УДК 519.67

ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ОРТОНОРМИРОВАННОГО БАЗИСА В ПРОЦЕДУРЕ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ ГРАММА–ШМИДТА

Бабенко В. Н.

FEATURES OF APPLICATION OF ALGORITHM OF CONSTRUCTION OF BIDIMENTIONAL ORTHONORMALIZATIONAL BASIS IN PROCEDURE GRAM-SCHMIDT ORTHOGONALIZATION

Babenko V. N.

Krasnodar Higher Military Aviation School for Pilots, Krasnodar, 350005, Russia
e-mail: rnibvd@mail.ru

Abstract. At the decision of systems of the linear equations a method of QR-decomposition with use Gram–Schmidt orthogonalization there are cases of reception of results of calculations unacceptable on accuracy. For restraint of influence of the found out defect within the framework of procedure Gram-Schmidt orthogonalization we use algorithm of construction bidimentional orthonormalizational basis. In algorithm of construction bidimentional orthonormalizational basis machine-sensitive parameters are applied.

The values of parameters established as a result of research provide the control over the order of argument of function specially used in used algorithm, construction of basis with guaranteed accuracy and high accuracy calculated with the help of QR-decomposition to the decision of system of the linear equations.

They also block calculation of the decision of system with badly caused matrix and protect the user from reception of doubtful results of calculations. The last is illustrated with the example of system resulted in clause with Gilbert's badly caused matrix.

Keywords: Gram–Schmidt orthogonalization, number of conditionality, linear variety, machine number, an error of calculation, guaranteed accuracy

Опыт эксплуатации программ, реализующих ортогональные методы, показал, что метод ортогонализации Грамма-Шмидта и метод Ланцоша могут давать результаты неприемлемой точности. В то время как трансформационные методы (методы вращений и отражений) на тех же задачах надежно давали результаты вычислений высокой точности. Указанные причины привели к тому, что в методах упрощения вида матриц (в том числе и в **QR**-разложении) начали отдавать предпочтение преобразованиям отражения Хаусхолдера и вращения Якоби (Гивенса) [1–5].

1. Обоснование выбора значений параметров в алгоритме построения двумерного ортогонального базиса

В работе [1] было предложено в рамках процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта применять алгоритм построения двумерного ортогонального базиса с гарантированной точностью. Проведенные там же предварительные тестовые испытания показали высокую устойчивость модифицированной процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта. Эти результаты были достигнуты за счет применения специальной функции $f(x)$, вводенной следующим образом. В памяти ЭВМ число x в формате с плавающей точкой представляется мантиссой m и целочисленным порядком k, причем $x = \gamma^k m$, где γ — основание системы счисления. Мантисса m удовлетворяет неравенству $\gamma^{-1} \leqslant m < 1$. Тогда

$$f(x) = \gamma^{k+l}, \tag{1.1}$$

где

$$l = \begin{cases} -4, & \text{если } k \text{ четно}, \\ -5, & \text{если } k \text{ нечетно}. \end{cases}$$

Ниже приведен алгоритм, предложенный в [2].

Бабенко Виктор Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Краснодарского высшего военного авиационного училища летчиков; e-mail: rnibvd@mail.ru.

1.1. Алгоритм построения двумерного ортонормированного базиса плоскости $\Pi = R\left(\mathbf{p}|\mathbf{q}\right)$

Входными данными алгоритма являются векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, удовлетворяющие требованию $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$. На выходе получается вектор $\mathbf{z}$, причем $\mathbf{z}\perp\mathbf{q}$, $\|\mathbf{z}\| = 1$. Алгоритм включает следующие шаги.

