

УДК 539.3

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАВНОВЕСНОЙ ПОПЕРЕЧНОЙ ТРЕЩИНЕ В СОСТАВНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ

Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Борисова Е. В.

ANALYTICAL SOLUTION OF THE EQUILIBRIUM OF THE TRANSVERSE CRACK
IN A COMPOSITE ELASTIC PLANE

Sobol B. V., Rashidova E. V., Borisova E. V.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, 344000, Russia
e-mail: b.sobol@mail.ru

Abstract. The problem of stress concentration in the vicinity of the crack tip of finite length perpendicularly located to the interface between two elastic half-planes was reviewed. The usage of integral discontinuous solutions method enabled us to reduce the problem to solving a singular integral equation of the first kind with Cauchy kernel. We reviewed the limiting case of the problem when the half-plane without the crack is absent and the boundary of the body under review is free from stress. The solution of the integral equation is constructed in the form of an asymptotic expansion with respect to the small parameter characterizing the relative distance between the crack and the interface. In order to determine the effectiveness of obtained expansions we construct the solution of the same problem by collocation method. It was executed a comparison of the results with the known ones, previously obtained by numerical methods. The values of the normal stress intensity factor in the vicinity of the crack tip for various combinations of geometrical and physical parameters of the problem were obtained.

Keywords: crack, half-plane, stress intensity factor, influence factor

Введение

Изучение влияния трещин на прочность деталей машин из современных материалов представляется весьма актуальным. К таким материалам, в частности, относятся армированные, композитные материалы, металлокерамика и многие другие биматериалы. Широкое распространение в технике получили также детали с покрытиями, улучшающими их механические и физико-химические свойства. Особый теоретический и практический интерес представляют задачи об изучении концентрации напряжений в окрестности трещин, находящихся вблизи границы раздела материалов, выходящих на границу или пересекающих ее. В задачах о трещинах в составных упругих телах оптимальным выбором геометрических и физических параметров иногда можно добиться уменьшения коэффициента интенсивности напряже-

ний (КИН) и тем самым предотвратить их распространение.

Исследованию взаимного влияния трещин и поверхностей раздела сред с различными механическими свойствами посвящены работы многих ученых. В [1] проведен анализ особенностей напряжений в окрестности трещины, выходящей на границу составного упругого тела. Установлены значения показателя при особенности для различных сочетаний физических параметров задачи. Задача о равновесной поперечной трещине в составной упругой плоскости рассмотрена в [2]. В этой же публикации представлено решение задачи о составной полубесконечной трещине, выходящей на границу раздела. Применением интегрального преобразования Меллина задача сведена к решению интегрального сингулярного уравнения первого рода с ядром Коши, решение ко-

Соболь Борис Владимирович, д-р тех. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: b.sobol@mail.ru

Рашидова Елена Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: el.rash@mail.ru

Борисова Екатерина Викторовна, старший преподаватель кафедры информационных технологий Донского государственного технического университета; e-mail: brkate1@rambler.ru

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ (14-08-00142_a).

того строится численно. Получены значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности края трещины. В [3] исследована задача о двух граничащих полуплоскостях, которые содержат трещину, пересекающую границу раздела. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Численное решение этой системы уравнений позволило получить значения коэффициентов интенсивности касательных и нормальных напряжений. Боджи исследовал задачу о бесконечной трещине, выходящей на границу раздела двух сред под произвольным углом [4]. В [5] методом дислокационного моделирования исследована задача о поперечной трещине в составном упругом теле конечных размеров. Проведено детальное исследование задачи, включая анализ коэффициентов интенсивности напряжений и Т-напряжений. В [6] изучено напряженное состояние составной упругой плоскости с трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов. Однако в данной работе при постановке задачи авторы считают функцию нормальных перемещений известной на всей граничной полуоси, не учитывают трещину, которая имеется на продолжении расклинивающей вставки и не нагружена. Граничные условия при такой постановке не являются смешанными, и задача методом интегральных преобразований решена в замкнутом виде.

Рассмотрен цикл задач, посвященных исследованию контактных напряжений в телах с тонкими покрытиями и прослойками [7]. Задача о контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной конечной длины, выходящей на границу, исследована в работе С.М. Мхитаряна [8].

Обширный круг задач об исследовании концентрации напряжений в окрестности трещин в двумерной и трехмерной постановках представлен в [9, 10].

В [11] рассмотрена задача об исследовании концентрации напряжений в полуплоскости и полосе, усиленной тонкой гибкой накладкой. В качестве математической модели накладки использованы граничные условия специального вида. Для установления границ применимости модели проведено численное исследование данных условий. Получены значения коэффициента интенсивности напряжений в окрестности вершин трещины.

Проведен многофакторный анализ влияния накладки на критическое состояние трещин в подложке.

