УДК 004.822

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ИЕРАРХИЧЕСКИХ СЕМАНТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

Костенко К. И., Лебедева А. П.

ALGEBRAIC STRUCTURE OF HIERARCHICAL SEMANTIC NETWORKS

Kostenko K. I., Lebedeva A. P.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: kostenko@kubsu.ru

Abstract. The mathematical description of hierarchical semantic networks class is specified. Such networks are natural as coherent semantic representations of logical-mathematical models of subject domain knowledge spaces. Such models are realized in format similar to G. Frege's triangle and D. Pospelov's square. The description is agreed with the unified format for abstract knowledge representation formalisms and includes sets of knowledge representations and knowledge fragments, operation of knowledge fragments composition and the relation of fragments inclusion. The system of requirements to the sets of the objects making networks and network fragments structures is specified.

The algorithm of creation of any fragments of hierarchical networks from basic fragments of such networks by operation of composition is defined. Existence of algorithm of finding the shortest sequence of the composition operation that create any fragment of a network is proved. Any sequence of compositions defines algebraic structure of the received semantic network. That structure consists of network fragments ordered by relation of transformation possibility of one fragment of a network into another fragment. This relation is not the order relation on a set of fragments of semantic networks, but it is an order on a set of networks. Variants of monotony relations for composition and inclusions of semantic networks fragments are considered.

Keywords: semantic network, knowledge composition, knowledge inclusion, knowledge fragment, algebraic structure, knowledge presentation formalism

Введение

Существующие формализмы представления знаний определяются преимущественно индуктивно как обобщение конкретных ситуаций и опыта. Ими обеспечиваются теоретические основы для технологий искусственного интеллекта и инженерии знаний. Класс иерархических семантических сетей реализует специальный подход к формализованному представлению знаний. Выразительные возможности этого класса — наибольшие среди традиционных формализмов знаний [1]. Важность семантических сетей связана с тем, что они являются естественным и унифицированным форматом связного представления логико-математических моделей областей знаний [2]. Такие модели основаны на алгоритмическом и алгебраическом подходах к представлению и обработке знаний. Они составляют основу технологии прикладных пространств знаний. Последние получаются из абстрактных моделей с помощью операций гомоморфного расширения и интеграции, позволяющих конструировать слабо формализованные расширения таких моделей. Класс сетей не является максимальным элементом для отношения вложения на многообразии всех формализмов знаний [3]. Качественно этот формализм сложнее таких распространённых формализмов, как дескрипционные логики или образовательные пространства Дуанона–Фалмажа.

1. Формализм иерархических семантических сетей

Уточним класс иерархических семантических сетей как математический формализм, основанный на конструктивных мно-

Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: kostenko@kubsu.ru

Лебедева Анастасия Павловна, аспирант кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: lebedeva@fpm.kubsu.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ (13-01-96513).

жествах фрагментов представлений знаний, операциях композиции и сравнения фрагментов. Последние являются формальными аналогами характеристик сетей, существенных для уточнения эффективных форматов представления и схем практического использования пространств знаний [1].

Определим два бесконечных вычислимых непересекающихся множества

$$V_0 = \{e_i \,|\, i \in N\} \text{ и } V_1 = \{c_i \,|\, i \in N\}.$$

Элементы V_0 называются элементарными вершинами. Элементы V_1 называются неэлементарными вершинами. С их помощью представляются семантические сети. Определим вычислимое семейство вычислимых отношений

$$R = \{r_i \,|\, i \in N \;\&\; r_i \subseteq ((V_0 \cup V_1) \times (V_0 \cup V_1)\}.$$

Элементы R используются для разметки рёбер в семантических сетях. Система требований к семейству R включает разрешимость свойства принадлежности пар вершин произвольным отношениям и свойства вложения отношений. Кроме того, R замкнуто для операций объединения, пересечения и обращения отношений, которые являются вычислимыми. При выполнимости перечисленных требований семейство R называется семантическим пространством [1]. Обозначим как ν^0, ν^1, ν^2 и ν^R — однозначные вычислимые нумерации множеств V_0, V_1, $V_0 \cup V_1$ и R соответственно. Тогда вычислимыми являются следующие функции, связанные со свойствами рассматриваемых множеств и операций над ними:

1) $X_R(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu^R i \not\subset \nu^R j, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$
2) $X_V(i,j,k) = \begin{cases} 0, & \text{если } (\nu^2 i, \nu^2 j) \notin \nu^R k, \\ 1, & \text{иначе;} \end{cases}$
3) $f_\cup(i,j) = k \Leftrightarrow \nu^R i \cup \nu^R j = \nu^R k;$
4) $f_\cap(i,j) = k \Leftrightarrow \nu^R i \cap \nu^R j = \nu^R k;$
5) $f_{-1}(i) = k \Leftrightarrow (\nu^R i)^{-1} = \nu^R k.$

