

УДК 532.517.4 : 537.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ МИКРО- И НАНОПЛЕНКИ ЭЛЕКТРОЛИТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНЕШНЕГО ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Горбачева Е. В., Ганченко Г. С., Демёхин Е. А., Кирий В. А.

NUMERICAL SOLUTION OF LINEAR STABILITY OF MICRO AND NANOFILMS
OF THE ELECTROLYTE UNDER AN EXTERNAL ELECTRIC FIELD

Gorbacheva E. V., Ganchenko G. S., Demekhin E. A., Kiriy V. A.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: katya1911@list.ru

Abstract. Problems of electrokinetics have recently attracted a great deal of attention due to a rapid development of micro-, nano- and biotechnologies. Micro-nano scale phenomena with liquid/gas interface are of particular practical interest to move non-conductive liquids, creating a highly nonuniform velocity profile, mixing, etc. The article considers the effect of a thin film electrolyte under the influence of an external electric field. The presence of an inhomogeneous surface charge at the interface of gas/liquid leads to an instability and distortion of free surface. In this paper we obtain one-dimensional equilibrium and study the linear stability of this state. We find the critical values of the parameters after which a one-dimensional steady-state solution is no longer stable. Also we found long-wave instability and obtained four modes.

Keywords: liquid film, mobile surface charge, free interface, instability, Galerkin method, electrolyte, Nernst–Planck–Poisson system, double ion layer

Введение

В данной работе рассматривается устойчивость микро- и нанопленки электролита со свободной поверхностью раздела жидкость/газ под действием электрического тока [1–6]. Поверхность раздела жидкость/газ предполагается заряженной, в то время как твердая поверхность может быть либо проводящей, либо заряженной диэлектрической поверхностью. Поверхностный заряд на границе жидкость/газ является мобильным [7–10] и может быть неустойчивым. Электростатическое притяжение создает избыток противоионов в растворе электролита рядом с поверхностью твердого тела, тем самым образуя электрические Дебаевские слои. Приложенное тангенциальное электрическое поле, действующее на заряд в дебаевском слое,

создает кулоновские силы, передвигающие жидкость.

1. Постановка задачи

Движение раствора электролита под действием внешнего электрического поля описывается нелинейной системой Нернста–Планка–Пуассона–Стокса

$$\frac{\partial \tilde{C}^+}{\partial t} + \tilde{U} \nabla \tilde{C}^+ = \frac{z^+ \tilde{D}^+ \tilde{F}}{\tilde{R}T} \nabla \left(\tilde{C}^+ \nabla \tilde{\Phi} \right) + \tilde{D}^+ \nabla^2 \tilde{C}^+, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tilde{C}^-}{\partial t} + \tilde{U} \nabla \tilde{C}^- = \frac{z^- \tilde{D}^- \tilde{F}}{\tilde{R}T} \nabla \left(\tilde{C}^- \nabla \tilde{\Phi} \right) + \tilde{D}^- \nabla^2 \tilde{C}^-, \quad (1.2)$$

$$\tilde{\varepsilon} \nabla^2 \tilde{\Phi} = -\tilde{F} \left(z^+ \tilde{C}^+ + z^- \tilde{C}^- \right), \quad (1.3)$$

Горбачева Екатерина Витальевна, магистрант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: katya1911@list.ru

Ганченко Георгий Сергеевич, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: ganchenko.ru@gmail.com

Демёхин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: edemekhi@gmail.com

Кирий Владимир Александрович, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: vladimir@kiriy.ru

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (14-08-31260 мол-а, 14-08-00789-а, 14-08-01171-а, 13-08-96536-р_юг_а).

$$\nabla \tilde{P} = \tilde{\mu} \nabla^2 \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{F} (z^+ \tilde{C}^+ + z^- \tilde{C}^-) \nabla \tilde{\Phi}, \quad (1.4)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0. \quad (1.5)$$

Здесь \tilde{C}^+ , \tilde{C}^- — концентрации катионов и анионов; $\tilde{\mathbf{U}} = \{\tilde{U}, \tilde{V}\}$ — вектор скорости жидкости; ось \tilde{x} — направлена вдоль пленки, ось \tilde{y} имеет нормальное направление; $\tilde{\Phi}$ — электрический потенциал в жидкости; \tilde{P} — давление; \tilde{F} — постоянная Фарадея; \tilde{R} — универсальная газовая постоянная; \tilde{T} — температура; $\tilde{\mu}$ — динамическая вязкость и $\tilde{\varepsilon}$ — диэлектрическая проницаемость жидкости; z^\pm и D^\pm описывают соответственно валентность и коэффициенты диффузии катионов и анионов. Если стенка является проводником, потенциал $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет следующему граничному условию:

$$\tilde{y} = 0 : \quad \tilde{\Phi} = 0. \quad (1.6)$$

Для диэлектрической поверхности с однородным поверхностным зарядом граничное условие имеет вид

$$\tilde{y} = 0 : \quad \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = \tilde{q}. \quad (1.7)$$

На твердой поверхности также заданы граничные условия — непроницаемости катионов и анионов

$$\frac{\partial \tilde{C}^\pm}{\partial \tilde{y}} + z^\pm \frac{\tilde{F} \tilde{C}^\pm}{\tilde{R} \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{y}} = 0, \quad (1.8)$$

