Информационные модели

УДК 519.68: 681.51 512.573

МОРФИЗМЫ ИНФОРМАЦИОННЫХ ОБЪЕКТОВ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СРЕД ОБЛАСТЕЙ ЗНАНИЙ[1]

К. И. Костенко[2]

MORPHISMS OF INFORMATION OBJECTS IN A FUNDAMENTAL MODEL OF THE SUBJECT DOMAINS KNOWLEDGE SPACES

Kostenko K. I.

The structure of information object has been described for the abstract model of subject domains knowledge spaces, based on infinite, enumerable sets of configurations. The concept of a morphism of configurations has been defined, i.e. a transformation monotonous relative to the structure and content of information objects. General properties of morphisms have been considered, as well as special classes of adapting, compressing and generalizing morphisms.

Введение

В работе построен фрагмент формализованной структурно-функциональной модели информационных сред, образуемых бесконечными нумерованными множествами взаимодействующих и изменяющихся во времени информационных объектов.

Модель информационной среды имеет вид алгебраической системы, состоящей из носителя, а также систем функциональных и логических операций [1]. Основными приложениями этой модели являются цифровые информационные среды, называемые «корпоративными средами знаний» и «полями знаний» [2, 3].

Целью создания модели является построение на ее основе компонент фундаментальной технологии проектирования, анализа, наполнения и использования информационных сред конкретных областей знаний.

1. Структурное представление информационных объектов

Пусть $\mathbf{M}$ — бесконечное нумерованное множество конфигураций [4], содержащее элемент Λ, называемый пустой конфигурацией.

Определение 1. *Разложением конфигураций* называется всюду определенное вычислимое отображение $\varepsilon : \mathbf{M} \to \mathbf{M} \times \mathbf{M}$, для которого

1) $\varepsilon(\Lambda) = (\Lambda, \Lambda)$;

2) $\forall\, z_1, z_2 \in \mathbf{M}\ \exists\, z_0 \in \mathbf{M}\ \big(\varepsilon(z_0) = (z_1, z_2)\big)$.

Разложению конфигураций ε сопоставим отображение $d_\varepsilon : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$, называемое функцией глубины разложения конфигураций и задаваемое соотношениями:

1) $d_\varepsilon(z) = 0 \Leftrightarrow z = \Lambda$;

2) $d_\varepsilon(z) = \max\big(d_\varepsilon(z_1), d_\varepsilon(z_2)\big) + 1$, если $\varepsilon(z) = (z_1, z_2)$.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-07-96800).

[2]Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий, начальник отдела разработки информационных систем Центра интернет Кубанского государственного университета.

Определение 2. Разложение конфигураций ε называется *конечным*, если функционал d_ε является всюду определенным.

Будем рассматривать такие разложения ε, для которых множества $\mathbf{M}_\varepsilon(z_1, z_2) = \{z_0 \,|\, \varepsilon(z_0) = (z_1, z_2)\}$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$, являются бесконечными. Конфигурация z называется элементарной (неразложимой), если $\varepsilon(z) = (\Lambda, \Lambda)$. Существование нескольких конфигураций, составляемых из $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$, интерпретируется как допустимость различных схем связывания z_1 и z_2 в один информационный объект (семантическое представление) [5–7].

Определение 3. *Семантическим пространством* называется алгебраическая система [1] $\mathbf{R} = (\mathfrak{R}, \mathbf{O}, \mathbf{C})$, в которой $\mathfrak{R}$ — бесконечное нумерованное множество семантических связей.

Содержательной интерпретацией семантической связи $r \in \mathfrak{R}$ является бинарное отношение на $\mathbf{M}$, образованное множеством пар конфигураций, из которых с помощью r могут быть составлены новые элементы $\mathbf{M}$.

Элементами множества $\mathbf{O}$ являются вычислимые операции $\cup$, $\cap$, -1, $^\circ$ и c, где $\cup$, $\cap$ — бинарные операции объединения и пересечения, -1 — обращения, а $^\circ$ и c — суперпозиция и композиция элементов $\mathfrak{R}$.

Множество $\mathfrak{R}$ вместе с операциями $\cup$ и $\cap$ образует решетку [1], в которой $\cup$ и $\cap$ — операции нахождения верхней и нижней граней произвольных пар элементов $\mathfrak{R}$.

Операция композиции $c : \mathfrak{R}^* \to \mathfrak{R}$ является вычислимым биективным отображением. Семантическая связь $r = c\,(r_1, \ldots, r_k)$ называется композицией связей $r_1, \ldots, r_k$. Отношение $r \in \mathfrak{R}$ считается элементарным, если $c^{-1}(r) = r$. Операция c определяет структурное представление всякого $r \in \mathfrak{R}$ в виде нагруженного дерева, обозначаемого как $\mathbf{D}_c(r)$. Корню этого дерева приписан элемент $r \in \mathfrak{R}$, а его потомки являются корнями деревьев, представляющих отношения, входящие в $c^{-1}(r) = (r_1, \ldots, r_k)$.

Для c предполагается выполненным условие невозможности отношения ρ_1 между произвольным элементом $r \in \mathfrak{R}$ и всяким элементом $\mathbf{D}_c(r)$, задаваемое предикатом $\forall\ r, r' \in \mathfrak{R}\ \big((r'$ приписана внутренней вершине $\mathbf{D}_c(r)) \to (r, r') \notin \rho_1\big)$.