Всякая иерархическая семантическая сеть представляет собой ориентированный граф $\Sigma = \{V, U\}$. Здесь $V = \{v_i \,|\, i = 1,\ldots,m\}$ и $U = \{u_j \,|\, j = 1,\ldots,n\}$ — конечные множества вершин и ориентированных рёбер, нагруженных отношениями из R. Всякое ребро из U представляется тройкой $u = (a,r,b)$, где a — начало, b — конец ребра u, а $r \in R$ — отношение, для которого $(a,b) \in r$. В Σ любую пару вершин может соединять не более одного ребра. В качестве множеств рёбер семантических сетей выбираются любые возможные множества троек. Это означает, что многообразие семантических сетей составляют все возможные пары конечных множеств $V \subseteq V_0 \cup V_1$ и $U \subseteq (V_0 \cup V_1) \times R \times (V_0 \cup V_1)$, для которых:

1) $\forall a,b \in V \; \forall r \in R((a,r,b) \in U \leftrightarrow \leftrightarrow (a,b) \in r);$
2) $\forall a,b \in V \; \forall r \in R((a,r,b) \in U \rightarrow \rightarrow \forall x,y \in V \, \forall r' \in R(((x,r',y)) \in U \rightarrow \rightarrow x \notin \{a,b\} \vee y \notin \{a,b\})).$

Всякая вершина из V_1 представляет некоторую иерархическую семантическую сеть. Соответствие вершин и обозначаемых ими сетей является однозначным и вычислимым. Поэтому множество SN — всех иерархических семантических сетей является вычислимым и разрешимым. Для SN может быть определено вычислимое отображение $\eta : V_1 \rightarrow SN$. Если $a \in V_1$, то сеть $\eta((\nu^2)^{-1}a)$ представляет способ группирования вершин и отношений между ними в конструкцию. Последняя является связным представлением отдельного знания. Ограничимся рассмотрением только таких отображений η, для которых значение глубины всякой сети в SN — конечное [2]. Удобно рассматривать сети с точностью до обращения рёбер. То есть, если $\Sigma = \{V, U\}$ и $u = (a,r,b)$, то будем считать, что в Σ вершины b и a также связывает отношение r^{-1}. Это позволяет использовать расширенное понятие пути в сети, допускающее возможность обратных рёбер. Такие рёбра моделируются прямыми рёбрами, размеченными обратными семантическими отношениями.

Унифицированное определение класса семантических сетей как отдельного формализма представления знаний включает множества: абстрактных знаний $\mathbf{M}$, фрагментов знаний $\mathbf{D}_{SN}$, операцию композиции $\circ$ и отношение вложения фрагментов $\subseteq$. В общем случае всякий элемент множества $\mathbf{D}_{SN}$ представляется как $\Sigma = (V, U)$, где $V \subset V_0 \cup V_1$ — конечное множество вершин Σ, а U — конечное множество рёбер, размеченных отношениями, выполняющимися между соединяемыми ими вершинами, а также фрагментами рёбер вида $(a, r, \_)$ и $(\_, r, a)$, где $a \in V$, а $r \in R$. Элементы $\mathbf{D}_{SN}$ не могут содержать пары фрагментов рёбер $(a, r, \_)$ и $(\_, r, b)$, для которых $(a,b) \in r$. Последнее требование связано с устойчивостью фрагментов, проявляющейся в обязательности конструирования всех рёбер, которые могут быть составлены из фрагментов рёбер, содержащихся в произвольном фрагменте семантической сети.

Если $a \in V_0 \cup V_1$, $r \in R$, то конструкции $(\{a\}, \varnothing)$ $(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ и $(\{a\}, \{(\_, r, a)\})$ являются базовыми фрагментами семантических сетей. Множество базовых фрагментов вычислимо и разрешимо. Регулярное определение элементов формализма семантических сетей представляет последнее семантическими сетями, дополненными фрагментами рёбер. Такие элементы могут быть составлены из базовых фрагментов семантических сетей с помощью операции композиции.

2. Композиция иерархических семантических сетей

Пусть $\Sigma^0 = (V^0, U^0)$ и $\Sigma^1 = (V^1, U^1)$ — элементы $\mathbf{D}_{SN}$. Фрагмент $\Sigma = (V, U) \in \mathbf{D}_{SN}$ называется композицией Σ^0 и Σ^1 (обозначается как $\Sigma = \Sigma^0 \circ \Sigma^1$), если $V = V^0 \cup V^1$, а U конструируется из U^0 и U^1 с помощью правил:

1) если $(a, r^0, b) \in U^0$, а $(a, r^1, b) \in U^1$ или $(b, (r^1)^{-1}, a) \in U^1$, то $(a, r^0 \cup r^1, b) \in U$;
2) Если $(a, r^\sigma, b) \in U^\sigma$, $\sigma \in \{0{,}1\}$, и в $U^{\overline{\sigma}}$ нет ребра, ведущего из a в b или из b в a, то $(a, r^\sigma, b) \in U$;
3) если $(a, r, \_) \in U^\sigma$, $(\_, r, b) \in U^{\overline{\sigma}}$, $\sigma \in \{0{,}1\}$ и $(a, b) \in r$, то $(a, r, b) \in U$;
4) если $(a, r, \_) \in U^\sigma$, $\sigma \in \{0{,}1\}$, и $\forall (\_, r, b) \in U^{\overline{\sigma}}((a, b) \notin r)$, то $(a, r, \_) \in U$;
5) если $(\_, r, a) \in U^\sigma$, $\sigma \in \{0{,}1\}$, и $\forall (b, r, \_) \in U^{\overline{\sigma}}((b, a) \notin r)$, то $(\_, r, a) \in U$;
6) если $(\_, r, a) \in U^\sigma$, а $U^{\overline{\sigma}}$ не содержит фрагментов рёбер вида $(b, r', \_)$, то $(\_, r, a) \in U$;
7) если $(a, r, \_) \in U^\sigma$, а $U^{\overline{\sigma}}$ не содержит фрагментов рёбер вида $(\_, r', b)$, то $(a, r, \_) \in U$.

В приведённой схеме соотношение 1 реализует аналог наиболее общей унификации фрагментов знаний. Отношение между парой вершин определяется как пересечение отношений, связывающих одну и ту же пару вершин в сетях. Следующее соотношение включает в U рёбра, соединяющие произвольную пару вершин лишь в одной из сетей. Соотношение 3 приведённой схемы определяет правило сцепления для фрагментов рёбер. При этом всякий фрагмент ребра одного фрагмента сети при композиции интегрируется с фрагментами рёбер другого фрагмента сети всеми возможными способами. Последними четырьмя соотношениями реализуется правило сохранения фрагментов рёбер в композиции элементов $\mathbf{D}_{SN}$.

Операция композиции фрагментов сетей является коммутативной с точностью до обращения отношений, связывающих пары вершин. Эта операция не ассоциативна, поскольку не обеспечивается сохранение фрагментов рёбер, сцепляемых по правилу 3. Кроме того, операция композиции сетей замкнута на множестве семантических сетей SN.

Выводом произвольного фрагмента $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ называется последовательность фрагментов $\Xi = \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$, в которой каждый элемент α_i является базовым фрагментом семантической сети, составленным с использованием элементарной вершины, или базовым фрагментом для неэлементарной вершины, которая уже включена в Ξ, либо является композицией двух предшествующих ему элементов Ξ. Последний элемент Ξ представляет собой композицию двух фрагментов, значением которой является Σ. Множество последовательностей, являющихся выводами элементов $\mathbf{D}_{SN}$, вычислимое и разрешимое.

Теорема 1. Для всякого фрагмента $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ существует вывод этого фрагмента.

Доказательство. Из приведённого определения следует, что множество выводов, заканчивающейся одной и той же семантической сетью, непустое и может содержать более одного элемента.

Пусть $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ — фрагмент семантической сети. Определим вывод W_Σ этого фрагмента, составленный из базовых фрагментов семантических сетей, положив его вначале пустым.

1) Составим список фрагментов сетей L, который вначале содержит Σ, представленный одной вершиной.
2) Извлечём из L первый элемент α вида $(\{a\}, \varnothing)$, $(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ или $(\{a\}, \{(\_, r, a)\})$. Составим последовательность фрагментов сетей, образу-

ющих часть вывода α. Допишем α к W_Σ слева. Если a — это элементарная вершина, то завершим действие 2. Если a не является элементарной вершиной, то выполним дополнительные действия. Возьмём $a = (V, U)$. Пусть $V = \{d_1, \ldots, d_k\}$ и $U = \{u_1, \ldots, u_s\}$. Составим последовательность $W = d_1, \ldots, d_k$. Просмотрим элементы U в порядке возрастания индексов рёбер и их фрагментов. Если $u_i = (a, r, b)$, то добавим к W справа базовые фрагменты $(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ и $(\{b\}, \{(\_, r, b)\})$. Если $u_i = (a, r, \_)$ или $u_i = (\_, r, b)$, то добавим к W справа фрагмент $(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ или $(\{b\}, \{(\_, r, b)\})$. Составим a в виде композиции фрагментов, включённых в W. Сначала образуем композицию изолированных вершин из $d_1, \ldots, d_k$. К полученной сети будем добавлять пары фрагментов, включённых в W для отдельных рёбер из U. Закончим построение W, добавив к полученной композиции фрагменты, соответствующие фрагментам рёбер из W . Припишем W слева к W_Σ. Включим в L семантические сети, соответствующие неэлементарным вершинам в V, а также фрагменты сетей $(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ и $(\{b\}, \{(\_, r, b)\})$ для фрагментов рёбер из U.

3) Если список не является пустым, то повторим действие 2.