Предлагаемая публикация посвящена исследованию задачи о напряженно-деформированном состоянии составной плоскости, содержащей в нижней полуплоскости внутреннюю конечную поперечную трещину. В отличие от известных результатов, в данной работе наряду с численным решением задачи по методу коллокаций построено аналитическое — в виде асимптотического разложения точного решения по малому параметру. Установлен диапазон его эффективности.

1. Постановка задачи

Составная плоскость включает нижнюю полуплоскость (подложку) $-\infty < x < \infty$, $y \leq 0$, ослабленную прямолинейной поперечной трещиной длины $2l$, расположенной на расстоянии d от границы перпендикулярно к ней. В направлении, перпендикулярном линии трещины, приложены нормальные растягивающие усилия, обеспечивающие ее раскрытие. Верхняя полуплоскость (накладка) занимает область $-\infty < x < \infty$, $y \geq 0$.

В силу линейности задачи воспользуемся при ее постановке принципом суперпозиции, согласно которому рассматриваем далее равновесную трещину в бесконечном составном теле. Трещина поддерживается в раскрытом состоянии действием нормальных напряжений σ_x интенсивностью $p(y)$, приложенных к ее берегам (рис. 1).

$$\sigma_x|_{x=0} = -p(y). \quad (1.1)$$

Применим интегральное преобразование Фурье по x к уравнениям равновесия в перемещениях для случая плоской деформации в виде

$$F[f(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x, y) dx.$$

Метод обобщенных интегральных преобразований приводит уравнения равновесия в перемещениях к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений относительно трансформант Фурье компонент вектора перемещений U и V в каждой из рассматриваемых областей

$$\begin{aligned} 2(1-\nu)\alpha^2 U - (1-2\nu)U_y'' + i\alpha V_y' = \\ = -2i(1-\nu)\alpha\chi(y), \end{aligned}$$

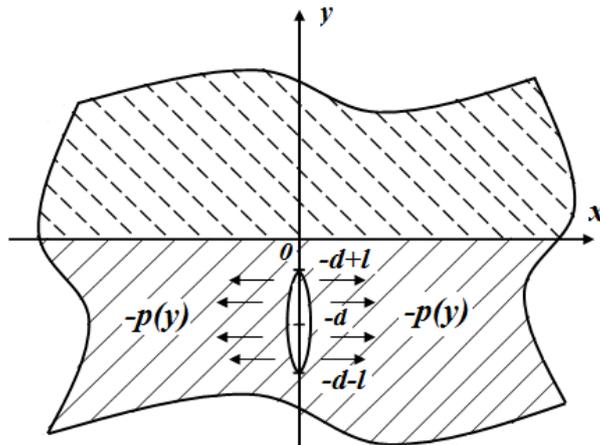


Рис. 1. Постановка задачи

$$(1 - 2\nu) \alpha^2 V - 2(1 - \nu) V_y'' + i\alpha U_y' = -2\nu \chi'(y).$$

Здесь $\chi(y) = u(x, y)|_{-0}^{+0}$ скачок компоненты вектора перемещений на берегах трещины, подлежащий определению в дальнейшем.

В нашем случае решение системы в верхней полуплоскости, с учетом затухания напряжений и деформаций при $y \rightarrow \infty$, можно представить в стандартном виде [7]

$$U^{(1)} = e^{-y|\alpha|}(c_{11} + c_{12}y|\alpha|),$$

$$V^{(1)} = -ie^{-y|\alpha|} \times \text{sign } \alpha (c_{11} + c_{12}(3 - 4\nu_1 + y|\alpha|)).$$

Решение в нижней полуплоскости, с учетом затухания напряжений и деформаций при $y \rightarrow -\infty$, имеет вид

$$U^{(2)} = -\frac{i \text{sign } \alpha}{4(1 - \nu_2)} \int_{-d-l}^{-d+l} e^{\alpha|\eta-y|} \times (3 - 2\nu_2 + \alpha|\eta - y|)\chi(\eta) d\eta + e^{|\alpha|y}(c_{21} + c_{22}|\alpha|y),$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{4(1 - \nu_2)} \int_{-d-l}^{-d+l} e^{\alpha|\eta-y|} \text{sign}(\eta - y) \times (2\nu_2 + \alpha|\eta - y|)\chi(\eta) d\eta + i \text{sign } \alpha (c_{21} + c_{22}(|\alpha|y - \kappa_2)) e^{|\alpha|y}.$$

Решением поставленной выше задачи являются функции $U^{(2)}$, $V^{(2)}$, удовлетворяющие граничным условиям задачи при $y = 0$,

$$\begin{aligned} U^{(1)} &= U^{(2)}, & V^{(1)} &= V^{(2)}, \\ T_{xy}^{(1)} &= T_{xy}^{(2)}, & \Sigma_y^{(1)} &= \Sigma_y^{(2)}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$T_{xy}^{(j)} = G_j \left(\frac{\partial U^{(j)}}{\partial y} - i\alpha V^{(j)} \right),$$

$$\Sigma_y^{(j)} = \frac{2G_j}{1 - \nu_j} \left((1 - \nu_j) \frac{\partial V^{(j)}}{\partial y} - i\alpha \nu_j U^{(j)} \right),$$

G_j и ν_j — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона материалов, $j = 1, 2$. Значения индекса $j = 1$ соответствуют верхней полуплоскости и $j = 2$ — нижней полуплоскости.