условие прилипания и непроницаемости жидкости

$$\tilde{\mathbf{U}} = (\tilde{U}, \tilde{V}) = (0, 0). \quad (1.9)$$

Краевые условия на поверхности раздела газ/жидкость имеют вид

$$\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}, \tilde{t}) : \quad \frac{\partial \tilde{C}^\pm}{\partial \tilde{n}} + z^\pm \frac{\tilde{F} \tilde{C}^\pm}{\tilde{R} \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = 0, \quad (1.10)$$

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}, \quad \tilde{\varepsilon} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{n}} = \tilde{\varepsilon}_g \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{n}} + \tilde{\sigma}, \quad (1.11)$$

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_s \tilde{\sigma})}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P} - \tilde{P}_g + \frac{\tilde{\gamma}}{\tilde{r}} + [n \tilde{T}^f n] + [n \tilde{T}^e n] = \\ = \tilde{P}_{\text{АТМ}}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$[n \tilde{T}^f s] + [n \tilde{T}^e s] = 0 \quad (1.14)$$

$$\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{U} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{x}}, \quad (1.15)$$

\tilde{n} — внешняя нормаль к свободной поверхности; $h_x = \partial \tilde{h} / \partial \tilde{x}$; \tilde{s} — касательное направление; \tilde{r} — радиус кривизны; \tilde{U}_s — касательная компонента скорости на границе раздела жидкость/газ; $\tilde{\varepsilon}_g$ — диэлектрическая проницаемость газа; $\tilde{P}_{\text{АТМ}}$ — атмосферное давление; $\tilde{\gamma}$ — коэффициент поверхностного натяжения; $\tilde{\varphi}$ — электрический потенциал в газе.

Краевые условия имеют следующий физический смысл: соотношение (1.10) описывает условие непроницаемости положительных и отрицательных ионов; (1.11) задает условие на электрический потенциал; (1.12) — условие сохранения заряда; (1.14), (1.13) — условия для нормальных и касательных напряжений; квадратные скобки означают скачок величины при переходе через границу раздела (разность значений в газе и жидкости), \tilde{P}_g — давление в газе, которое далее без ограничения общности полагается равным нулю, $\tilde{\mathbf{T}}^f$ — тензор гидродинамических напряжений (давление \tilde{P} выделяется из гидродинамического тензора), $\tilde{\mathbf{T}}^e$ — тензор Максвелла–Вагнера. (1.15) — кинематическое условие. Электрический потенциал в газе описывается уравнением Лапласа,

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{x}^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}^2} = 0, \quad (1.16)$$

с условием изоляции на верхней границе

$$\tilde{y} = \tilde{H} : \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \tilde{y}} = 0. \quad (1.17)$$

Рассматривается бинарный одновалентный раствор электролита ($z_+ = -z_- = 1$, $\tilde{D}^+ = \tilde{D}^- = \tilde{D}$). Для приведения данных уравнений к безразмерному виду используются следующие характерные величины: \tilde{h}_0 — характерная длина, равная средней толщине пленки; $\tilde{h}_0^2 / \tilde{D}$ — характерное время; \tilde{D} / \tilde{h}_0 — характерная скорость; $\tilde{\mu}$ — динамическая вязкость; $\tilde{\mu} \tilde{D} / \tilde{h}_0^2$ — характерное давление; $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{R} \tilde{T} / \tilde{F}$ — термодинамический потенциал; $\tilde{\sigma}_s = \tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0 / \tilde{\lambda}_D$ — характеристика поверхностного заряда, где $\tilde{\lambda}_D$ — длина Дебая,

$$\tilde{\lambda}_D = \left(\frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0}{\tilde{F}^2 \tilde{C}_0} \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{R} \tilde{T}}{\tilde{F}^2 \tilde{C}_0} \right)^{\frac{1}{2}};$$

\tilde{C}_0 — некоторая характерная массовая концентрация ионов.

После введения характерных величин система уравнений (1.1)–(1.17) для двумерного случая, принимает безразмерный вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^+}{\partial t} + \frac{\partial(UC^+)}{\partial x} + \frac{\partial(VC^+)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial^2 C^+}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^+}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C^-}{\partial t} + \frac{\partial(UC^-)}{\partial x} + \frac{\partial(VC^-)}{\partial y} = \\ = \frac{\partial^2 C^-}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C^-}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(C^- \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left(C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\nu^2 \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right\} = C^- - C^+, \quad (1.20)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\nu^2} (C^+ - C^-) \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad (1.21)$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\kappa}{\nu^2} (C^+ - C^-) \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0. \quad (1.23)$$

Для двумерного случая можно ввести функцию тока Ψ

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, V = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Тогда из уравнений (1.21)–(1.22) может быть получено бигармоническое уравнение относительно Ψ с краевым условием

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Psi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Psi}{\partial y^4} = \\ = \frac{\kappa}{\nu^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где $\rho = C^+ - C^-$ плотность заряда.