Приведённая схема действий заканчивается за конечное время поскольку конечно множество вхождений отдельных вершин, рёбер и фрагментов рёбер в Σ. Её результатом является вывод W_Σ — фрагмента сети Σ. □

Пусть $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$. На множестве выводов для этого фрагмента определим такой вывод Σ, который назовём каноническим. Данный вывод — единственный для всякого фрагмента Σ. Пусть $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ и $\Sigma = (V, U)$. Образуем семейство Φ_Σ — всех базовых фрагментов вида $(\{a\}, \varnothing)$,$(\{a\}, \{(a, r, \_)\})$ и $(\{a\}, \{(\_, r, a)\})$, представленных в Σ. Фрагменты первого вида соответствуют изолированным вершинам в Σ и семантических сетях, представляющих сложные вершины в определении $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$. На множестве $\mathbf{B}_{SN}$ — базовых фрагментов вида $(\{\nu^0 i\}, \varnothing)$, $(\{\nu^1 i\}, \varnothing)$, $i \in N$, $(\{\nu^1 i\}, \{(\nu^1 i, \nu^R j, \_) \mid i, j \in N\})$ и $(\{\nu^1 i\}, \{(\_, \nu^R j, \nu^1 i) \mid i, j \in N\})$ рассмотрим функционал

$$c(\alpha) = \begin{cases} i, \text{ если} \\ \qquad \alpha = (\{\nu^0 i\}, \varnothing) \vee \alpha = (\{\nu^1 i\}, \varnothing), \\ i + j, \text{ если} \\ \ \alpha = (\{\nu^0 i\}, \{(\_, \nu^R j, \nu^1 i)\}) \vee \\ \qquad \vee\, \alpha = (\{\nu^1 i\}, \{(\nu^1 i, \nu^R j, \_)\}). \end{cases}$$

Зададим отношение линейного $\prec$ порядка на $\mathbf{B}_{SN}$ с помощью следующего правила:

1) из двух разных фрагментов сетей меньше тот, для которого значение функционала c меньше;
2) фрагменты сетей, для которых значения c являются равными, упорядочиваются в соответствии с приоритетом классов $\{\nu^0 i \mid i \in N\}$, $\{\nu^1 i \mid i \in N\}$, $(\{\nu^1 i\}, \{(\nu^1 i, \nu^R j, \_) \mid i, j \in N\})$ и $(\{\nu^1 i\}, \{(\_, \nu^R j, \nu^1 i) \mid i, j \in N\})$;
3) если значения c для разных фрагментов одного класса совпадают, то меньшим является тот фрагмент, для которого значение j меньше.

Пусть $\Xi = \alpha_1, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_n$ — вывод произвольного фрагмента. Преобразуем Ξ, удалив повторные вхождения одинаковых элементов и упорядочив Ξ с помощью процедуры, выполняемой по шагам.

Шаг 1. Рассмотрим все элементы Ξ, которые могут быть первой композицией произвольной алгебраической структуры композиций. Выберем из них такую композицию β_1, которая соответствует минимальному в $\prec$ фрагменту. Добавим β_1 в конец определяемой последовательности композиций.

Шаг $k+1$. Пусть выполнены k шагов процедуры преобразования Ξ. Определено начало $\Xi' = \beta_1, \beta_2, \ \ldots\ , \beta_k$ создаваемой последовательности. Рассмотрим все элементы Ξ, не вошедшие в Ξ', которые могут быть добавлены к Ξ' с сохранением свойства являться алгебраической структурой. Выберем из них композицию β_{k+1}, которая соответствует минимальному в $\prec$ фрагменту семантической сети. Добавим β_{k+1} к Ξ'.

Продолжаем процесс до тех пор пока в Ξ' не будут включены все разные элементы Ξ.

Назовём полученную структуру канонической. Такая структура единственная для Ξ , поскольку основана на линейном упорядочении множества $\mathbf{B}_{SN}$.

Определение. Алгебраической сложностью фрагмента $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ называется число $L(\Sigma)$, равное минимуму длин выводов для Σ, использующих базовые фрагменты семантических сетей и фрагменты, являющиеся композициями таких фрагментов.

Теорема 2. Функционал L является вычислимым на множестве $\mathbf{D}_{SN}$.

Справедливость утверждения следует из конечности множества фрагментов семантических сетей, все элементы которых являются элементами заданного фрагмента $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$, а также всевозможными теоретико-множественные комбинациями конечного множества отношений, размечающих рёбра в Σ . Поэтому для нахождения значения $L(\Sigma)$ достаточно рассмотреть все возможные размещения без повторений элементов указанного подмножества множества $\mathbf{D}_{SN}$.

Эвристическое правило построения кратчайшего вывода произвольного фрагмента $\Sigma \in \mathbf{D}_{SN}$ связано с использованием правила 3 из определения операции композиции фрагментов сетей. С помощью специальной конструкции достигается возможность одновременного добавления нескольких одинаково размеченных рёбер из фрагментов рёбер вида $(a, r, \_)$ и $(\_, r, b)$. Ещё одна эвристика для построения кратчайших выводов фрагментов сетей связана с реализацией специальной схемы построения фрагментов сетей, представляющих неэлементарные вершины фрагмента Σ. Для этого определяются всевозможные пересечения фрагментов сетей для неэлементарных вершин в Σ, составленных одинаково размеченными рёбрами. Данные эвристики не позволяют определять направленные схемы вывода произвольных сетей, которые добавляют новые рёбра и фрагменты рёбер в уже построенные сети. Существуют примеры таких фрагментов сетей, для которых выводы этих фрагментов, имеющие минимальную сложность, не могут быть получены с помощью заданных эвристик. Это связано с немонотонностью операции композиции относительно отношений, размечающих рёбра композиции произвольных фрагментов сетей. Кратчайшие выводы таких фрагментов включают композиции, использующие правило 1 определения, сокращающее множество уже определённых рёбер фрагмента в конструируемом фрагменте.