2. Интегральное уравнение

Удовлетворением граничным условиям (1.2) получаем следующие выражения для постоянных

$$c_{21} = \frac{-i}{4(1 - \nu_2) Z_n} \int_{-d-l}^{-d+l} e^{\eta|\alpha|} CH_1(\eta, \alpha) \chi(\eta) d\eta,$$

$$c_{22} = \frac{i}{4(1 - \nu_2) Z_n} \int_{-d-l}^{-d+l} e^{\eta|\alpha|} CH_2(\eta, \alpha) \chi(\eta) d\eta,$$

где

$$CH_1(\eta, \alpha) = \gamma_{11} \text{sign } \alpha - \gamma_{12} \alpha \eta,$$

$$CH_2[\eta, \alpha] = \gamma_{21} \text{sign } \alpha + 2\gamma_{22} \alpha \eta,$$

$$Zn = (1 - \nu_1)(3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_2) + \\ + g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2)(3 - 4\nu_2) - \\ - g(\nu_1(3 - 2\nu_1)(3 - 4\nu_2)^2 - \\ - (2 - 3\nu_2)(5 - 6\nu_2)),$$

$$g = G_1/G_2,$$

$$\gamma_{11} = g^2(1 - 2\nu_1)(3 - 4\nu_2) \times \\ \times (1 - \nu_2)(-3 + 2\nu_2) + \\ + (3 - 4\nu_1)(1 - \nu_1)(1 - 2\nu_2)(4 - 7\nu_2 + 2\nu_2^2) + \\ - g(3 - (28 - 51\nu_1 + 34\nu_1^2)\nu_2 + \\ + (38 - 78\nu_1 + 52\nu_1^2)\nu_2^2 - 4(3 - 6\nu_1 + 4\nu_1^2)\nu_2^3) - \\ - (1 - \nu_1)(1 + \nu_2 - 2\nu_2^2) \times \\ \times (3 - \nu_1(4 - 8\nu_2) + 6\nu_2 + \\ + g(1 - 2\nu_1)(3 - 4\nu_2)),$$

$$\gamma_{12} = (1 - \nu_1)(1 - \nu_2)(g(1 - 2\nu_1)(3 - 4\nu_2) - \\ - (3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_2)) + \\ + (1 - \nu_1)(3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_2)(2 - 3\nu_2) - \\ - g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2)(3 - 4\nu_2) - \\ - g(3 - 16\nu_2 + 14\nu_2^2 + \nu_1^2(4 - 26\nu_2 + 24\nu_2^2) - \\ - \nu_1(6 - 39\nu_2 + 36\nu_2^2)),$$

$$\gamma_{21} = 3g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) - \\ - 3(1 - \nu_1)(3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_2) + \\ + g(1 + (5 - \nu_2)(1 - 2\nu_2) + \\ + 6\nu_1^2(3 - 4\nu_2) - \nu_1(19 - 28\nu_2)),$$

$$\gamma_{22} = g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2) - \\ - (1 - \nu_1)(3 - 4\nu_1)(1 - 2\nu_2) + \\ + g(1 - 2\nu_1)(2 - 3\nu_1 - 3\nu_2 + 4\nu_1\nu_2).$$

Интегральное уравнение задачи получается из равенства напряжений при $x = 0$, то есть из (1.1)

$$\sigma_x = \frac{2G_2}{1 - 2\nu_2} \left[(1 - \nu_2) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right]_{x=0} = -p(y).$$

Левая часть интегрального уравнения в трансформантах Фурье имеет вид

$$Ex = \frac{2G_2}{1 - 2\nu_2} \left[-i\alpha(1 - \nu_2)U^{(2)} + \nu_2 V^{(2)'} \right].$$

Находим выражение Ex аналитически, используя универсальную символьную вычислительную систему Mathematica. Для перехода к оригиналам выполним обратное преобразование Фурье

$$\sigma_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} Ex d\alpha. \quad (2.1)$$