Условия на твердой поверхности записываются в виде

$$\begin{aligned} y = 0 : \quad \Phi = 0 \text{ — для проводника,} \\ \nu \frac{\partial \Phi}{\partial y} = q \text{ — для заряженного} \end{aligned} \quad (1.25)$$

диэлектрика,

$$\begin{aligned} C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^+}{\partial y} = 0, \\ -C^- \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial C^-}{\partial y} = 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$V = 0, \quad U = 0. \quad (1.27)$$

На свободной границе раздела газ/жидкость

$$\begin{aligned} y = h(x, t) : \quad C^+ \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial C^+}{\partial n} = 0, \\ -C^- \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial C^-}{\partial n} = 0, \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$\Phi = \varphi, \quad \nu \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \delta \nu \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \sigma, \quad (1.29)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial(U_s \sigma)}{\partial x} = 0, \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{We}{r} + 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} + 2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{h_x}{1 + h_x^2} - \\ - \frac{\kappa}{2} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \frac{\kappa}{2} (1 - \delta) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)^2 + \\ + P - \frac{\kappa}{\delta \nu} \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{1}{2} \frac{\kappa}{\delta \nu^2} \sigma^2 = 0, \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{h_x}{1 + h_x^2} - \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \frac{1 - h_x^2}{1 + h_x^2} = \\ = \frac{\kappa \sigma}{\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial s}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Уравнение Лапласа в газе с краевыми условиями на верхней границе канала так же примут безразмерный вид.

Задача описывается семью безразмерными параметрами для проводящей стенки:

$$E_\infty = \frac{\tilde{E}_\infty \tilde{h}}{\tilde{\Phi}_0}, \quad \nu = \frac{\tilde{\lambda}_D}{\tilde{h}_0}, \quad \delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_g}{\tilde{\varepsilon}}, \quad \kappa = \frac{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0^2}{\tilde{\mu} \tilde{D}},$$

$$We = \frac{\tilde{\gamma} \tilde{h}_0}{\tilde{\varepsilon} \tilde{\Phi}_0^2}, \quad \sigma_0 = \frac{\tilde{\sigma}_0}{\tilde{\sigma}_s}, \quad H = \frac{\tilde{H}}{\tilde{h}_0},$$

и восемью параметрами для диэлектрической стенки:

$$E_\infty, \quad \nu, \quad \delta, \quad \kappa, \quad We, \quad q = \frac{\tilde{q}}{\tilde{\sigma}_s}, \quad \sigma_0, \quad H,$$

где E_∞ — напряженность внешнего электрического поля, ν — число Дебая, δ — коэффициент электрических проницаемостей в газе

и жидкости, \varkappa — коэффициент связи между гидродинамикой и электростатикой, We — число Вебера и σ_0 — невозмущенный поверхностный заряд для одномерного решения.

Объемная концентрация водного электролита находится в пределах $\tilde{C}_0 = 1 \div 10^3$ моль/м³; абсолютная температура $\tilde{T} = 300$ К; коэффициент диффузии электролита составляет $\tilde{D} = 10^{-9}$ м²/с. Толщина дебаевского слоя $\tilde{\lambda}_D$ изменяется в диапазоне от 1 до 100 нм в зависимости от концентрации \tilde{C}_0 . Типичная плотность поверхностного заряда поверхностей из стекла и кремния варьируется в пределах $\tilde{q} = 10^{-4} - 10^{-3}$ Кл/м² соответственно, безразмерная плотность заряда $q = 0,05 - 3$. Параметр \varkappa характеризует физические свойства раствора электролита и варьируется для водных растворов в диапазоне от 0,1 до 0,5. С учетом вышеуказанных оценок в расчетах приняты следующие значения параметров: $\varkappa = 0,2$, $\delta = \tilde{\varepsilon}_g/\tilde{\varepsilon} = 1/80$, $q = -3$, $\sigma_0 = 1$ и $H = 3$. Для данной жидкости и электролитов число Вебера зависит только от одномерной толщины пленки, а именно, оно пропорционально \tilde{h}_0 . При поверхностном натяжении воды $\tilde{\gamma} = 7,28 \times 10^{-2}$ Н/м, получаем

$$We = \frac{1650}{\nu} \text{ для } \tilde{\lambda}_D=10 \text{ нм,}$$

$$We = \frac{8250}{\nu} \text{ для } \tilde{\lambda}_D=50 \text{ нм.}$$

В большинстве расчетов $\tilde{\lambda}_D=10$ нм. Таким образом, проблема становится двухпараметрической, важнейшими параметрами которой являются внешнее электрическое поле E_∞ и числ Дебая ν .

2. Одномерное решение

При $\partial/\partial x = 0$ из системы исчезает Φ , а остается только $\partial\Phi/\partial y$, поэтому вводится напряжение электрического поля $E = \partial\Phi/\partial y$. Одномерная система уравнений (1.18)–(??) имеет вид

$$\frac{\partial c^+}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial c^-}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-c^- E + \frac{\partial c^-}{\partial y} \right),$$

$$\nu^2 \frac{\partial E}{\partial y} = c^- - c^+.$$

В начальный момент времени $t = 0$ задано некоторое распределение концентраций положительных и отрицательных ионов

$$t = 0: \quad c^+ = 1, \quad c^- = 1 + \nu(\sigma - q)$$

и граничные условия

$$y = 0: \quad \nu E = q,$$

$$c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} = 0, \quad c^- E - \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0;$$

$$y = 1: \quad \nu E = \sigma,$$

$$c^+ E + \frac{\partial c^+}{\partial y} = 0, \quad c^- E - \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0.$$

Напряженность электрического поля E должна удовлетворять для диэлектрической стенки граничному условию

$$y = 0: \quad E = \frac{\nu}{q}.$$

Условия на границе раздела газ/жидкость для обоих случаев имеют вид

$$y = 1: \quad E = \frac{\nu}{\sigma}.$$

Следовательно, для стационарного одномерного решения число граничных условий для E различно. Два условия для заряженной диэлектрической твердой поверхности и одно — для проводящей.