Композиции элементов $\mathfrak{R}$ позволяют конструировать сложные семантические зависимости между информационными объектами. Множество $\mathfrak{R}$ замкнуто относительно операции c

$$\forall\ r_1, \ldots, r_n, q_1, \ldots, q_m \in \mathfrak{R},$$
$$\forall\ i = 1, \ldots, \min(m, n),$$
$$(r_i \rho_1 q_i) \to c(r_1, \ldots, r_n) \rho_1 c(q_1, \ldots, q_m).$$

Если z_1, $z_2 \in \mathbf{M}$, то требование бесконечности $\mathbf{M}_\varepsilon(z_1, z_2)$ означает бесконечность множества элементов $\mathfrak{R}$, которые могут использоваться для семантического связывания z_1 и z_2. Для таких множеств дополнительно предполагается рекурсивность и также замкнутость относительно операций $\cup$, $\cap$, c.

Множество $\mathbf{C}$ содержит вычислимые бинарные отношения ρ_1, ρ_2 на $\mathfrak{R}$, называемые отношениями предшествования и совместимости связей, определяемые выражениями

$$\forall\ r_1, r_2 \in \mathfrak{R}\ (r_1 \rho_1 r_2 \Leftrightarrow r_1 \subseteq r_2),$$
$$\forall\ r_1, r_2 \in \mathfrak{R}\ (r_1 \rho_2 r_2 \Leftrightarrow r_1 \cap r_2 \neq \varnothing).$$

Определение 4. Вычислимое отображение $\psi : \mathbf{M} \to \mathfrak{R}$ называется *семантическим связыванием* для разложения ε, если

$$\forall\ z', z'' \in \mathbf{M}\big(\varepsilon(z') = \varepsilon(z'') \to \psi(z') \rho_2 \psi(z'')\big).$$

Семантическое связывание дополняет ε, задавая значения семантических зависимостей между компонентами разложений конфигураций.

Определение 5. *Декомпозицией конфигураций* называется всякая пара $d = (\varepsilon, \psi)$, составленная из отображений конечного разложения и соответствующего ему связывания конфигураций.

2. Арифметизация структурных представлений конфигураций

Декомпозиция конфигураций $d = (\varepsilon, \psi)$ порождает представление элементов $\mathbf{M}$ с помощью конечных нагруженных бинарных деревьев. Корню дерева, представляющего непустую конфигурацию z, сопоставлено отношение $\psi(z)$, а его правое и левое поддеревья соответствуют представлениям первой и второй конфигураций из $\varepsilon(z)$.

Пусть $\mathbf{I}$ — множество конечных двоичных слов, включающее пустое слово λ. Вершинам бесконечного бинарного дерева сопоставим элементы $\mathbf{I}$, так что корневой вершине дерева соответствует λ, а левому и правому

потомкам вершины, помеченной α, соответствуют слова $\alpha 0$ и $\alpha 1$.

Пусть $z \in \mathbf{M}$ и $\alpha \in \mathbf{I}$. Подконфигурацией (α-подконфигурацией) z называется конфигурация $(z)_\alpha$, определяемая соотношениями:

1) $(z)_\lambda = z$;

2) $(z)_0 = z_0$ и $(z)_1 = z_1$, если $\varepsilon(z) = (z_0, z_1)$ и $\varepsilon(z) \neq (\Lambda, \Lambda)$;

3) $(z)_\alpha = \big((z)_\beta\big)_\sigma$, если $\alpha = \beta\sigma$, где $\beta \in \mathbf{I}$, $\sigma \in \{0,1\}$ и $\varepsilon\big((z)_\beta\big) \neq (\Lambda, \Lambda)$.

Если $z \in \mathbf{M}$, то

$$\mathbf{D}(z) = \Big\{\alpha \mid (\alpha = \lambda) \vee \big((\alpha = \beta\sigma) \,\&\, \&(\sigma \in \{0,1\}) \,\&\, \big(\varepsilon((z)_\beta) \neq (\Lambda, \Lambda)\big)\big)\Big\}$$

называется множеством вершин полного структурного представления (ПСП) конфигурации z. Множество висячих вершин ПСП z обозначим как $\mathbf{O}(z)$.

Множество подконфигураций конфигурации z определяет нагруженное дерево, в котором всякой вершине $\alpha \in \mathbf{D}(z)$, соответствует $(z)_\alpha$.

Определим рекурсивно-перечислимое множество однозначных вычислимых нумераций $\eta_{z1,z2}$ множеств $\mathbf{M}_\varepsilon(z_1, z_2)$, где $z_1, z_2 \in \mathbf{M}$. Для нумерации $\eta_{\Lambda,\Lambda}$ дополнительно потребуем, чтобы $\eta_{\Lambda,\Lambda}(0) = \Lambda$.

Семейству нумераций $\eta_{z1,z2}$ сопоставим отображение $\eta : \mathbf{M} \to \mathbf{N}$, такое что

$$\forall\, z \in \mathbf{M}\big(\eta(z) = \min t(\eta_{\varepsilon(z)}(t) = z)\big).$$

Отображение η позволяет представлять отдельные конфигурации в виде нагруженных бинарных деревьев с вершинами из $\mathbf{D}(z)$, называемых арифметическими представлениями конфигураций.