На множестве $\mathbf{D}_{SN}$ определим отношение предшествования $\leqslant_A$

$$\forall\, \Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathbf{D}_{SN}(\Sigma_1 \leqslant_A \Sigma_2 \leftrightarrow\ \exists\, \Sigma^1, \ldots$$
$$\ldots, \Sigma^k \in \mathbf{D}_{SN}(\Sigma_2 = \Sigma_1 \circ \Sigma^1 \circ \ldots \circ \Sigma^k)).$$

Пусть Ξ — вывод $\Sigma \in SN$, каждый элемент которого применяется для построения Σ, а $\Omega(\Sigma, \Xi)$ — множество всех семантических сетей в Ξ.

Определение. Множество $\Omega(\Sigma, \Xi)$ называется алгебраической структурой $\Sigma \in SN$ для вывода Ξ.

Покажем, что $\leqslant_A$ является отношением порядка. Рефлексивность $\leqslant_A$ следует из того, что $\forall\, \Sigma \in \mathbf{D}_{SN}(\Sigma = \Sigma_1 \circ \Lambda)$. Пусть $\Sigma_1 \leqslant_A \Sigma_2$ и $\Sigma_2 \leqslant_A \Sigma_3$, а $\Sigma^1, \ldots, \Sigma^k, \Sigma^{k+1}, \ldots, \Sigma^{k+t} \in \mathbf{D}_{SN}$ – такие фрагменты, что $\Sigma_2 = \Sigma_1 \circ \Sigma^1 \circ \ldots \circ \Sigma^k$ и $\Sigma_3 = \Sigma_2 \circ \Sigma^{k+1} \circ \ldots \circ \Sigma^{k+t}$. Тогда $\Sigma_3 = \Sigma_1 \circ \Sigma^1 \circ \ldots \circ \Sigma^k \circ \Sigma^{k+1} \circ \ldots \circ \Sigma^{k+t}$, что означает транзитивность $\leqslant_A$. Здесь $\Lambda = (\varnothing, \varnothing)$ — пустая сеть. Покажем, что отношение $\leqslant_A$ не является антисимметричным на множестве $\mathbf{D}_{SN}$. На рис. 1 изображены разные сети Σ_1 и Σ_2, для которых $\Sigma_1 \leqslant_A \Sigma_2$ и $\Sigma_2 \leqslant_A \Sigma_1$.

Заметим, что транзитивность $\leqslant_A$ не имеет места при дополнительном условии на число добавляемых сетей, предполагающем, что $k = 1$ и $t = 1$. На рис. 2 приведены примеры таких сетей Σ_1, Σ_2 и Σ_3, что существуют $\Sigma^1 \in \mathbf{D}_{SN}$ и $\Sigma^2 \in \mathbf{D}_{SN}$, для которых $\Sigma_2 = \Sigma_1 \circ \Sigma^1$, $\Sigma_3 = \Sigma_2 \circ \Sigma^2$, но не существует такого $\Sigma^3 \in \mathbf{D}_{SN}$, что $\Sigma_3 = \Sigma_1 \circ \Sigma^3$.

В приведённом примере предполагается, что $(a, b) \in r$. При этом $\Sigma_2 = \Sigma_1 \circ \Sigma'$ и $\Sigma_3 = \Sigma_2 \circ \Sigma'$. Для преобразования Σ_1 в Σ_3 с помощью одной композиции требуется убрать фрагмент ребра $(a, r, \_)$. Это можно реализовать с помощью сети, содержащей фрагмент $(\_, r, b)$. При этом в композиции появляется новое ребро (a, r, b) и не содержится фрагмент $(\_, r, b)$. Поэтому не существует такой сети Σ'', что $\Sigma_3 = \Sigma_1 \circ \Sigma''$.

Отношение $\leqslant_A$ для ограничения количества сетей в композиции $\Sigma_1 \circ \Sigma^1 \circ \ldots \circ \Sigma^k$ числом два не является антисимметричным. Пример сетей Σ_1 и Σ_2, для которых не выполняется условие антисимметричности, приведён на рис. 3.

Теорема 3. Отношение $\leqslant_A$ является отношением порядка на SN.