Эта система была решена численно с помощью τ -метода Галёркина рис. 1. Используя приближение Дебая–Хюкеля, может быть найдено асимптотическое решение

$$\Phi = -E_\infty x + \frac{C_1}{b} \operatorname{ch} by + \frac{C_2}{b} \operatorname{sh} by - \frac{C_1}{b},$$

$$\rho = -\nu^2 b C_1 \operatorname{ch} by - \nu^2 b C_2 \operatorname{sh} by,$$

$$K = c^+ + c^- = \nu^2 b^2, \quad U = \varkappa \Phi E_\infty.$$

$$b^2 = [2 + \nu(\sigma - q)]/\nu^2,$$

$$C_1 = \frac{\sigma}{\nu} \frac{1}{\operatorname{sh} b} - \frac{q}{\nu} \operatorname{cth} b, \quad C_2 = \frac{q}{\nu},$$

где K — суммарная концентрация ионов.

На рис. 1 представлен график скорости U при различных q и σ . Если у σ и q одинаковый знак, то поверхности противоположно заряжены, если различный — одинаково. Наличие малого параметра ν при старших производных приводит к образованию пограничных слоев, в которых решение резко меняет своё поведение (рис. 1).

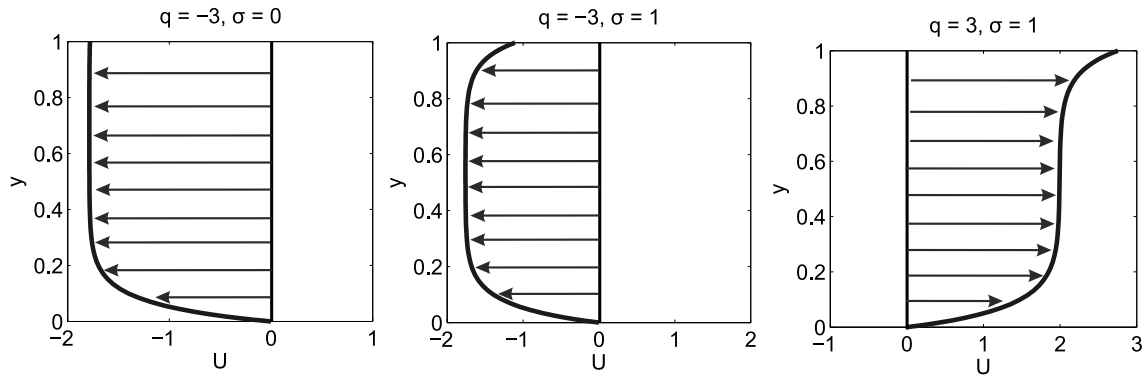


Рис. 1. График одномерной скорости U для различных значений зарядов q и σ , при $\nu = 0,1$

3. Линейная устойчивость. Численное решение

Для численного решения задачи линейной устойчивости вводится криволинейная система координат

$$\tau = t, \quad \xi = x, \quad \eta = \frac{y}{h(x,t)},$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - \eta \frac{h_t}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{h_x}{h} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial \eta}.$$

Производные по нормальному n и тангенциальному s направлениям на поверхности $y = h(x,t)$ (или $\eta = 1$) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{h_x}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\sqrt{1+h_x^2}}{h} \frac{\partial}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{\sqrt{1+h_x^2}} \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Рассматриваются небольшие синусоидальные возмущения с волновым числом α , наложенные на одномерное стационарное решение

$$K = K_0 + \hat{K}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$c^\pm = c_0^\pm + \hat{c}^\pm(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$\rho = \rho_0(\eta) + \hat{\rho}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$\Phi = \Phi_0(\eta) + \hat{\Phi}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$\Psi = \Psi_0(\eta) + \hat{\Psi}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$U = U_0 + \hat{u}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$V = \hat{v}(\eta) \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$h = 1 + \hat{h} \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau),$$

$$\sigma = \sigma_0 + \hat{\sigma} \exp(i\alpha\xi + \lambda\tau).$$

Далее индекс «0», соответствующий одномерному решению, будет опущен.

Подставив эти выражения в систему (1.18) и отбросив слагаемые более высокого порядка, получим дифференциальную задачу на собственные значения, где параметр λ выбирается таким образом, чтобы система имела нетривиальное решение. Система линейных уравнений, удобных для численного интегрирования, имеет вид

$$\lambda \hat{K} - \lambda K' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{K} - i\alpha K' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{\rho} =$$

$$= \frac{d}{d\eta} (\rho \hat{\Phi}' + E \hat{\rho} + \hat{K}') - \alpha^2 \rho \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{K} +$$

$$+ \left[\alpha^2 \eta (\rho E + K') - 2 \frac{d}{d\eta} (\rho E + K') \right] \hat{h} +$$

$$+ [i\alpha E_\infty \eta \rho'] \hat{h},$$

$$\lambda \hat{\rho} - \lambda \rho' \eta \hat{h} + i\alpha U \hat{\rho} - i\alpha \rho' \hat{\Psi} + i\alpha E_\infty \hat{K} =$$

$$= \frac{d}{d\eta} (K \hat{\Phi}' + E \hat{K} + \hat{\rho}') - \alpha^2 K \hat{\Phi} - \alpha^2 \hat{\rho} +$$