Вершинам деревьев $\alpha \in \mathbf{D}(z)$ сопоставляются значения $\eta\big((z)_\alpha\big)$. Числа, соответствующие вершинам $\alpha \in \mathbf{O}(z)$, являются $\eta_{\Lambda,\Lambda}$ номерами элементарных конфигураций.

Дерево, вершины которого имеют два потомка или не имеют ни одного и нагружены целыми неотрицательными числами, представляет некоторую конфигурацию. Одинаковые разметки внутренних вершин таких представлений могут соответствовать разным элементам $\mathfrak{R}$.

Введем обозначения

$$[z]_\alpha = \begin{cases} \psi((z)\alpha), & \alpha \in \mathbf{D}(z)/\mathbf{O}(z), \\ (z)\alpha, & \alpha \in \mathbf{O}(z), \end{cases}$$

$[z]_\alpha^{-1}$ — семантическая связь из $\mathfrak{R}$ (отношение на $\mathbf{M}$), обратная к $[z]_\alpha$.

Бинарное дерево с вершинами из $\mathbf{D}(z)$, помеченными значениями $[z]_\alpha$, где $\alpha \in \mathbf{D}(z)$, называется ПСП конфигурации z.

3. Алгебраические системы пространств знаний

Структурно-функциональное моделирование информационных сред для массивов предметных и профессиональных знаний позволяет представлять такие среды в виде алгебраических систем $\mathbf{S} = (\mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, образованных:

- носителем $\mathbf{M}$ (составленным из ПСП конфигураций, создаваемых из элементарных информационных объектов с использованием элементов $\mathbf{R}$);
- семейством операторов $\mathbf{F}$ (образованным отображениями элементов $\mathbf{M}$, включающими операции над конфигурациями, преобразования, порождающие информационные процессы на $\mathbf{M}$, а также операции над процессами);
- множеством предикатов $\mathbf{P}$ (формируемым как система логических операций, включающая средства логического анализа и управления).

Семейство операторов алгебраической системы пространства знаний включает вычислимые преобразования — морфизмы конфигураций и жизненных циклов информационных объектов (вычислительных процессов), основным свойством которых является монотонность относительно содержания конфигураций и процессов.

4. Морфизмы конфигураций

Пусть $\subseteq$ — отношение на $\mathbf{I}$, задаваемое выражением

$$\alpha \subseteq \beta \Leftrightarrow \alpha \text{ является началом } \beta,$$

ρ_0 — сужение отношения ρ_1 на множество элементарных конфигураций.

Определение 6. Отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется *изотонным*, если

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{I}\big(\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \xi(\alpha) \subseteq \xi(\beta)\big).$$

Определение 7. Изотонное отображение $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ называется трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, если выполнены условия

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2)), \quad (4.1)$$

$$\forall\, \alpha, \alpha\sigma\beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0,1\}(\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta) \to \\ \to \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta)). \quad (4.2)$$

Пусть ξ является трассированием конфигурации z_1 в конфигурацию z_2, а $\mathbf{W} = \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — некоторый путь в дереве $\mathbf{D}(z_1)$, где $\alpha_2 = \alpha_1\sigma$. Если в последовательности $\xi(\alpha_1), \ldots, \xi(\alpha_n)$ имеет место включение $\xi(\alpha_i) \subset \xi(\alpha_{i+1})$, это означает, что $\xi(\alpha_1)\sigma \subseteq \xi(\alpha_{i+1})$.

Пусть $z', z \in \mathbf{M}$. ПСП z' получается из ПСП z с помощью операции инвертирования, если $\mathbf{D}(z')$ получается из $\mathbf{D}(z)$ изменением порядка следования потомков некоторой вершины $\alpha \in \mathbf{D}(z)/\mathbf{O}(z)$ с одновременной заменой разметки α на $[z]_\alpha^{-1}$. Конфигурация z' называется инверсией $z \in \mathbf{M}$, если $\mathbf{D}(z')$ получается из $\mathbf{D}(z)$ с помощью конечного числа применений операции инвертирования.

Множество конфигураций, являющихся инверсиями конфигурации $z \in \mathbf{M}$, обозначим как $\mathbf{\Delta}(z)$.

Пусть z_2 получается из конфигурации z_1 однократным применением операции инвертирования, изменяющей порядок следования потомков внутренней вершины α. Определим биективное отображение ξ', называемое элементарным инвертированием:

$$\xi'(\beta) = \begin{cases} \alpha 1\gamma, \text{ если } \beta = \alpha 0\gamma, \\ \alpha 0\gamma, \text{ если } \beta = \alpha 1\gamma, \\ \beta, \text{ иначе.} \end{cases}$$

Элементарное инвертирование определяет изменение положения компонент конфигурации z_1 при преобразовании в z_2.

Пусть $z_2 \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ и $z'_1, \ldots, z'_k$ — последовательность конфигураций, в которой z_{i+1} получается из конфигурации z_i $(i = 1, \ldots, k-1)$ с помощью инвертирования, представляемого элементарной инверсией ξ_i, и $z_1 = z'_1$, $z_2 = z'_k$. Тогда композиция отображений $\xi' = \xi_{k-1}, \ldots, \xi_1$ называется инвертированием z_1 в z_2. Отображение ξ' является биекцией на множестве $\mathbf{D}(z_1)$, а обратное к нему отображение — инвертированием z_2 в z_1.