Определив аналитически значение интеграла (2.1) при $x = 0$, получаем интегральное уравнение из граничного условия (1.1)

$$\int_{-d-l}^{-d+l} \left(\frac{1}{\eta - y} + \frac{ay^2 - 4by\eta + c\eta^2}{(y + \eta)^3} \right) \chi'[\eta] d\eta = \\ = -\frac{2\pi(1 - \nu_2)}{G_2} p(y), \quad (2.2)$$

где коэффициенты уравнения a , b , c определяются механическими параметрами верхней и нижней полуплоскостей следующими выражениями:

$$a = a_1/Zn, \quad b = b_1/Zn, \quad c = c_1/Zn,$$

$$a_1 = (4\nu_1^2 - 7\nu_1 + 3)(1 - 2\nu_2) - \\ - g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2)(8\nu_2^2 - 12\nu_2 + 5) + \\ + g(2\nu_2^2 - 3\nu_2 + 2 - \nu_1(2 + (3 - 4\nu_2)^2) + \\ + 2\nu_1^2(8\nu_2^2 - 12\nu_2 + 5)),$$

$$b_1 = -(4\nu_1^2 - 7\nu_1 + 3)(1 - 2\nu_2) + \\ + g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2)(4\nu_2^2 - 6\nu_2 + 3) + \\ + g(\nu_2 - 2\nu_2^2 + \nu_1(10\nu_2^2 - 8\nu_2 + 1) + \\ + 2\nu_1^2\nu_2(3 - 4\nu_2)),$$

$$c_1 = -(4\nu_1^2 - 7\nu_1 + 3)(1 - 2\nu_2) + \\ + g^2(1 - 2\nu_1)(1 - \nu_2)(-8\nu_2^2 + 12\nu_2 - 3) + \\ + g(6\nu_2^2 - 13\nu_2 + 6 + \nu_1(3 - 2\nu_1)(1 - 8(1 - \nu_2)^2)).$$

При $\nu_1 \rightarrow 0$, $G_1 \rightarrow 0$ интегральное уравнение (2.2) принимает известный вид для случая свободной верхней полуплоскости [12]

$$\int_{-d-l}^{-d+l} \left(\frac{1}{\eta - y} + \frac{y^2 + 4y\eta - \eta^2}{(y + \eta)^3} \right) \chi'[\eta] d\eta = \\ = -\frac{2\pi(1 - \nu_2)}{G_2} p(y).$$

3. Метод малого параметра

Для проведения качественного анализа интегрального уравнения построим асимптотическую оценку его решения с помощью метода малого параметра.

Используем замену переменных

$$\lambda = \frac{l}{d}, \quad \zeta = \frac{\eta + d}{l}, \quad z = \frac{y + d}{l},$$

$$g'(\zeta) = \chi'(l\zeta - d),$$

$$f(z) = -\frac{2(1-\nu_2)}{G_2} p(lz - d).$$

Безразмерный параметр λ характеризует расстояние между центром трещины и границей раздела составной плоскости. При бесконечно большом удалении трещины от границы ($d \rightarrow \infty$) параметр λ стремится к нулю $\lambda \rightarrow 0$.

После замены интегральное уравнение принимает безразмерный вид

$$\int_{-1}^1 g'(\zeta) \left[\frac{1}{\zeta - z} + L(\zeta, z) \right] d\zeta = \pi f(z),$$

где

$$L(\zeta, z) = \lambda \frac{\Psi}{(-2 + z\lambda + \zeta\lambda)^3}, \quad (3.1)$$

$$\Psi = a(1 - z\lambda)^2 - 4b(1 - z\lambda)(1 - \zeta\lambda) + c(1 - \zeta\lambda)^2.$$

Первоначально будем строить решение сингулярного интегрального уравнения (3.1), предполагая, что относительное расстояние между трещиной и границей тела достаточно велико $\lambda \ll 1$.

С этой целью представим регулярную часть ядра $L(\zeta, z)$ в виде разложения по степеням λ

$$L(\zeta, z) = \sum_{i=1}^N l_i \lambda^i + O(\lambda^{N+1}), \quad (3.2)$$

$$l_1 = \frac{1}{8} m_{11}, \quad l_2 = \frac{1}{16} (m_{21}z + m_{22}\zeta),$$

$$l_3 = \frac{1}{16} (m_{31}z^2 + m_{32}z\zeta + m_{33}\zeta^2),$$

$$l_4 = \frac{1}{16} (m_{41}z^3 + m_{42}z^2\zeta + m_{43}z\zeta^2 + m_{44}\zeta^3),$$

$$l_5 = \frac{1}{16} (m_{51}z^4 + m_{52}z^3\zeta + m_{53}z^2\zeta^2 + m_{54}z\zeta^3 + m_{55}\zeta^4), \quad (3.3)$$