Доказательство. Поскольку $SN \subseteq \mathbf{D}_{SN}$, то рефлексивность и транзитивность отно-

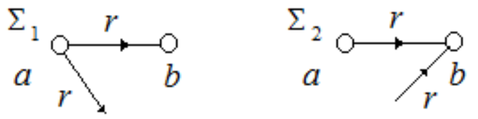

Рис. 1. Сети, для которых не выполняется условие антисимметричности отношения $\leqslant_A$

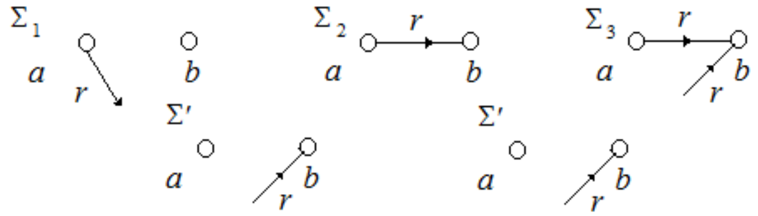

Рис. 2. Нетранзитивность отношения $\leqslant_A$ для ограничений на число сетей в композиции

шения $\leqslant_A$ на $\mathbf{D}_{SN}$ влечёт рефлексивность и транзитивность $\leqslant_A$ на множестве SN.

Проверим условие

$$\forall\,\Sigma_1,\Sigma_2\in SN(\Sigma_1\leqslant_A\Sigma_2\ \ \&\ \ \Sigma_2\leqslant_A\Sigma_1\rightarrow \\ \rightarrow\Sigma_1=\Sigma_2).$$

Пусть $\Sigma_1\leqslant_A\Sigma_2$ и $\Sigma_2\leqslant_A\Sigma_1$. Если $\Sigma_1\neq\Sigma_2$, то либо $V_1\neq V_2$ или $U_1\neq U_2$. Первый случай невозможен, поскольку из $V_1\not\subset V_2$ $(V_2\not\subset V_1)$ следует, что неверно соотношение $\Sigma_1\leqslant_A\Sigma_2$ $(\Sigma_2\leqslant_A\Sigma_1)$. Если $U_1\neq U_2$, то рассмотрим отдельно следующие случаи:

1) $\exists\,a,b\in V_\sigma\ \exists\,r\in R((a,r,b)\in U_\sigma\ \ \&\ \ \&\ \ (\forall r'\in R((a,r',b)\notin U_{\bar\sigma}\ \ \&\ \ \&\ \ (b,r',a)\notin U_{\bar\sigma}))$;
2) $\exists\,a,b\in V_\sigma\ \exists\,r',r''\in R((a,r',b)\in U_\sigma\ \ \&\ \ \&\ \ (a,r'',b)\in U_{\bar\sigma}\ \ \&\ \ r'\neq r'')$.

Здесь $\{\sigma,\overline{\sigma}\}=\{1{,}2\}$. Если имеет место первый случай, то не выполняется предположение $\Sigma_\sigma\leqslant_A\Sigma_{\bar\sigma}$. Во втором случае справедливо соотношение

$$r'\not\subset r''\vee r''\not\subset r'.$$

В таком случае, если $r'\not\subset r''$ то $(\Sigma_2,\Sigma_1)\notin\leqslant_A$, поскольку всякая сеть, получаемая из Σ_1 с помощью операции композиции сетей, может содержать ребро, связывающее вершины a и b, которое размечено отношением, вложенным в r''. Последнее неверно, так как $r'\not\subset r''$. Ситуация $r''\not\subset r'$ также невозможна. Поэтому для $\leqslant_A$ на SN выполняется условие антисимметричности, а само это отношение является отношением порядка. □

3. Вложения иерархических семантических сетей

Уточнение понятия вложения семантических сетей в общем случае связано с понятием вложения графов [4]. Оно состоит в возможности установления соответствий, для которых пути одной сети сопоставляются путям другой сети. Дополнительно предполагается, что последовательности вершин и разметок рёбер сопоставляемых путей оказываются сравнимыми в специальном отношении. Частный случай вложения сетей был рассмотрен для вложений сетей разной глубины [5]. Всякая сеть глубины $k+1$, $k=0{,}1,\ldots$, вкладывается в подходящую сеть глубины k. Для этого достаточно использовать соответствия путей, реализующие преобразование, сохраняющее структуру сетей и близкое к тождественному преобразованию. Теоретическое исследование иерархических семантических сетей, предполагает нахождение системы свойств, существенных для построения и использования моделей областей знаний. Такие свойства разнообразны и включают универсальное уточнение понятия вложения, согласованного с многочисленными содержательными представлениями о структуре, сходстве и подобии семантических сетей. Будем рассматривать сети с точностью до изменения направления рёбер и их разметки на обратные отношения. Поэтому всюду ниже считается, что если две вершины произвольной сети связаны некоторым отношением, то эти же две вершины связаны и обратным отношением.