Определение 8. Конфигурация $z_1 \in \mathbf{M}$ прослеживается в $z_2 \in \mathbf{M}(z_1 \leqslant z_2)$, если существует такое трассирование $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$, z_1 в z_2, что

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{O}(z_1)((z_1)_\alpha \rho_0 (z_2)_{\xi(\alpha)}), \quad (4.3)$$

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1)([z_1]_\alpha \rho_1 [z_2]_{\xi(\alpha)}). \quad (4.4)$$

Определение 9. Конфигурация z_1 вложена в $z_2 \in \mathbf{M}(z_1 \subseteq z_2)$, если существуют такие $z^1 \in \Delta(z_1)$ и $z^2 \in \Delta(z_2)$, что $z^1 \leqslant z^2$.

Понятие трассирования уточняет содержательные представления о вложении ПСП конфигураций. Вложение $z_1 \subseteq z_2$ означает существование такого трассирования ξ для подходящих инверсий z_1 и z_2, что для значений разметок, связываемых отображением ξ внутренних и висячих вершин ПСП инверсий z_1 и z_2, выполнены отношения ρ_0 и ρ_1.

Из определений 7–9 следует, что отношение включения конфигураций является разрешимым.

Определение 10. Конфигурации z_1 и z_2 называются *эквивалентными* в отношении включения, если $z_1 \subseteq z_2$ и $z_2 \subseteq z_1$.

Теорема 1. Если $z_1 \subseteq z_2$ и $z^1 \in \mathbf{\Delta}(z_1), z^2 \in \mathbf{\Delta}(z_2)$, то $z^1 \subseteq z^2$.

Доказательство. Пусть $z_1 \subseteq z_2$. Тогда найдутся $z'_1 \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ и $z'_2 \in \mathbf{\Delta}(z_2)$, а также трассирование ξ конфигурации z'_1 в z'_2, для которых выполнены условия определения 8.

Обозначим как ξ_i и ξ'_i инверсии z_i в z^i и z'_i, $i = 1, 2$.

Тогда $z'_1 \in \mathbf{\Delta}(z^1)$ и $z'_2 \in \mathbf{\Delta}(z^2)$, поскольку инверсиями z^1 в z'_1 и z^2 в z'_2 являются соответственно суперпозиции отображений $\xi'_1(\xi_1)^{-1}$ и $\xi'_2(\xi_2)^{-1}$.

Поскольку для z'_1, z'_2 и трассирования ξ конфигурации z'_1 в z'_2 выполнены условия определения 8, то $z^1 \subseteq z^2$.

Теорема доказана.

Следствие 1.

$$\forall\, z \in \mathbf{M}\ \forall\, z', z'' \in \mathbf{\Delta}(z)\ (z' \subseteq z'').$$

Следствие 2. Семейство множеств $\{\mathbf{\Delta}(z) \mid z \in \mathbf{M}\}$ образует разбиение $\mathbf{M}$.

Справедливость последнего свойства следует из того, что указанное семейство образует множество классов разбиения для отношения эквивалентности φ на $\mathbf{M}$, задаваемого соотношением

$$\forall\, z_1, z_2 \in \mathbf{M}\ \big(z_1 \varphi z_2 \Leftrightarrow z_1 \in \Delta(z_2)\big).$$

Теорема 2. Если $z_1 \subseteq z_2$ и $z_2 \subseteq z_3$, то $z_1 \subseteq z_3$.

Доказательство. Пусть $z_1 \subseteq z_2$ и $z_2 \subseteq z_3$. Покажем, что $z_1 \subseteq z_3$. Разобьем доказательство теоремы на две части.

I. Пусть для конфигураций z_1, z_2 и z_3 существуют трассирования ξ_i $(i = 1, 2)$ конфигураций z_i в z_{i+1}, для которых выполнены условия прослеживания z_i в z_{i+1}. Докажем, что отображение $\xi = \xi_2\xi_1$ является трассированием, для которого выполнены условия прослеживания z_1 в z_3.

Покажем, что отображение ξ является трассированием z_1 в z_3.

1) Изотонность ξ следует из того, что для любых элементов α, $\beta \in \mathbf{I}$ справедлива последовательность следований для включений

$$\alpha \subseteq \beta \Rightarrow \xi_1(\alpha) \subseteq \xi_1(\beta) \Rightarrow \\ \Rightarrow \xi_2\xi_1(\alpha) \subseteq \xi_2\xi_1(\beta) \Rightarrow \xi(\alpha) \subseteq \xi(\beta).$$

2) Докажем, что для ξ выполнено условие (4.1) определения 7.

Поскольку ξ_1 является трассированием z_1 в z_2, то

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi_1(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2)).$$

Поскольку ξ_2 является трассированием z_2 в z_3, то

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\xi_1(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2)\backslash\mathbf{O}(z_2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi_2\xi_1(\alpha) \in \mathbf{D}(z_3)\backslash\mathbf{O}(z_3)).$$

Следовательно,

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1)(\alpha \in \mathbf{D}(z_1)\backslash\mathbf{O}(z_1) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_3)\backslash\mathbf{O}(z_3)).$$

3) Проверим, что для ξ выполнено условие (4.2) определения 7.