$$+ \left[\alpha^2 \eta (KE + \rho') - 2 \frac{d}{d\eta} (KE + \rho') \right] \hat{h} +$$

$$+ [i\alpha E_\infty \eta K'] \hat{h},$$

$$\hat{\Phi}'' - \alpha^2 \hat{\Phi} + \frac{\hat{\rho}}{\nu^2} = (2E' - \alpha^2 E \eta) \hat{h},$$

$$\hat{\Psi}^{IV} - 2\alpha^2 \hat{\Psi}'' + \alpha^4 \hat{\Psi} + (-4U''' + 2\alpha^2 U'' \eta) \hat{h} +$$

$$+ (4\alpha^2 U' - \alpha U \eta) \hat{h} =$$

$$= \frac{\kappa}{\nu^2} [i\alpha (\rho' \hat{\Phi} - E \hat{\rho}) - E_\infty \hat{\rho}' + E_\infty \rho' \hat{h}];$$

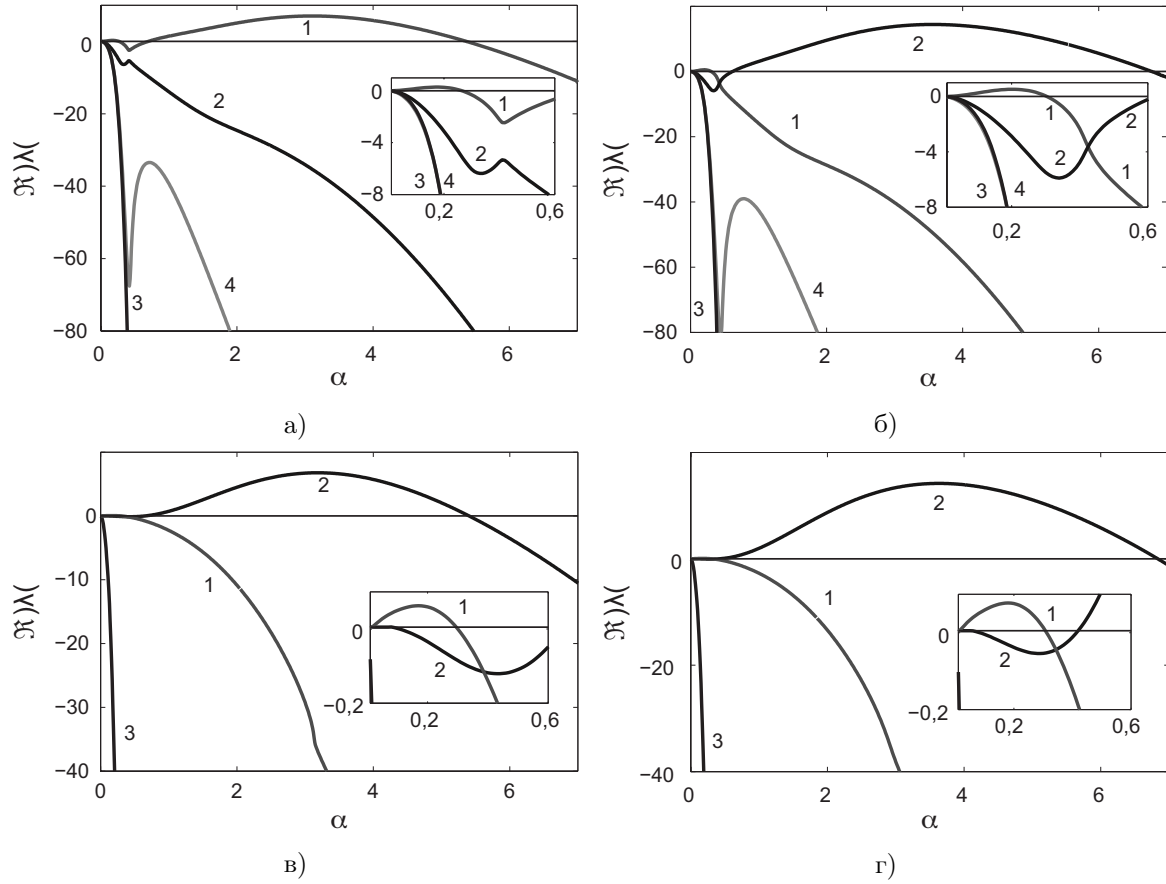


Рис. 2. Зависимость действительной части λ от волнового числа α для диэлектрической поверхности: а) $E_\infty = 85$; б) $E_\infty = 100$; для диэлектрической поверхности: в) $E_\infty = 85$, г) $E_\infty = 100$, $\nu = 0,02$