1) Проверка выполнения условия $|\mathbf{p}^*\mathbf{q}| \leqslant \leqslant 1 - \widehat{\delta}_1$. Если неравенство выполнено, то $x = 1 - (\mathbf{p}^*\mathbf{q})^2$ и осуществляется переход на 4.
2) Присвоение $\alpha = \varepsilon_1$, нахождение
$$\mathbf{g} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{p}, \quad \mathbf{h} = \frac{1}{\alpha}\mathbf{q}, \quad t = \|\mathbf{g} - \sigma\mathbf{h}\|^2,$$
$$x = st.$$
Проверка выполнения условия $x > \delta^2$. Если неравенство выполнено — переход на 4.
Здесь $\sigma = \begin{cases} \;\;1, \text{ если } \mathbf{p}^*\mathbf{q} > 0, \\ -1, \text{ если } \mathbf{p}^*\mathbf{q} < 0 \end{cases}.$
3) Сообщение: «векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ колинеарны».
4) $y = f(x)$, $\tau = \mathbf{q}^*\mathbf{p}$.
5) $\alpha = 2/y^{1/2}$, $\beta = -\tau/y^{1/2}$.
6) $u_j = \alpha p_j + \beta q_j$, $j = 1, \ldots, n$.
7) $s = \mathbf{u}^*\mathbf{q}$.
8) $v_j = 2u_j - sq_j$, $j = 1, \ldots, n$.
9) $s = (\mathbf{v}^*\mathbf{v})^{1/2}$.
10) $z_j = v_j/s$, $j = 1, \ldots, n$.
11) Завершение алгоритма.

Символом * обозначена операция сопряжения.

Однако вопрос о выборе значений параметров δ и α (α — параметр нормировки векторов p и q) в силу его объемности остался неосвещенным. В данной работе рассматриваются особенности выбора указанных параметров.

Исследования алгоритмов методами численного анализа показали несостоятельность идеи построения машинно-независимых алгоритмов. Представим некоторые машинные константы, необходимые в ходе изложения результатов исследования: $\varepsilon_1 = \gamma^{\widehat{q}+1}$ и $\varepsilon_0 = \gamma^{\widehat{p}-1}$ характеризуют относительную и абсолютную погрешность вычисленного результата, $\varepsilon_\infty = \gamma^{\widehat{p}}\left(1 - \gamma^{-\widehat{q}}\right)$ — наибольшее машинное число, $\widehat{q}$ — число γ-ичных разрядов, отведенных под мантиссу числа, $\widehat{p}$ — максимальный порядок. Значение параметра $\widehat{\delta}_1$, используемого в пункте 1 приведенного алгоритма, равно $9\varepsilon_1$ [2].

Замечание. Гарантированная точность алгоритма построения двумерного ортогонального базиса обеспечивается с помощью функции (1.1), применяемой в пункте 5, а также предварительной нормировкой векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ (пункт 2), при этом осуществляется контроль за порядком вычисляемого аргумента.

Можно показать, что значения параметров α и δ соответственно равны ε_1 и $7\varepsilon_1$.

Обоснование этого утверждения начнем с установления условий, в которых выполняется пункт 2. Прежде всего, следует отметить, что выбор значения параметра нормировки $\alpha = \varepsilon_1$ не приведет к переполнению порядка. Действительно, по условию применения алгоритма $\|\mathbf{p}\| = \|\mathbf{q}\| = 1$, тогда
$$\frac{1}{\alpha}\|\mathbf{p}\| = \varepsilon_1^{-1} = \gamma^{\widehat{q}-1} < \gamma^{\widehat{p}}.$$
Отсюда следует, что
$$\frac{1}{\alpha}p_j < \gamma^{\widehat{q}-1} < \gamma^{\widehat{p}}\left(1 - \gamma^{-\widehat{q}}\right) = \varepsilon_\infty.$$
Кроме того, вследствие неточности выполнения арифметических операций на ЭВМ, осуществляя операции над объектами, указанными в алгоритме, будем оперировать с их машинными вариантами.

Машинные варианты $\mathbf{p}_\mu$ и $\mathbf{q}_\mu$ векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ нормированы неточно. Связь между ними определена соотношениями $\mathbf{p}_\mu = (1+\kappa)\mathbf{p}$, $\mathbf{q}_\mu = (1+\rho)\mathbf{q}$, где κ и ρ удовлетворяют неравенству $|\kappa|, |\rho| < 3{,}5\varepsilon_1$ [2]. Переход на пункт 2 осуществляется, при выполнении условия
$$\left|\left(\mathbf{p}_\mu^*\sigma\mathbf{q}_\mu\right)_\mu\right| \geqslant 1 - \widehat{\delta}_1,$$
где $\left(\mathbf{p}_\mu^*\sigma\mathbf{q}_\mu\right)_\mu$ — машинный результат вычисления величины $\left(\mathbf{p}_\mu^*\sigma\mathbf{q}_\mu\right)$. В этом случае
$$1 - \left(\left(\mathbf{p}_\mu^*\sigma\mathbf{q}_\mu\right)_\mu\right)^2 < 1 - (1 - \widehat{\delta}_1)^2 = = 2\widehat{\delta}_1 - \widehat{\delta}_1^2. \quad (1.2)$$
Пренебрегая малыми высшего порядка, будем считать, что
$$\left(\mathbf{p}_\mu^*\sigma\mathbf{q}_\mu\right)_\mu = (1+\varepsilon)\left(\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q}\right), \quad (1.3)$$

