3)$

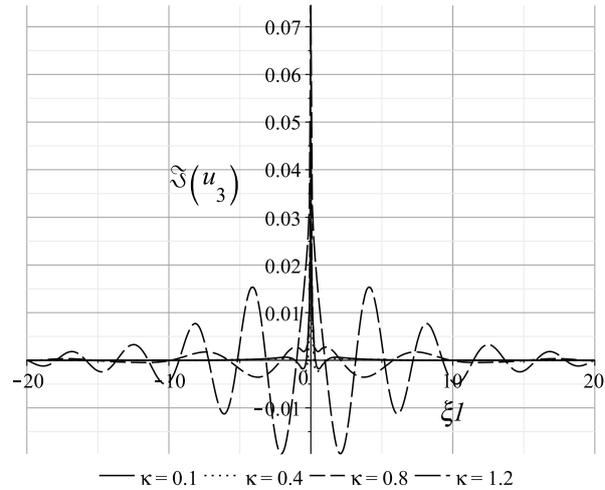


Рис. 3. Перемещения $\Im(u_3)$

Можно показать, что при $\alpha \in R_1$, $D_0 \neq 0$ и такая форма представления решения корректна. При этом в силу убывания подынтегральных функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$ можно вычислять интегралы вида (3.1) в конечных пределах, причем выбор параметра R позволяет контролировать точность вычисления интегралов

$$u_j(\xi_1, \xi_3) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{D_j(\alpha, \kappa, \xi_3)}{D_0(\alpha, \kappa)} e^{-i\alpha\xi_1} d\alpha. \quad (3.2)$$

Для вычисления интегралов вида (3.2) разобьем отрезок интегрирования на отрезки длиной не более $|b-a| \leq 0,5$, для которых в свою очередь воспользуемся квадратурными формулами вида [13]

$$\int_a^b f(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{b-a}{2} e^{-i\omega \frac{b+a}{2}} \sum_{k=1}^2 D_k \left(\omega \frac{b-a}{2} \right) f(x_k),$$

где соответственно

$$x_k = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

$$D_{1,2}(p) = \begin{cases} \frac{\sin(p)}{p} \pm \frac{p \cos(p) - \sin(p)}{p^2} i & \text{при } |p| > 0,5, \\ e^{\pm ip} & \text{при } |p| \leq 0,5. \end{cases}$$

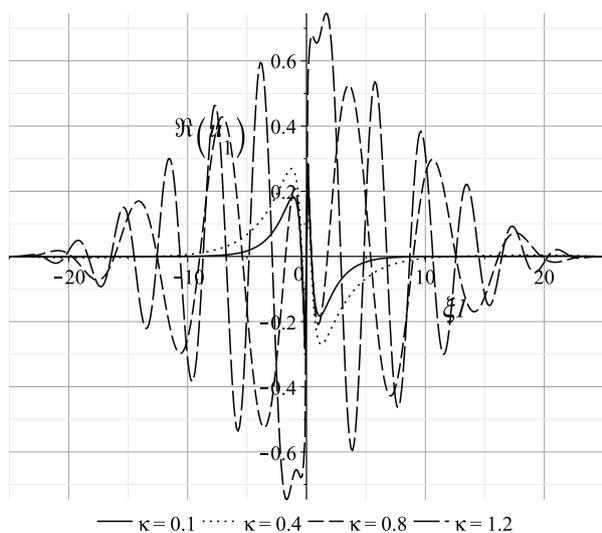
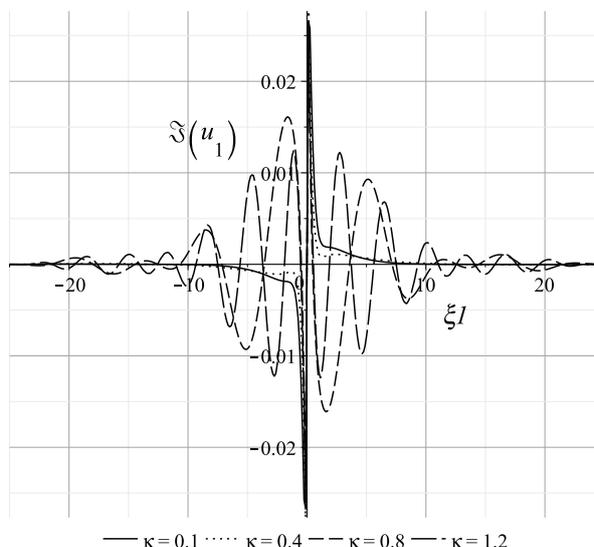
Стоит отметить, что с ростом параметра α имеет место оценка $u_j = O(|\alpha|^{-1})$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$. В связи с этим при нахождении обращения целесообразно вместо вычисления значений трансформант при больших α использовать их асимптотику, например $u_3 \sim G|\alpha|^{-1}$, где G — комплексная константа. В результате масштабных вычислительных экспериментов установлено, что в большинстве случаев значения $R = 20$ достаточно для построения обращения с погрешностью не более 10^{-3} . Это позволяет уменьшить количество значений параметра α , для которых необходимо строить решение в трансформантах, и соответственно сократить время работы алгоритма.