Это условие выполнено для $\xi_i (i = 1, 2)$, что может быть представлено соотношением

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0, 1\} \\ (\xi_i(\alpha) \subset \xi_i(\alpha\sigma\beta) \rightarrow \xi_i(\alpha)\sigma \subseteq \xi_i(\alpha\sigma\beta)).$$

Докажем, что в этом случае справедливо утверждение:

$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0, 1\} \\ (\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta) \rightarrow \xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta)).$$

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{D}(z), \sigma \in \{0, 1\}$ и $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta)$. Возможен один из двух случаев: $\xi_1(\alpha) \subset \xi_1(\alpha\sigma\beta)$ или $\xi_1(\alpha) = \xi_1(\alpha\sigma\beta)$.

В первом случае из включения $\xi_1(\alpha)\sigma \subseteq \xi_1(\alpha\sigma\beta)$ следует, что $\xi_1(\alpha\sigma\beta) = = \xi_1(\alpha)\sigma\gamma$, где $\gamma \in \mathbf{I}$. Поскольку $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta)$, то выполнено соотношение

$$\xi(\alpha) = \xi_2\xi_1(\alpha) \subset \xi_2(\xi_1(\alpha)\sigma\gamma) = \xi(\alpha\sigma\beta),$$

поэтому $\xi_2\xi_1(\alpha)\sigma \subseteq \xi_2(\xi_1(\alpha)\sigma\gamma)$. Следовательно, выполнено включение

$$\xi(\alpha)\sigma \subseteq \xi(\alpha\sigma\beta).$$

Второй случай невозможен, поскольку для него $\xi_2\xi_1(\alpha) = \xi_2\xi_1(\alpha\sigma\beta)$, что противоречит предположению о включении $\xi(\alpha) \subset \xi(\alpha\sigma\beta)$.

Из свойств, доказанных в пунктах 1) – 3), следует, что ξ является трассированием z_1 в z_3.

Проверим, что для ξ выполняются условия (4.3) и (4.4) определения 8, обеспечивающие выполнимость включения z_1 в z_3 в соответствии с определением 9.

Докажем справедливость условия

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{O}(z_1)\ \big((z_1)_\alpha \rho_0 (z_3)_{\xi(\alpha)}\big).$$

Для отображений ξ_1 и ξ_2 выполнены условия вложений $z_1 \subseteq z_2$ и $z_2 \subseteq z_3$. Поэтому если $\alpha \in \mathbf{O}(z_1)$, то справедливы соотношения $(z_1)_\alpha \rho_0 (z_2)_{\xi 1(\alpha)}$ и $(z_2)_{\xi 1(\alpha)} \rho_0 (z_3)_{\xi 2 \xi 1(\alpha)}$. Поскольку ρ_0 является отношением порядка, то $(z_1)_\alpha \rho_0 (z_3)_{\xi(\alpha)}$.

Справедливость второго условия $\forall\, \alpha \in \mathbf{O}(z_1)([z_1]_\alpha \rho_1 [z_3]_{\xi(\alpha)})$ доказывается аналогично, заменой ρ_0 на ρ_1.

II. Рассмотрим общий случай, в котором прослеживания конфигураций z_1 в z_2 и z_2 в z_3 имеют место с точностью до операции инвертирования. Докажем теорему сведением общего случая к уже рассмотренному случаю.

Пусть $z_1' \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ и $z_2' \in \mathbf{\Delta}(z_2)$ — конфигурации, для которых существует трассирование ξ_{12} конфигурации z_1' в z_2' и выполнены условия вложения $z_1 \subseteq z_2$. Возьмем такие

$z_2'' \in \mathbf{\Delta}(z_2)$ и $z_3' \in \mathbf{\Delta}(z_3)$, что существует аналогичное трассирование ξ_{23} конфигурации z_2'' в z_3'.

Покажем, что существует трассирование z_1' в z_3', для которого выполнены условия включения z_1 в z_3.

Пусть ξ'' инвертирование z_2' в z_2''. Покажем, что найдутся такие $z_1'' \in \mathbf{M}$ и трассирование ξ' конфигурации z_1'' в z_2'', что выполнены условия вложения z_1'' в z_2''.

Определим инвертирование ξ' конфигурации z_1' в такую конфигурацию z_1'', что существует трассирование ξ_{12}' конфигурации z_1'' в z_2'', для которого выполнены условия вложения $z_1'' \subseteq z_2''$ с помощью соотношений:

1) $\xi'(\Lambda) = \Lambda$;

2) если для $\alpha \in \mathbf{I}$ и $\sigma \in \{0,1\}$ в $\mathbf{D}(z_1')$ существует такая ветвь $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \alpha\sigma$, для которой

$$(\xi_{12}(\alpha_1) = \ldots = \xi_{12}(\alpha_{k-1}) \subset \xi_{12}(\alpha_k))\&(\xi''(\xi_{12}(\alpha)\sigma) = \xi''(\xi_{12}(\alpha))\overline{\sigma}),\ \text{то}\ \xi'(\alpha\sigma) = \xi'(\alpha)\overline{\sigma};$$

3) если для $\alpha \in \mathbf{I}$ и $\sigma \in \{0,1\}$ в $\mathbf{D}(z_1')$ нет такой ветви $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, что $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \alpha\sigma$, для которой

$$(\xi_{12}(\alpha_1) = \ldots = \xi_{12}(\alpha_{k-1}) \subset \xi_{12}(\alpha_k))\&(\xi''(\xi_{12}(\alpha)\sigma) = \xi''(\xi_{12}(\alpha))\overline{\sigma}),\ \text{то}\ \xi'(\alpha\sigma) = \xi'(\alpha)\sigma.$$

Покажем, что $\xi_{12}' = \xi''\xi_{12}(\xi')^{-1}$ является трассированием z_1'' в z_2''.