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad & \nu \hat{K}' + q\hat{\rho} + \nu\rho\hat{\Phi}' = 0, \\ & \nu\hat{\rho}' + q\hat{K} + \nu K\hat{\Phi}' = 0, \\ & \hat{\Phi} = 0 \text{ — для проводника,} \\ & \nu\hat{\Phi}' = q\hat{h} \text{ — для диэлектрика,} \\ & \hat{\Psi} = 0, \quad \hat{\Psi}' + U\hat{h} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta = 1: \quad & \hat{K}' + E\hat{\rho} + \rho(i\alpha E_\infty \hat{h} + \hat{\Phi}') = 0, \\ & \hat{\rho}' + E\hat{K} + K(i\alpha E_\infty \hat{h} + \hat{\Phi}') = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu[\hat{\Phi}' + i\alpha E_\infty(1 - \delta)\hat{h} + \alpha\delta \operatorname{th}(\alpha H)\hat{\Phi}] &= \hat{\sigma} + \sigma\hat{h}, \\ \lambda\hat{\sigma} + i\alpha U\hat{\sigma} + i\alpha\sigma\hat{\Psi}' - i\alpha\sigma U\hat{h} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}''' - 3\alpha^2\hat{\Psi}' + (3\alpha^2 U + \alpha^2 U' - U'')\hat{h} - \\ - i\alpha^3 W e \hat{h} + \varkappa \left(i\alpha [E'\hat{\Phi} - E\hat{\Phi}' + E^2\hat{h}] \right) - \\ - \varkappa \left(E_\infty \hat{\Phi}'' + (2 - \delta)\alpha^2 E_\infty \hat{\Phi} \right) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}'' + \alpha^2\hat{\Psi} - \alpha^2 U\hat{h} = \\ = -\frac{\kappa}{\nu} \left(i\alpha\sigma\hat{\Phi} - E_\infty\hat{\sigma} - 2\sigma E_\infty\hat{h} \right), \\ \lambda\hat{h} + i\alpha\hat{\Psi} = 0. \end{aligned}$$

В граничное условие (1.5) уже подставлено φ как решение уравнения Лапласа. С помощью τ -метода Галёркина с функциями Чебышёва [11] в качестве базиса задача сводится к алгебраической задаче на собственные значения

$$\det(A + \lambda B) = 0.$$

4. Результаты

4.1. Случай проводящей поверхности

Результаты расчетов показали, что для случая проводящей поверхности существуют четыре моды, связанные с четырьмя эффектами: искажения свободной поверхности \hat{h} , смещения поверхностного заряда $\hat{\sigma}$, суммарной неравномерностью концентрации ионов

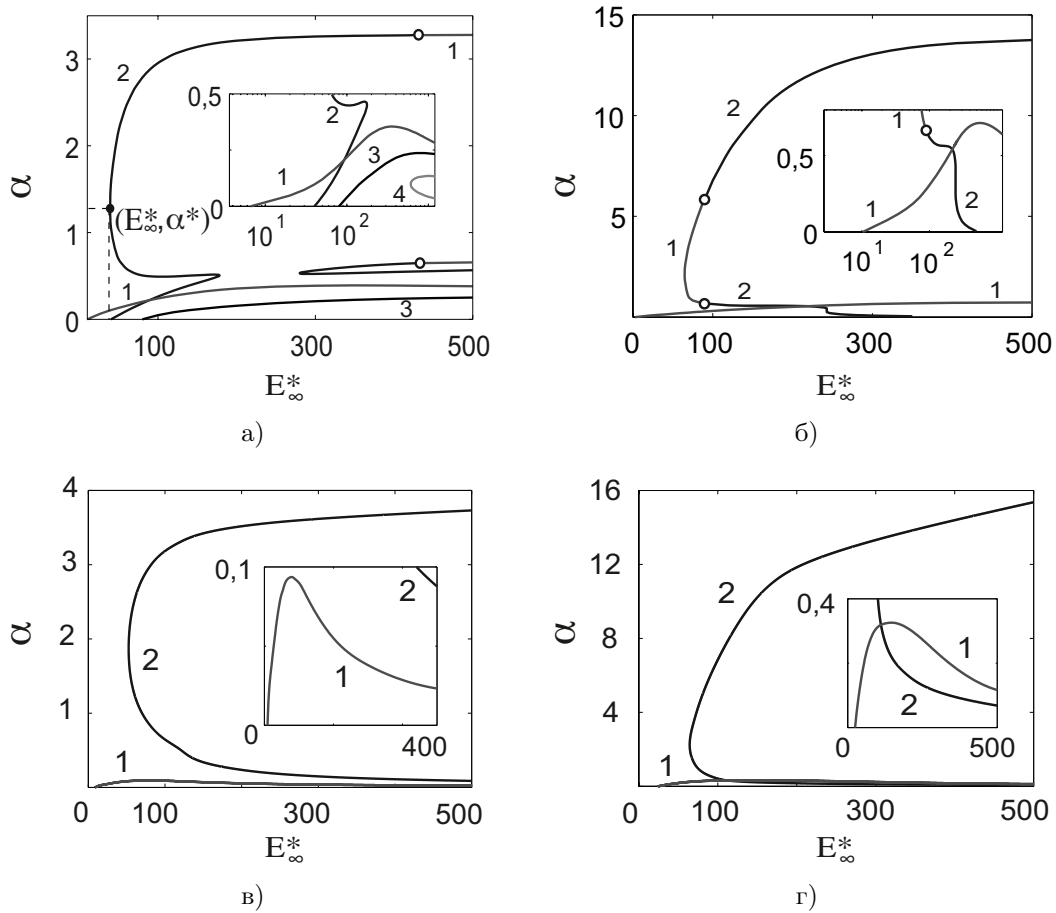


Рис. 3. Кривые нейтральной устойчивости для проводящей поверхности а) $\nu = 0,1$, б) $\nu = 0,02$; для диэлектрической поверхности в) $\nu = 0,1$, г) $\nu = 0,02$

в диэлектрике $\int_0^1 (\hat{K}) d\eta$ и неоднородности плотности заряда $\int_0^1 (\hat{\rho}) d\eta$. Все эти механизмы взаимосвязаны, поэтому все моды влияют друг на друга. Зависимость действительной части спектра от волнового числа α представлена на рис. 2а, 2б. Моды 1, 2 и 3 неустойчивы в длинноволновой области. Мо- да 4 становится неустойчивой в коротковолновом диапазоне только при очень больших значениях E_∞ (рис. 3а). При небольших значениях E_∞ мода 1 имеет также коротковолновую неустойчивость. При увеличении E_∞ происходит бифуркация и моды 1 и 2 меняются между собой (рис. 2а, 2б). В этой области неустойчивой становится мода 2.