где

$$m_{11} = -a - 4b - c$$

$$m_{21} = a - 4b - 3c, \quad m_{22} = -3a - 4b + c,$$

$$m_{31} = a - 3c, \quad m_{32} = -8b, \quad m_{33} = -3a + c,$$

$$m_{41} = \frac{1}{32} (a + 4b - 5c),$$

$$m_{42} = \frac{3}{32} (a - 4b - c),$$

$$m_{43} = -\frac{3}{32} (a + 4b - c),$$

$$m_{44} = \frac{-5a + 4b + c}{32},$$

$$m_{51} = \frac{1}{128} (a + 20b - 15c),$$

$$m_{52} = \frac{1}{32} (3a - 4b - 5c),$$

$$m_{53} = \frac{3}{64} (a - 12b + c),$$

$$m_{54} = -\frac{1}{32} (5a + 4b - 3c),$$

$$m_{55} = \frac{1}{128} (-15a + 20b + c). \quad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.2)–(3.4) в уравнение (3.1) и сопоставляя выражения при соответствующих степенях λ , получаем цепочку последовательно разрешаемых интегральных уравнений относительно функции $g'_i(z)$, $i = 1, 2, \dots$

$$g'(z) = \sum_{i=1}^n g'_i(z) \lambda^i + O(\lambda^{n+1}),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta - z} g'_0(\zeta) d\zeta = \pi f(z), \\ \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - z} g'_1(\zeta) + l_1 g'_0(\zeta) \right] d\zeta = 0, \\ \dots \\ \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - z} g'_n(\zeta) + \Sigma \right] d\zeta = 0, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

где

$$\Sigma = \sum_{m=0}^{n-1} l_{n-m}(\zeta) g'_m(\zeta), \quad n = 1, 2, \dots$$

Для данного типа уравнений применяется формула обращения сингулярного интегрального оператора для $a \leq x \leq b$:

$$\int_a^b \frac{1}{\zeta - z} g'(\zeta) d\zeta = \pi \gamma(z),$$

$$g'(z) = -\frac{1}{\pi \sqrt{(b-z)(z-a)}} \times \int_a^b \frac{\sqrt{(b-\zeta)(\zeta-a)} \gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (3.6)$$

В нашем случае $a = -1, b = 1$,

$$g'(z) = -\frac{1}{\pi \sqrt{1-z^2}} \times \int_a^b \frac{\sqrt{1-\zeta^2} \gamma(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (3.7)$$

Учитываем решение интегралов

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{t-x} dt = -\pi x, \quad (3.8)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{(2n-1)!!}{2n!!} \pi, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt = 0, \quad \text{где } n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.10)$$

Далее решаем (3.2) при $z = 1$ ($f(z) = f = \text{const}$). Рассмотрим первое уравнение системы

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta - z} g'_0(\zeta) d\zeta = \pi, \quad f = \text{const}.$$

Используя формулу обращения (3.7) и решение интеграла (3.8), получим

$$g'_0(z) = \frac{fz}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Решаем второе уравнение системы (3.5)

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - z} g'_1(\zeta) + l_1 g'_0(\zeta) \right] d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta - z} g(\zeta) = -l_1 \int_{-1}^1 g'_0(\zeta) d\zeta,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta - z} g'_1(\zeta) d\zeta = -l_1 f \int_{-1}^1 \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta.$$

Используя (3.6) и (3.4) получаем

$$g'_1(z) = 0.$$

Решаем третье уравнение

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\zeta - z} g'_2(\zeta) + l_2(\zeta) g'_0(\zeta) + l_1 g'_1(\zeta) \right] d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta - z} g'_2(\zeta) d\zeta = -\int_{-1}^1 l_2(\zeta) g'_0(\zeta) d\zeta.$$

Используя (3.9), (3.10), (3.7) получим

$$g'_2(z) = \frac{m_{22} f z}{32 \sqrt{1-z^2}}$$

Воспользуемся аналогичными рассуждениями для решения последующих уравнений системы. В результате получаем

$$g'(z) = g'_\infty(z) N(z),$$

$$g'_\infty(z) = \frac{fz}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$N(z) = 1 - \frac{m_{22}}{32} \lambda^2 - \frac{m_{32}}{32} z \lambda^3 + \left(\frac{m_{22}^2}{1024} - \frac{m_{42}}{32} z^2 - \frac{3m_{44}}{128} \right) \lambda^4 + \frac{1}{32} \left(\left(\frac{m_{22} m_{32}}{16} - \frac{3m_{54}}{4} \right) z - m_{52} z^3 \right) \lambda^5 + O(\lambda^6),$$

где $g'_\infty(z)$ — производная функции раскрытия трещины в неограниченной плоскости, $N(z)$ — фактор влияния, отражающих влияние различных геометрических и физических параметров на решение задачи.