1. Справедлива последовательность эквивалентностей

$$\alpha \in \mathbf{O}(z_1'') \Leftrightarrow (\xi')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_1') \Leftrightarrow \xi_{12}(\xi')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_2') \Leftrightarrow \xi''\xi_{12}(\xi')^{-1}(\alpha) \in \mathbf{O}(z_2'').$$

Следовательно, для $\xi_{12}'\xi''\xi_{12}(\xi')^{-1}$ выполнено условие (4.1) определения 7.

2. Пусть α_1, α_2, …, α_k — такая ветвь в $\mathbf{D}(z_1'')$, начинающаяся в вершине α_1, что $\alpha_1 = \alpha$ и $\alpha_2 = \alpha_1\sigma$, для которой выполнено условие $\xi_{12}'(\alpha_1) = \ldots = \xi_{12}'(\alpha_{k-1}) \subset \xi_{12}'(\alpha_k)$. Тогда $(\xi')^{-1}(\alpha_1)$, $(\xi')^{-1}(\alpha_1), \ldots, (\xi')^{-1}(\alpha_k)$ образует ветвь в $\mathbf{D}(z_1')$. Перепишем эту ветвь в виде β_1, β_2, …, β_k, где $\beta_2 = \beta_1\delta$. Отсюда следует $\xi_{12}(\beta_1) = \ldots = \xi_{12}(\beta_{k-1}) \subset \xi_{12}(\beta_k))$.

Поскольку ξ_{12} является трассированием z_1' в z_2', то $\xi_{12}(\beta_{k-1})\delta \subset \xi_{12}(\beta_k)$.

Рассмотрим значение $\xi''\big(\xi_{12}(\beta_{k-1})\delta\big) = \xi''\xi_{12}(\beta_{k-1})\omega$. Если $\delta = \overline{\sigma}$, имеет место случай 2) определения ξ', из которого вытекает, что $\omega = \overline{\sigma}$. Если $\delta = \sigma$, то имеет место случай 3) того же определения, из которого вытекает, что $\omega = \sigma$. Поэтому выполняются соотношения

$$\xi_{12}'(\alpha_1)\sigma = \xi''\xi_{12}(\xi')^{-1}(\alpha_1)\sigma \subseteq \subseteq \xi''\xi_{12}(\xi')^{-1}(\alpha_k) = \xi_{12}'(\alpha_k).$$

Это означает, что для ξ_{12}' и ξ_{23} выполнены условия включений конфигураций $z_1'' \subseteq z_2''$ и $z_2'' \subseteq z_3'$. Тогда из доказательства первой части теоремы следует, что существует трассирование ξ конфигурации z_1'' в z_3', для которого выполнены условия определений 7 и 8. Поэтому $z_1'' \subseteq z_3'$.

Поскольку $z_1'' \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ и $z_3' \in \mathbf{\Delta}(z_3)$, то на основании теоремы 1 можно утверждать, что $z_1 \subseteq z_3$.

Теорема доказана.

Доказанные в теоремах 1 и 2 свойства означают, что для проверки вложенности произвольных конфигураций z_1 и z_2 достаточно доказать вложенность произвольных конфигураций z^1 и z^2, совпадающих с z_1 и z_2 с точностью до инвертирования, для которых существует трассирование, удовлетворяющее условиям определений 7 и 8.

Определение 11. Всюду определенное вычислимое отображение $\mu : \mathbf{M} \to \mathbf{M}$ называется *морфизмом конфигураций*, если $\forall\, z_1, z_2 (z_1 \subseteq z_2 \to \mu(z_1) \subseteq \mu(z_2))$.

Морфизм μ называется *адаптивным*, если $\forall\, z \in \mathbf{M}(\mu(z) \subseteq z)$.

Морфизм μ называется *обобщающим*, если $\forall\, z \in \mathbf{M}(z \subseteq \mu(z))$.

Теорема 3. Множество морфизмов конфигураций замкнуто относительно операции суперпозиции.

Адаптивные морфизмы в самом общем виде представляют множество возможных схем адаптации структуры и содержания информационных сред областей знаний [8, 9].

Теорема 4. Множества адаптивных и обобщающих морфизмов замкнуты относительно операции суперпозиции.

Рассмотрим пример специального адаптивного и обобщающего морфизма μI, который преобразует всякую конфигурацию z в эквивалентную ей конфигурацию, удаляя из

z избыточные фрагменты, прослеживаемые в остающихся фрагментах z.

Пусть $z \in \mathbf{M}$. Преобразуем z в $\mu I(z)$ с помощью следующей рекурсивной схемы:

1. Если z — элементарная конфигурация, то положим $\mu I(z) = z$.