При достаточно больших значениях ν коротковолновая неустойчивость исчезает и остается только длинноволновая, как видно из рис. 4а. При уменьшении числа Дебая система в целом стабилизируется, проходя через минимум (рис. 4а).

4.2. Случай диэлектрической заряженной поверхности

Этот случай отличается от предыдущего тем, что остается только три моды. Это объясняется фактом, что условие наличия фиксированного заряда q на твердой поверхности уничтожает одну степень свободы и неоднородность пространственного заряда $\int_0^1 (\hat{\rho}) d\eta$ оказывается зависимой от остальных факторов через уравнение Пуассона. Кроме того, в отличие от предыдущего случая, бифуркация между модами 1 и 2 отсутствует (рис. 2в, 2г).

Таким образом, мода 1 имеет длинноволновую неустойчивость, а мода 2 — коротковолновую, при этом мода 3 всегда устойчива. В остальном поведение системы с заряженной диэлектрической стенкой совпадает со случаем проводящей поверхности (рис. 3в, 3г, 4б, 5б).

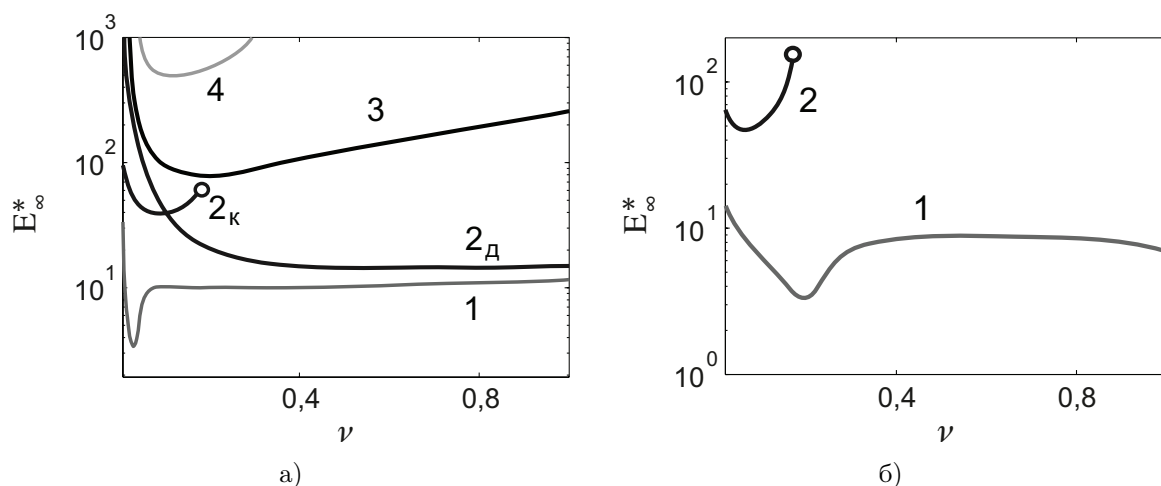


Рис. 4. Критические значения E_{∞}^* для а) проводящей поверхности, б) диэлектрической заряженной поверхности. 2_k — коротковолновая неустойчивость, 2_d — длинноволновая неустойчивость

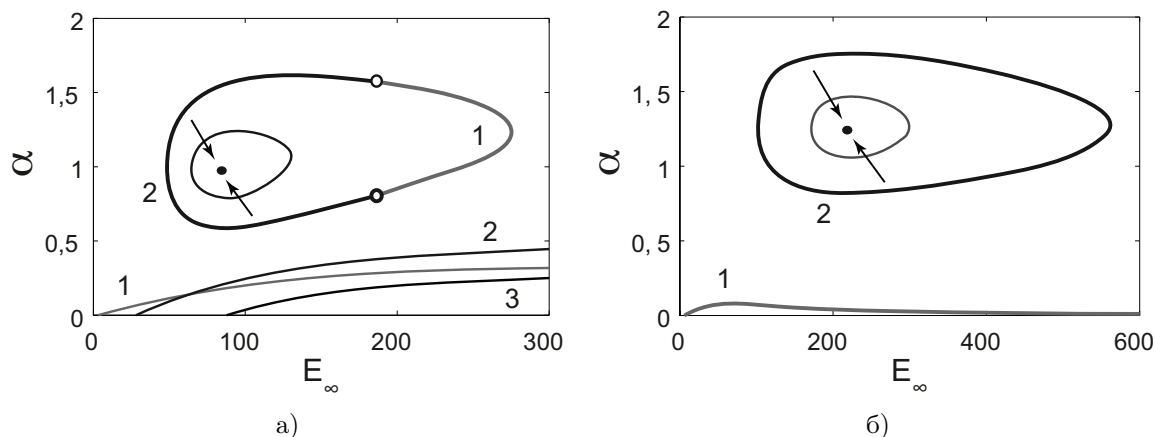


Рис. 5. Кривые нейтральной устойчивости для а) проводящей поверхности $\nu = 0,13-0,15$, б) диэлектрической $\nu = 0,15-0,17$

Заключение

В данной работе представлены результаты изучения линейной устойчивости микро- и нанопленок жидкости с газовой границей во внешнем касательном электрическом поле.