Саму функцию $g(z)$ получаем, интегрируя $\int g'(z) dz$

$$g(z) = f\sqrt{1-z^2}(\beta_2\lambda^2 + \beta_3\lambda^3 + \beta_4\lambda^4 + \beta_5\lambda^5) + O(\lambda^6),$$

$$\beta_2 = \frac{m_{22}}{32}, \quad \beta_3 = \frac{m_{32}}{64}z,$$

$$\beta_4 = -\frac{m_{22}^2}{1024} + \frac{m_{32}}{48} + \frac{3m_{44}}{128} + \frac{m_{32}}{96}z^2,$$

$$\beta_5 = \left(-\frac{m_{32}m_{22}}{1024} + \frac{3(m_{52}+m_{54})}{256}\right)z - \frac{m_{52}}{128}z^3.$$

4. Метод коллокации

Построим решение интегрального уравнения (2.2) методом коллокации в виде линейной комбинации базисных функций, явно учитывающих особенность в окрестности края трещины,

$$g'(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} \sum_{n=0}^m X_n T_n(z),$$

при этом

$$g(z) = -\sqrt{1-z^2} \sum_{n=0}^m X_n \frac{U_{n-1}(z)}{n},$$

где T_n, U_n — полиномы Чебышева I и II рода соответственно, X_n — коэффициенты базисных функциях, m — количество узловых точек.

В качестве узловых точек принимаем корни полиномов Чебышева

$$z_i = \cos \frac{\pi(2i-1)}{2m}, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Для определения коэффициентов X_n необходимо составить и решить следующую систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi f(z_1) \\ \pi f(z_2) \\ \dots \\ \pi f(z_m) \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

Из очевидного условия $g(\pm 1) = 0$ следует, что $X_0 = 0$.

Вычисление коэффициентов

$$a_{ij} = \int_{-1}^1 T_j(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left[\frac{1}{\zeta - z_i} + L(\zeta, z_i) \right] d\zeta$$

системы (4.1) осуществляется в два этапа. Сингулярная часть представляет собой табличный интеграл [13]

$$\int_{-1}^1 T_j(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta = \pi U_{j-1}(z),$$

а регулярная часть

$$\int_{-1}^1 T_j(\zeta) \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} L(\zeta, z_i) d\zeta$$

вычисляется численно.

Значения функции $g'(z)$ позволяют рассчитать коэффициент интенсивности нормальных напряжений

$$K_I = -\frac{G_2}{1-\nu_2} \left(\sqrt{2\pi(1-z)} g'(z) \right).$$

5. Анализ результатов

Проведем исследование влияния свойств некоторых материалов покрытия на фактор влияния $N(1)$ (приведенного коэффициента интенсивности нормальных напряжений) от параметра λ , характеризующего относительное расстояние трещины до границы раздела.

$N(1) = K_I/K_{I\infty}$, $K_{I\infty}$ — соответствующая величина в классическом случае. В качестве материала подложки рассматривается конструкционная сталь. Материалы накладок — титан, алюминий, латунь (рис. 2), вольфрам, цирконий и нихром (рис. 3). Для сравнения на графиках приведены результаты для метода малого параметра и метода коллокации.

Отметим, что, как показывают непосредственные вычисления, метод коллокаций позволяет достичь точности в пределах 3% с использованием всего 8 узловых точек.