Обозначим как $W(\Sigma)$ множество путей в $\Sigma\in SN$. Если $w\in W(\Sigma)$, то $S(w)$ — это

Рис. 3. Сети, для которых несимметрично отношение $\leqslant_A$ для ограничений на число сетей в композиции

последовательность чередующихся разметок вершин и рёбер в w. На множестве конечных последовательностей чередующихся элементов $\mathbf{V}_{SN}$ и $\mathbf{R}_{SN}$ определено разрешимое отношение ρ^2. В частности, если w_1, w_2 — такие последовательности и w_1 является подпоследовательностью последовательности w_2, то $w_1 \rho^2 w_2$. Вложение имеет место, если существует отображение множества вершин вложенного графа во множество вершин другого графа, для которого всякий путь в первом графе представляется некоторым путём в другом графе. При этом образы вершин первого пути образуют подпоследовательность последовательности вершин, составляющих второй путь.

Определение. Семантическая сеть $\Sigma_1 = (V_1, U_1)$ вложена в сеть $\Sigma_2 = (V_2, U_2)$, если существует такое отображение $\psi : V_1 \to V_2$, что:

1) $\forall\, v \in V_1 (v \rho^1 \psi(v))$;
2) $\forall\, w_1 \in W(\Sigma_1)\, \exists\, w_2 \in W(\Sigma_2)(w_1 = v^1, \ldots$ $\ldots, v^k \to w_2 = \psi(v^1), \ldots, \psi(v^k)$ $\&$ $\&\ S(w_1) \rho^2 S(w_2))$.

Отношение ρ^1 является порядком на множестве вершин. Это отношение аналогично сравнению элементарных конфигураций в формализме абстрактных пространств знаний [1]. В качестве такого отношения ниже будем рассматривать отношение $\rho^1 = \{(x, x) \,|\, x \in V\}$. Определим ρ^2 следующим образом

$$\begin{gathered}\rho^2 = \{(w_1, w_2) \,|\, w_1 = v^1, \ldots, v^k \ \& \\ \&\ \ w_2 = \omega^1, \ldots, \omega^p \ \ \& \ \ \exists\, \omega^{j_1}, \ldots, \\ \ldots, \omega^{j_k} (\ \forall\, i \in \{1, \ldots, k\} (v^i = \omega^{j_k}) \ \ \& \\ \& \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\} (j_i < j_{i+1})) \ \ \& \\ \& \ \ \forall\, i \in \{1, \ldots, k-1\} (r_1^i \subseteq r_2^{j_i})\}\end{gathered}$$

Отношение ρ^2 основано на сравнимости отношений, связывающих всякую вершину v^i и v^{i+1} , $i = 1, \ldots, k-1$, в w_1 и $\psi(v^i)$ со следующей вершиной в w_2. Это отношение является аналогом отношений трассирования конфигураций в абстрактных пространствах знаний [5]. Множество $\mathbf{D}_{\mathbf{M}_{SN}}$ составляют семантические отношения и сети, фрагменты рёбер, а также фрагменты семантических сетей. Сбалансированность отношений алгебраического и семантического вложения для семантических сетей подтверждается следующей теоремой.

Теорема 4. Пусть $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_3$ и $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$, тогда $\Sigma_1 \circ \Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$.

Доказательство. Пусть для сетей $\Sigma_i = (V^i, U^i)$, $i = 1, \ldots, 3$, справедливы условия доказываемой теоремы. Пусть $w = v^o, \ldots, v^i, \ldots, v^k$ — произвольный путь в $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, для которого $v^o \equiv a$, а $v^k = b$. Каждое ребро этого пути содержится в одной из сетей Σ_1 или Σ_2. Поэтому для всякого такого ребра в Σ_3 существует путь, соединяющий концы этого ребра. Такие пути, рассматриваемые последовательно, имеют одинаковые концы и начала. Рассматриваемые совместно, они составляют путь в Σ_3, проходящий через вершины последовательности $v^o, \ldots, v^i, \ldots, v^k$. Проверим условие сравнимости отношений, размечающих вершины рёбер, выходящих из вершин w и соответствующих им вершин пути из a в b сети Σ_3. Пусть (x, r, y) — ребро в $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$. Здесь r — отношение, удовлетворяющее одному из условий:

1) r совпадает с одним из отношений, размечающих ребро (x, r', y), связывающее x и y в Σ_1 или Σ_2, а в Σ_3 существует путь из x в y, первое ребро которого размечено отношением r', для которого $r \subseteq r'$;
2) $r = r' \cup r''$, если x и y в Σ_1 и Σ_2 соединяют рёбра, размеченные отношениями r' и r'' соответственно.

В первом случае путь в Σ_3, представляющий ребро (x, r, y) композиции $\Sigma_1 \circ \Sigma_2$, совпадает с путем в Σ_3, для которого выполняются условие вложения $\Sigma_i \subseteq \Sigma_3$, $i \in \{1,2\}$. Во втором случае каждый путь в Σ_3, ведущий из x в y, представляющий ребра (x, r', y) и (x, r'', y) во