Численный анализ предоставляет много новых важных результатов и для проводящей, и для диэлектрической поверхностей: обнаружено присутствие коротковолновой неустойчивости, возникающие и исчезающие области неустойчивости, бифуркации и т. д.

Также было рассмотрено влияние чисел Дебая и других параметров на длинноволновую и коротковолновую устойчивость.

Литература

1. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2012. Vol. 44. P. 401–426.
2. Lee J. S. H., Li D. Electro-osmotic flow at a liquid-air interface // *Microfluid. Nanofluidics.* 2006. Vol. 2. P. 361–365.
3. Gao Y., Wang T. N., Yang C. Transient two-liquid electro-osmotic flow with electric charges at the interface // *Colloids Surfaces A.* 2005. Vol. 266. P. 117–128.
4. Gao Y., Wang T. N., Yang C., Ooi K. T. Two-fluid electro-osmotic flow in microchannels // *J. Colloid Interface Sci.* 2005. Vol. 284. P. 306–314.
5. Haiwang L., Wang T. N., Nguyen T. N.

- Time-dependent model of mixed electro-osmotic/pressure-driven three immiscible fluids in rectangular microchannel // *Int. J. Heat Mass Transf.* 2010. Vol. 53, P. 772–785.
6. Griffiths S.K., Nilson R.H. Charged species transport, separation, and dispersion in nanoscale channels: autogenous electric field-flow fractionation // *Anal. Chem.* 2010. Vol. 78. P. 772–778.
 7. Graciaa A., Morel G., Saulner P., Lachaise J., Schecher R. S. ζ -potential in gas bubbles // *J. Colloid Interface Sci.* 2005. Vol. 172. P. 131–136.
 8. Yang C., Dabros T., Li D., Czarnecki J., Masliyah J. H. Measurement of the ζ -potential of gas bubbles in aqueous solutions by microelectrophoresis method // *J. Colloid Interface Sci.* 2001. Vol. 243. P. 128–135.
 9. Takahashi M. ζ -potential of microbubbles in aqueous solutions: electrical properties of the gas-water interface // *J. Phys. Chem. B.* 2005. Vol. 109. P. 21858–21864.
 10. Choi W., Sharma A., Qian S., Lim G., Joo S. W. On steady two-fluid electroosmotic flow with full interfacial electrostatics // *J. Colloid Interface Sci.* 2011. Vol. 357. P. 521–526.
 11. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation // *J. Fluid Mech.* 1971. Vol. 50. P. 689–703.
 3. Gao Y., Wang T.N., Yang C. Transient two-liquid electro-osmotic flow with electric charges at the interface. *Colloids Surfaces A*, 2005, vol. 266, pp. 117–128.
 4. Gao Y., Wang T.N., Yang C., Ooi K. T. Two-fluid electro-osmotic flow in microchannels. *J. Colloid Interface Sci.* 2005, vol. 284, pp. 306–314.
 5. Haiwang L., Wang T.N., Nguyen T.N. Time-dependent model of mixed electro-osmotic/pressure-driven three immiscible fluids in rectangular microchannel. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2010, vol. 53, pp. 772–785.
 6. Griffiths S.K., Nilson R.H. Charged species transport, separation, and dispersion in nanoscale channels: autogenous electric field-flow fractionation. *Anal. Chem.*, 2010, vol. 78, pp. 772–778.
 7. Graciaa A., Morel G., Saulner P., Lachaise J., Schecher R.S. ζ -potential in gas bubbles. *J. Colloid Interface Sci.*, 2005, vol. 172, pp. 131–136.
 8. Yang C., Dabros T., Li D., Czarnecki J., Masliyah J. H. Measurement of the ζ -potential of gas bubbles in aqueous solutions by microelectrophoresis method. *J. Colloid Interface Sci.* 2001, vol. 243, pp. 128–135.
 9. Takahashi M. ζ -potential of microbubbles in aqueous solutions: electrical properties of the gas-water interface. *J. Phys. Chem. B*, 2005, vol. 109, pp. 21858–21864.
 10. Choi W., Sharma A., Qian S., Lim G., Joo S. W. On steady two-fluid electroosmotic flow with full interfacial electrostatics. *J. Colloid Interface Sci.*, 2011, vol. 357, pp. 521–526.
 11. Orszag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation. *J. Fluid Mech.* 1971, vol. 50, pp. 689–703.

References

1. Chang H.-C., Yossifon G., Demekhin E. A. Nanoscale electrokinetics and microvortices: How microhydrodynamics affects nanofluidic ion flux. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 2012, vol. 44, pp. 401–426.
2. Lee J.S.H., Li D. Electro-osmotic flow at a liquid-air interface. *Microfluid. Nanofluidics*, 2006, vol. 2, pp. 361–365.

Статья поступила 6 октября 2014 г.

© Горбачева Е. В., Ганченко Г. С., Демёхин Е. А., Кирий В. А., 2014