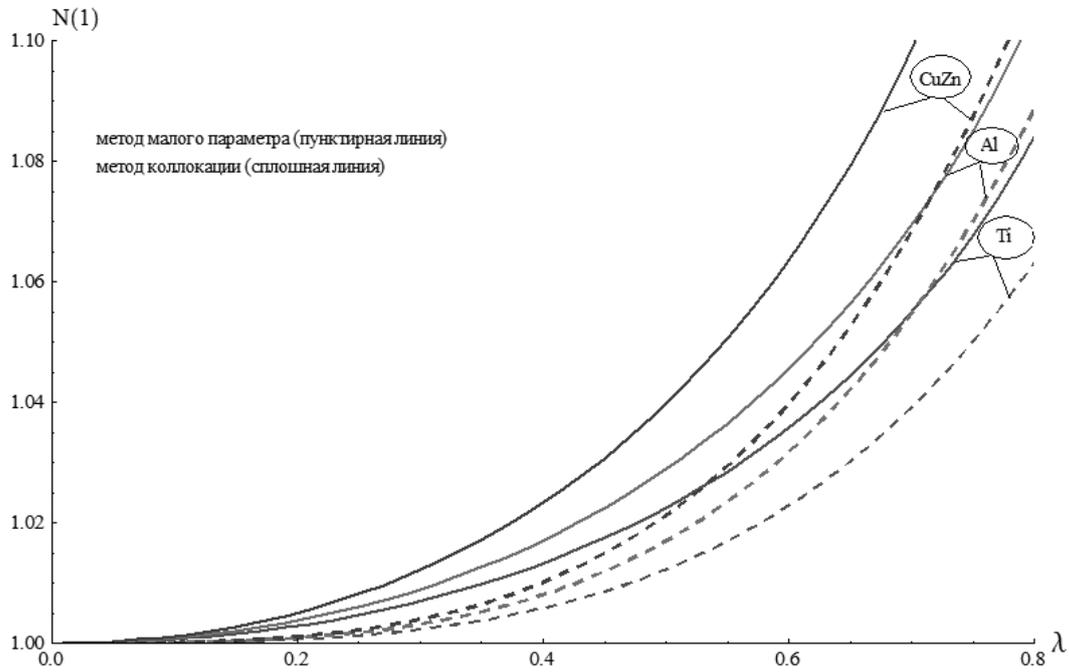


Рис. 2. Влияние материала накладки на интенсивность напряжений: Ti — титан, Al — алюминий, CuZn — латунь

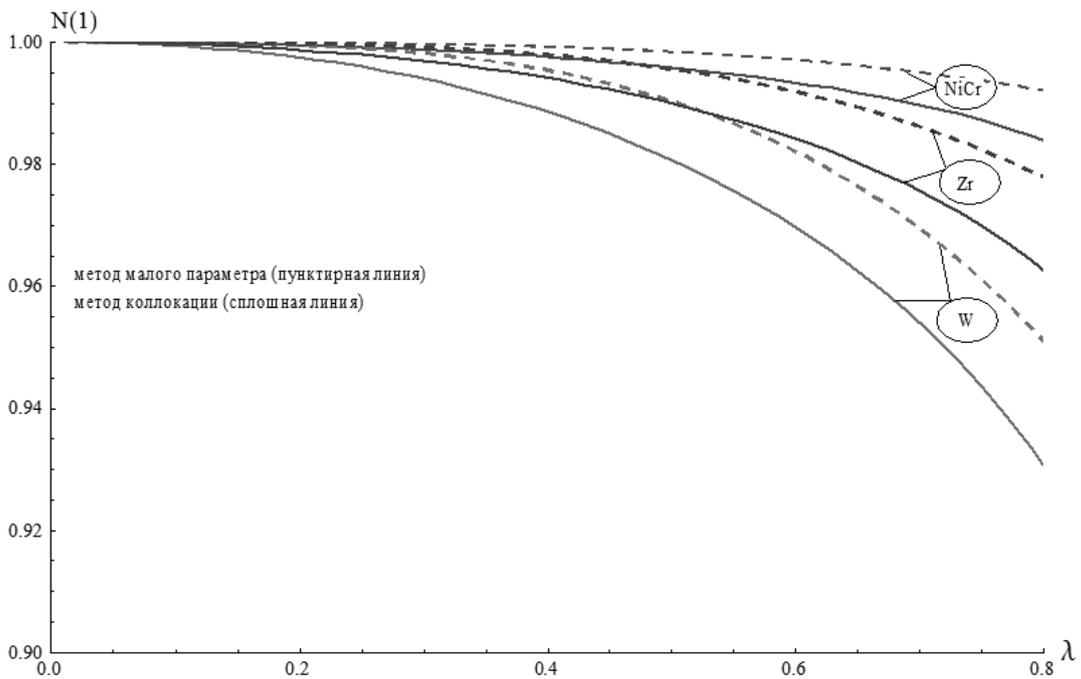


Рис. 3. Влияние материала накладки на интенсивность напряжений: W — вольфрам, Zr — цирконий, NiCr — нихром

Его высокую эффективность можно объяснить удачным выбором вида координатных функций.

В свою очередь, сравнение численных результатов, полученных по методу малого параметра, показывает эффективность аналитических решений (точность в пределах 5%) в достаточно широком диапазоне изменения параметра относительного расстояния между трещиной и границей раздела ($0 < \lambda < 0,8$).

Качественный анализ данных показывает, что более мягкий по сравнению с материалом подложки материал верхней полуплоскости приводит к повышению концентрации напряжений у вершины трещины (рис. 2), а более жесткий — к противоположному эффекту (рис. 3)

Заключение

Решена задача о концентрации напряжений в окрестности вершины трещины конечной длины, расположенной перпендикулярно границе раздела двух упругих полуплоскостей. На основе уравнений равновесия задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши с помощью метода интегральных разрывных решений.

Интегральное уравнение было решено методами малого параметра и коллокации. Проведен анализ сходимости методов, получены численные результаты.