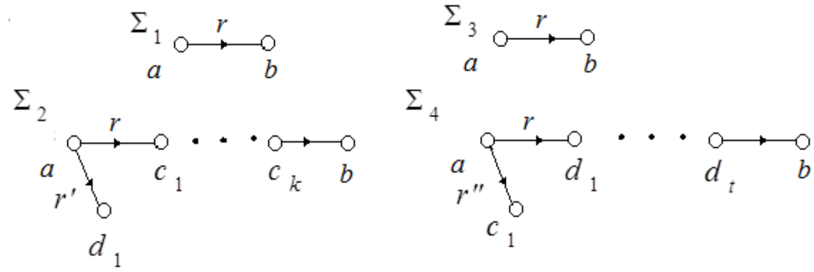

Рис. 4. Семантические сети $\Sigma_i = (V^i, U^i)$, $i = 1, \ldots, 4$

вложениях $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_3$ и $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_3$, удовлетворяет условию вложения $\Sigma_1 \circ \Sigma_3 \subseteq \Sigma_3$. □

Заметим, что существуют такие сети $\Sigma_i = (V^i, U^i)$, $i = 1, \ldots, 4$, что $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ и $\Sigma_3 \subseteq \Sigma_4$, но $\Sigma_1 \circ \Sigma_3 \not\subseteq \Sigma_2 \circ \Sigma_4$. Обоснование данного утверждения может быть получено построением примера соответствующих сетей, приведённых на рис. 4.

Здесь сети Σ_1 и Σ_3 совпадают, то есть $\Sigma_1 \circ \Sigma_3 = \Sigma_1$. Ребро (a, r, b) в Σ_2, моделирует единственный путь $a, c_1, \ldots, c_k, b$. Это же ребро в Σ_4 моделирует единственный путь $a, d_1, \ldots, d_t, b$. Отношения r' и r'' являются одноэлементными, а отношение r — содержит больше чем одну пару вершин. Тогда $\Sigma_1 \circ \Sigma_3 \not\subseteq \Sigma_2 \circ \Sigma_4$ поскольку в $\Sigma_2 \circ \Sigma_4$ вершины a и b соединяют ровно два разных пути. Каждый из таких путей начинается с ребра, размеченного отношением, совпадающим с r' или r'' и, как следствие, не вложенным в r. Поэтому для $\Sigma_1 \circ \Sigma_3$ не выполняется условие вложения этого фрагмента в $\Sigma_2 \circ \Sigma_4$.

Заключение

Инварианты вложения и композиции фрагментов иерархических семантических сетей связаны с обозначением структурных и семантических свойств таких сетей. Указанные свойства обеспечивают возможность теоретического исследования и практическое использование получаемых результатов в реализациях операций обработки знаний, реализуемых алгоритмами решения профессиональных задач. Поэтому выбор уточнений предполагает нахождение уровня детализации, сочетающего приемлемую абстрактность и конкретность. В работе рассмотрено уточнение операции композиции фрагментов семантических сетей и связанные с ним схемы структуризации сетей. Такие схемы актуальны для задачи структурированного представления логико-математических моделей областей знаний [2]. Указанные модели обеспечивают универсальную возможность применения математического аппарата для построения описаний областей знаний. Они позволяют реализовывать построение баз знаний конкретных интеллектуальных систем с помощью дедуктивных инструментов моделирующих операцию гомоморфного расширения моделей.

Литература

1. *Костенко К. И.* Компоненты и операции абстрактных пространств знаний. ЗОНТ09: Мат. Всерос. конф., Новосибирск, 20–22 октября, 2009 г., Т. 2. С. 36–40.
2. *Костенко К. И., Лебедева А. П.* О формализованных описаниях пространств знаний // Программная инженерия. 2013. № 8. С. 25–34.
3. *Чечкин А. В.* Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработки, применение. 2011. № 7. С. 3–9.
4. *Gupta A., Nishimura N.* Finding largest subtrees and smallest supertrees // Algorithmica. 1998. Vol. 21. P. 183–210.
5. *Костенко К. И.* Вложения формализмов семантических сетей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013, № 2. С. 58–66.

References

1. Kostenko K. I. Komponenty i operatsii abstraktnykh prostranstv znaniy [Components and operations of the abstract spaces of knowledge]. In *ZONT09: Mat. Vseros. konf., Novosibirsk, 20–22 oktyabrya, 2009. T. 2* [Proc. Russian Conf. 'ZONT09', 20–22 October, 2009], pp. 36–40. (In Russian)
2. Kostenko K. I., Lebedeva A. P. O formalizovannykh opisaniyakh prostranstv znaniy [On formal descriptions of the spaces of knowledge]. *Programmnaya inzheneriya* [Software engineering], 2013, no. 8, pp. 25–34. (In Russian)
3. Chechkin A. V. Neyrokomp'yuternaya paradigma informatiki [Neurocomputer paradigm of Informatics]. *Neyrokomp'yutery: razrabotki,*

primenenie [Neurocomputers: development, application], 2011, no. 7, pp. 3–9. (In Russian)

4. Gupta A., Nishimura N. Finding largest subtrees and smallest supertrees. *Algorithmica*, 1998, vol. 21, pp. 183–210.
5. Kostenko K. I. Vlozheniya formalizmov semanticheskikh setey [Attachments formalisms of the semantic web]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 2, pp. 58–66. (In Russian)

Статья поступила 20 октября 2014 г.