2. Если конфигурация z не является элементарной, то для обхода дерева ПСП z в глубину сверху вниз и слева направо найдем первое собственное поддерево z с корнем $\alpha \in \mathbf{D}(z)$, для которого $z \subseteq (z)_\alpha$.

3. Если такое поддерево найдено, то положим $\mu I(z) = \mu I((z)_\alpha)$.

4. Если z не вложена ни в одну из своих собственных подконфигураций, то определим значение $\mu I(z)$ соотношениями $[\mu I(z)]_\Lambda = [z]_\Lambda$, $(\mu I(z))_0 = \mu I((z)_0)$ и $(\mu I(z))_1 = \mu I((z)_1)$.

Отображение μI назовем *сжатием конфигураций*.

Нетрудно проверить, что выполняются свойства

$$\forall\, z \in \mathbf{M}\ (\mu(z) \subseteq z), \quad \forall\, z \in \mathbf{M}\ (z \subseteq \mu(z)).$$

Теорема 5. Отображение μI является адаптивным и обобщающим морфизмом.

Доказательство. Докажем, что $\forall\, z_1, z_2 (z_1 \subseteq z_2 \to \mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2))$.

Проведем доказательство индукцией по глубине ПСП конфигурации z_1 такой что $z_1 \subseteq z_2$.

Базис индукции. Пусть $d(z_1) = 0$ и $z_1 \subseteq z_2$, тогда z_1 — элементарная, а $\mu I(z_1) = z_1$ и $\mathbf{\Delta}(z_1) = \{z_1\}$. Существует такое трассирование ξ конфигурации z_1 в некоторую конфигурацию $z_2' \in \Delta(z_2)$, удовлетворяющее условиям определений 7 и 8, для которого

$$\xi(\lambda) \in O(z_2') \text{ и } [z_1]_\lambda \rho_0 [z_2']_{\xi(\lambda)}.$$

Справедливо также отношение $[z_1]_\lambda \rho_0 [z_2]_\beta$, где $\beta \in \mathbf{O}(z_2)$ сопоставляется $\xi(\lambda) \in \mathbf{O}(z_2')$ при инвертировании z_2 в z_2'.

Из определения μI следует существование $\gamma \in \mathbf{O}(\mu I(z_2))$, для которого $[z_2]_\beta \rho_0 [\mu I(z_2)]_\gamma$. Поскольку ρ_0 — это транзитивное отношение, то

$$[z_1]_\lambda \rho_0 [\mu I(z_2)]_\gamma.$$

Это означает, что отображение ξ', определяемое соотношением $\xi'(\lambda) = \gamma$, является трассированием $\mu I(z_1)$ в $\mu I(z_2)$, для которого выполнены условия определений 7 и 8. Следовательно, $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2)$.

Индуктивное предположение. Пусть для всякой конфигурации z_1, глубина которой не превосходит k, выполняется соотношение

$$\forall\, z_2 \in \mathbf{M}(z_1 \subseteq z_2 \to \mu(z_1) \subseteq \mu(z_2)).$$

Индуктивный переход. Пусть $z_1 \subseteq z_2$ и $d(z_1) = k+1$. Пусть $\xi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ — трассирование $z_1' \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ в $z_2' \in \mathbf{\Delta}(z_2)$, для которого выполняются условия вложения $z_1 \subseteq z_2$ на основе определений 7 и 8. Проведем доказательство индукцией по глубине ПСП конфигурации z_2.

Базис индукции. Случай $d(z_2) = 0$ невозможен, поскольку $d(z_1) > 0$, а для выполнения условий вложения $z_1 \subseteq z_2$ для подходящих конфигураций $z_1' \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ и $z_2' \in \mathbf{\Delta}(z_2)$ и трассирования ξ должно выполняться условие

$$\forall\, \alpha \in \mathbf{D}(z_1') \backslash \mathbf{O}(z_1')\ (\xi(\alpha) \in \mathbf{D}(z_2') \backslash \mathbf{O}(z_2')).$$

Последнее неверно, если $d(z_2) = 0$, так как в этом случае $\mathbf{D}(z_2') \backslash \mathbf{O}(z_2') = \varnothing$.

Следовательно, истинна импликация

$$(z_1 \subseteq z_2\ \&\ d(z_2) = 0) \to \mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2).$$

Индуктивное предположение. Пусть для всякой конфигурации z_2, глубина которой не превосходит t, выполнено условие

$$z_1 \subseteq z_2 \to \mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2).$$

Индуктивный переход. Пусть $d(z_2) = t+1$. Конфигурация z_2 не является элементарной и для нахождения значения $\mu I(z_2)$ используется одно из соотношений 3 или 4 схемы определения μI. Рассмотрим оба случая.

Случай 1. Пусть значение $\mu I(z_2)$ определяется с помощью соотношения 3, тогда

$$\mu I(z_2) = \mu I(z_2'),$$

где z_2' — собственная подконфигурация конфигурации z_2, для которой выполнено неравенство $d(z_2') \leqslant t$. Из транзитивности отношения $\subseteq$ следует, что $z_1 \subseteq z_2'$. Из индуктивного предположения следует справедливость соотношения $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2')$. Поскольку в рассматриваемом случае $\mu I(z_2) = \mu I(z_2')$, то $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2)$.