Литература

1. Zak A. R., Williams M. L. Crack point singularities at a biomaterial interface // *Journal of Applied Mechanics*. 1963. Vol. 30. P. 142–143.
2. Cook T. S., Erdogan F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface // *Int. J. Engng. Sci.* 1972. Vol. 10. P. 677–697.
3. Erdogan F., Biricikoglu B. Two bonded half plane with a crack through the interface // *Int. J. Engng. Sci.* 1973. Vol. 11. P. 745–766.
4. Bogy D. B. On the plane elastic problem of a loaded crack terminating a material interface // *Int. J. Fract.* 1971. Vol. 38. P. 911–918.
5. Chen S. H., Wang T. C., Kao-Walter S. A crack perpendicular to the bimaterial interface in finite solid // *Int. J. Solids Struct.* 2003. Vol. 40. P. 2731–2755.
6. Макарян В. С., Чилингарян Г. С. Напряженное состояние составной упругой плоскости с

трещиной, перпендикулярной к границе раздела материалов // *Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*. 2008. No. 61(2). P. 3–12.

7. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
8. Мхитарян С. М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. Актуальные проблемы механики сплошной среды: Труды III межд. конф., Ереван, 2012. Т. 1. С. 74–78.
9. Мураками Ю. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. М.: Мир, 1990. 556 с.
10. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. 224 с.
11. Соболев Б. В., Краснощечков А. А. Влияние тонкой накладки на коэффициент интенсивности напряжений в задачах о поперечной трещине в полуплоскости и полосе // *Вестник ДГТУ*. 2013. № 5/6 (74). С. 25–35.
12. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. Киев: Наук. думка, 1981. 324 с.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.

References

1. Zak A. R., Williams M. L. Crack point singularities at a biomaterial interface. *Journal of Applied Mechanics*, 1963, vol. 30, pp. 142–143.
2. Cook T. S., Erdogan F. Stress in bounded material with a crack perpendicular to the interface. *Int. J. Engng. Sci.*, 1972, vol. 10, pp. 677–697.
3. Erdogan F., Biricikoglu B. Two bonded half plane with a crack through the interface. *Int. J. Engng. Sci.*, 1973, vol. 11, pp. 745–766.
4. Bogy D. B. On the plane elastic problem of a loaded crack terminating a material interface. *Int. J. Fract.*, 1971, vol. 38, pp. 911–918.
5. Chen S. H., Wang T. C., Kao-Walter S. A crack perpendicular to the bimaterial interface in finite solid. *Int. J. Solids Struct.*, 2003, vol. 40, pp. 2731–2755.
6. Makaryan V. S., Chilingaryan G. S. Napryazhennoe sostoyanie sostavnoy uprugoy ploskosti s treshchinoy, perpendikulyarnoy k granitse razdela materialov [The stress state of the composite elastic plane with a crack perpendicular to the interface between materials]. *Mechanics. Proc. of National Academy of Sciences of Armenia*, 2008, no. 61(2), pp. 3–12. (In Russian)
7. Aleksandrov V. M., Mkhitarayan S. M. *Kontaktnye zadachi dlya tel s tonkimi pokrytiyami i prosloykami* [Contact problems for bodies

- with thin coatings and layers]. Moscow: Nauka Publ., 1983, 488 p. (In Russian)
8. Mkhitarian S. M. O kontakte mezhdu beskonечnym stringerom i uprugoy polubeskonechnoy plastinoy s vertikal'noy treshchinoy [On contact between the infinite stringer and semi-infinite elastic plate with a vertical crack]. In *Sbornik trudov III mezhd. konf. "Aktual'nye problemy mekhaniki sploshnoy sredy", Erevan, 2012. vol. 1.* [Proc. of the III Int. Conf. "Topical problems of continuum mechanics", Yerevan, 2012] pp. 74—78. (In Russian)
 9. Murakami Yu. *Spravochnik po koeffitsientam intensivnosti napryazheniy* [The reference of coefficients of stress intensity]. Moscow, Mir Publ., 1990, 556 p.
 10. Aleksandrov V. M., Smetanin B. I., Sobol' B. V. *Tonkie kontsentratory napryazheniy v uprugikh telakh* [Thin stress concentrators in elastic bodies]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1993, 224 p. (In Russian)
 11. Sobol' B. V., Krasnoshechekov A. A. Vliyaniye tonkoy nakladki na koeffitsient intensivnosti napryazheniy v zadachakh o poperechnoy treshchine v poluploskosti i polose [Thin plate effect on stress intensity factor in problems on transverse crack in half-plane and stripe]. *Vestnik DSTU* [Proc. of Dagestan State Technical University], 2013, no. 5/6(74), pp. 25–35. (In Russian)
 12. Savruk M. P. *Dvumernye zadachi uprugosti dlya tel s treshchinami* [Two-dimensional problems of elasticity for bodies with cracks]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1981, 324 p. (In Russian)
 13. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Nauka, 1971. 1108 p. (In Russian)

Статья поступила 7 октября 2014 г.

© Соболь Б. В., Рашидова Е. В., Борисова Е. В., 2014