Рассмотрим результаты определения оригиналов полей смещений и давления.

Оригиналы решений для неоднородности вида $C_{ij}(\xi) = C_{ij}(1 - 0,2\xi_1)$ с граничными условиями (2.2) для разных значений волнового числа представлены на рис. 2–5, где $\Re(u_j)$ соответствует вещественной части смещений, а $\Im(u_j)$ — мнимой.

Можно осуществить оценку первого критического значения для продольных и поперечных компонент смещений. Для продольных смещений имеем $\kappa_{1p} = 0,482$, соответственно на рис. 4 при $\kappa = 0,8$ и $\kappa = 1,2$ наблюдаются осцилляции, что в упругом случае соответствовало бы наличию бегущей волны.

Также отметим наличие осцилляций меньшей амплитуды на рис. 2 при частотах из того же диапазона. При этом для поперечных смещений первое критическое значение

Рис. 4. Перемещения $\mathfrak{R}(u_1)$ Рис. 5. Перемещения $\mathfrak{I}(u_1)$

равно $\kappa_{1s} = 1,570$. Соответственно значения $\kappa = 0,1, 0,4, 0,8, 1,2$, для которых представлены решения, изображенные на рис. 2, находятся в диапазоне до первого критического значения, и в упругом случае этот факт говорил бы об отсутствии каких либо осцилляций, что не соответствует данным, представленным на рис. 2. Данный факт обусловлен наличием в рассматриваемой механической системе поровой жидкости, которая обеспечивает связь между продольными и поперечными смещениями.

Особый интерес представляет изучение зависимости волновых полей от закона изменения параметров системы. Приведем в качестве примера результаты расчетов перемещений u_3 при различных законах изменения параметров C_{ij} вида (2.3).

Заключение

Рассмотрение неоднородных характеристик материала приводит к вычислительным трудностям и требует тщательного рассмотрения. Применение комбинации интегрального преобразования Фурье и нескольких численных методов позволяет преодолеть большинство из них. При этом применение метода пристрелки к преобразованной по Фурье системе дифференциальных уравнений приводит к необходимости решать «жесткие» системы, что также требует специальных вычислительных методов. В целом представленный в работе метод позволяет с хорошей точностью и временными по-

казателями строить волновые поля для различных видов неоднородности.

Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что наличие поровой жидкости в рассматриваемой механической системе приводит к снижению амплитуд колебаний в окolorезонансных ситуациях. Иными словами, наличие жидкости в порах обеспечивает наличие затухания в пористом материале.

Стоит отметить, что структура неоднородности механических характеристик, в частности упругих модулей, оказывает значительное влияние на структуру полей перемещений.

Литература

1. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid // J. Acoustic. Soc. Am. 1956. Vol. 28. No. 2. P. 179–191.
2. Маслов Л. Б. Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Иваново: ИГЭУ, 2010. 264 с.
3. Маслов Л. Б. Пороупругая модель колебаний твердых биологических тканей при гармоническом воздействии // Вестник ИГЭУ. 2009. № 3. С. 51–53.
4. Cowin S. C. Bone poroelasticity // J. Biomech. 1999. Vol. 32. No. 3. P. 217–238.
5. Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и