Случай 2. Пусть значение $\mu I(z_2)$ определяется с помощью соотношения 4, тогда справедливы равенства

$$[\mu I(z_2)]_\Lambda = [z_2]_\Lambda, (\mu I(z_2))_0 = \mu I((z_2)_0),$$
$$(\mu I(z_2))_1 = \mu I((z_2)_1).$$

Пусть ξ — это трассирование $z'_1 \in \mathbf{\Delta}(z_1)$ в $z'_2 \in \mathbf{\Delta}(z_2)$, для которого выполнены условия вложения z_1 в z_2. Для ξ имеет место один из вариантов

$$\xi(\lambda) \neq \lambda \text{ или } \xi(\lambda) = \lambda.$$

Пусть $\xi(\lambda) \neq \lambda$. Тогда найдется такая собственная подконфигурация $(z_2)_\alpha$ конфигурации z_2, что $z_1 \subseteq (z_2)_\alpha$. Поскольку $d((z_2)_\alpha) \leqslant t$, то по индуктивному предположению $\mu I(z_1) \subseteq \mu I((z_2)_\alpha)$. Так как $\mu I((z_2)_\alpha) \subseteq \mu I(z_2)$, то из теоремы 2 следует включение $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2)$.

Пусть $\xi(\Lambda) = \lambda$, тогда

$$[z'_1]_\Lambda \rho_1 [z'_2]_\Lambda \;\&\; ([z'_2]_\lambda = [z_2]_\lambda \vee [z'_2]_\lambda = ([z_2]_\lambda)^{-1}).$$

Если справедливо соотношение

$$\big([z'_1]_\lambda \rho_1 [z'_2]_\lambda\big) \;\&\; \big([z'_2]_\lambda = [z_2]_\lambda\big),$$

то $[\mu I(z_1)]_\lambda \rho_1 [\mu I(z_2)]_\Lambda$ и $(z_1)_0 \subseteq (z_2)_0$, $(z_1)_1 \subseteq (z_2)_1$. Из первого индуктивного предположения следуют включения

$$\mu I((z_1)_0) \subseteq \mu I((z_2)_0), \quad \mu I((z_1)_1) \subseteq \mu I((z_2)_1).$$

Это означает, что $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2)$.

Если же имеют место соотношения

$$\big([z'_1]_\lambda \rho_1 [z'_2]_\lambda\big) \;\&\; \big([z'_2]_\lambda = ([z_2]_\lambda^{-1})\big),$$

то $[\mu I(z_1)]_\lambda \rho_1 [\mu I(z_2)]_\lambda$ и $(z_1)_0 \subseteq (z_2)_1$, $(z_1)_1 \subseteq (z_2)_0$. Из первого индуктивного предположения следуют включения

$$\mu I((z_1)_0) \subseteq \mu I((z_2)_1), \quad \mu I((z_1)_1) \subseteq \mu I((z_2)_0),$$

поэтому $\mu I(z_1) \subseteq \mu I(z_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 6.

$$(z_1 \subseteq z_2 \text{ и } z_2 \subseteq z_1) \Leftrightarrow \mu I(z_1) = \mu I(z_2).$$

Множество значений морфизма μI обозначим как $\mathbf{M}_0$.

Теорема 7. $\forall z \in \mathbf{M}_0$ $(\mu I(z) = z)$.

Последние теоремы доказываются индукцией по глубине ПСП конфигураций аналогично теореме 5.

Заключение

Понятие морфизма конфигураций, определенное в настоящей работе, уточняет представления о семантических операциях, частными случаями которых являются преобразования, используемые в процессах извлечения, накопления и передачи знаний. Примерами таких операций являются адаптация и обобщение систем знаний.

Литература

1. Общая алгебра. Т. 2 / Под общ. редакцией Л. А. Скорнякова. М.: Наука, 1991. 480 с.
2. *Костенко К. И., Левицкий Б. Е.* Интеллектуальные интегрированные электронные среды областей знаний (базовые компоненты) // Известия вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. № 1. 2004. С. 17–22.
3. *Coleman A. S., Smith T. R., Buchel O. A., Mayer R. E.* Learning spaces in digital libraries//LNCS 2163. 2001. P. 251–262.
4. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977. 416 с.
5. *Кузнецов И. П.* Семантические представления. М.: Наука, 1986. 356 с.
6. *Kalfoglou Y., Schorlemmer M.* Ontology mapping: the state of the art // The Knowledge Engineering Review. 2003. Vol. 18:1. P. 1–31.
7. *Decker S., Melnik S., van Harmelen F., Fensel D., Klein M., Broekstra J., Erdmann M., Horrocks I.* The Semantic Web: The Roles of XML and RDF // Internet Computing September-October 2000. IEEE Computer Society. 2000. Vol. 4. No. 5.
8. *Brusilovsky P. G.* Current Trends and Applications of Artificial Intelligence in Education // Proc. of Workshop at the 4th World Congress on Expert Systems. Mexico City, Mexico. ITESM(1998). P. 9–16.
9. *Bergmann R.* Experience Management (Ch. 8. Experience Adaptation) // LNAI 2432. 2002. P. 219–239.

Статья поступила 11 марта 2004 г.
Кубанский государственный университет
© Костенко К. И., 2004