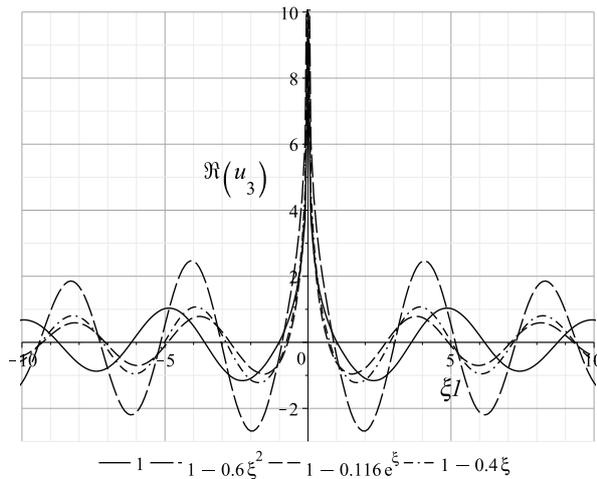


Рис. 6. Перемещения $\mathfrak{R}(u_3)$ при различных C_{ij}

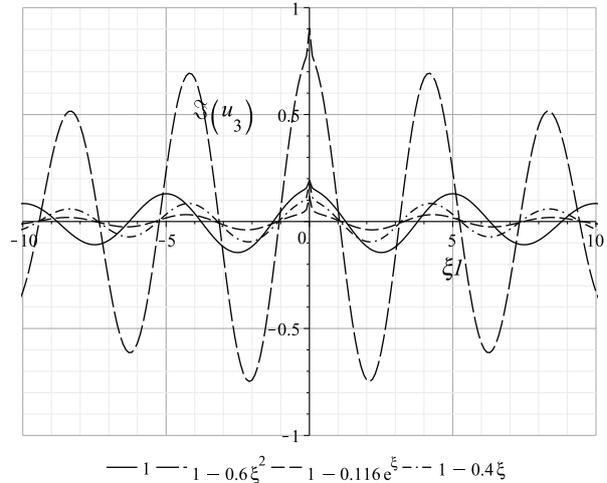


Рис. 7. Перемещения $\mathfrak{J}(u_3)$ при различных C_{ij}

пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во ННГУ. 2009. № 71. С. 164–171.

6. Ватульян А. О., Ляпин А. А. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. № 2. С. 114–121.
7. Фоменко С. И. Волновые поля, возбуждаемые поверхностными источниками в пористых водонасыщенных средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 65–70.
8. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И. Распределение энергии сейсмо-акустического скважинного источника в пористо-упругом водонасыщенном грунте // Актуальные аспекты физико-механических исследований. Акустика и волны. Сб. статей. Наук. думка, Киев. 2007. С. 73–83.
9. Калиткин Н. Н. Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.
10. Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
11. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
12. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
13. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. М.: Наука, 1967. 500 с.
2. Maslov I. B. *Matematicheskoe modelirovaniye kolebanij porouprugih sistem* [Mathematical modeling of oscillations of poroelastic systems]. Ivanovo, IGEU, 2010, 264 p. (In Russian)
3. Maslov I. B. Porouprugaya model kolebanij tverduh biologicheskikh tkaney pri garmonicheskome vozdeystvii [Poroelastic model of vibrations of solid biological materials under the harmonic action]. *Vestnik IGEU* [IGEUBulletin], 2009, vol. 3, pp. 51–53. (In Russian)
4. Cowin S. C. Bone poroelasticity *J. Biomech.*, 1999, vol. 32, no. 3, pp. 217–238.
5. Amenitski A. V., Belov A. A., Igumnov L. A., Karelin I. S. Granichnue integralnue uravneniya dlya reshenia dinamicheskikh zadach trehmernoi teorii porouprugosti [Boundary integral equations for solving three-dimensional problems of poroelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti* [Problems of strength and ductility]. N. Novgorod, Izd-vo NNGU, 2009, vol. 71, pp. 164–171. (In Russian)
6. Vatul'jan A. O., Lyapin A. A. Ob obratnykh koeffitsientnykh zadachah porouprugosti [Inverse coefficient problems of poroelasticity]. *Izv. RAN. MTT* [RAS bulletin MSB], 2013, vol. 2, pp. 114–121. (In Russian)
7. Fomenko S. I. Volnovue polya, vzbuzhdaemue poverhnostnymi istochnikami v poristux vodonasushennykh sredah [Wave fields excited by surface sources in water saturated porous media]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of research centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2007, vol. 1, pp. 65–70. (In Russian)
8. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Fomenko S. I. Raspredelenie energii seismo-akusticheskogo skvazhennogo istochnika v poristouprugom vodonasushennom grunte [The energy distribution of the acoustic borehole seismic source in

References

- a porous-elastic saturated soil] *Actualnye aspekty fiziko-mehanicheskikh issledovaniy. Acustica i volny* [Actual aspects of the physical and mechanical research, acoustics and waves], Kiev, Nauk. dumka Publ., 2007, pp. 73–83. (In Russian)
9. Kalitkin N.N. *Chislennyye metody* [Computational methods]. Moscow, Nauka Publ., 1978, 512 p. (In Russian)
 10. Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. *Solving ordinary differential equations. Vol. I: Nonstiff Problems*. Berlin etc., Springer-Verlag, 1987, 480 p.
 11. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineino uprugih sred* [Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 343 p. (In Russian)
 12. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshanye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical areas]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
 13. Krulov V.I. *Priblizhennoe vucheslenie integralov* [Approximate calculation of integrals]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 500 p. (In Russian)

Статья поступила 23 октября 2014 г.

© Ватульян А. О., Гусаков Д. В., 2014