где $|\varepsilon| < (7+2)\varepsilon_1 = 9\varepsilon_1$ [2]. Согласно сказанному, запишем цепочку равенств

$$1 - ((1+\varepsilon)\,\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2 = \\ = 1 - (\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2 - \left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)(\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2. \quad (1.4)$$

Следует заметить, что

$$1 - (\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2 = (\sin(\varphi))^2 \quad (1.5)$$

и x, определенный в пункте 2 исследуемого алгоритма, равен $\|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|^2$, в свою очередь

$$\|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|^2 = \left(2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2. \quad (1.6)$$

Пренебрегая погрешностями высших порядков, будем считать выполненным равенство

$$\left(2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2 = (\sin(\varphi))^2.$$

Используя последнее соотношение в (1.6), из (1.2)–(1.5) получим неравенство

$$\|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|^2 - \left(2\varepsilon+\varepsilon^2\right)(\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2 < 2\widehat{\delta}_1 - \widehat{\delta}_1^2.$$

Если пренебречь малыми высших порядков в последнем неравенстве, то из него последует

$$\|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|^2 < 2\left(\widehat{\delta}_1 - \varepsilon\right) < 18\varepsilon_1.$$

Следует отметить, что последняя оценка не слишком завышена, поэтому выполнение неравенства $|\mathbf{p}^*\mathbf{q}| > 1-\widehat{\delta}_1$ не может служить основанием для принятия решения о колинеарности векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$. Согласно сказанному, в этом случае следует перейти к пункту 2, в котором используется для проверки колинеарности векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ более точно вычисленная величина.

Вычисление значения величины $x = \|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|^2$ производилось таким образом, чтобы максимально ослабить влияние возникающих при этом погрешностей на полученный результат. С этой целью векторы $\mathbf{p}_\mu$ и $\sigma\mathbf{q}_\mu$ были подвергнуты нормировке. В этом случае вместо вектора $\mathbf{g}_\mu - \sigma\mathbf{h}_\mu$ получается вектор $\mathbf{f}_\mu$, связанный с исходным равенством

$$\mathbf{f}_m = (\mathbf{I}+\mathbf{T})\,(\mathbf{g}_\mu - \sigma\mathbf{h}_\mu)\,,$$

где $\mathbf{T} = \operatorname{diag}\{\tau_1,\ldots,\tau_n\}$, $|\tau_j| < 1{,}5\varepsilon_1$, $j = 1,\ldots,n$ [2], вместо скалярного квадрата $\mathbf{f}_\mu^*\mathbf{f}_\mu - \left(\mathbf{f}_\mu^*\mathbf{f}_\mu\right)_\mu = (1+\theta)\,\mathbf{f}_\mu^*\mathbf{f}_\mu$, где $|\theta| < 2\varepsilon_1$. Произведя обратную нормировку, введем обозначение $\overline{\mathbf{f}}_\mu = \varepsilon_1\mathbf{f}_\mu$. Произведя упрощения и отбрасывая малые высших порядков, получим

$$\left(\overline{\mathbf{f}}_\mu^*\overline{\mathbf{f}}_\mu\right)_\mu = (1+\theta)\,\overline{\mathbf{f}}_\mu^*\overline{\mathbf{f}}_\mu = \\ = (1+\theta)\,((\mathbf{I}+\mathbf{T})\,(\mathbf{p}_\mu - \sigma\mathbf{q}_\mu))^*\,,$$

$$(\mathbf{I}+\mathbf{T})\,(\mathbf{p}_\mu - \sigma\mathbf{q}_\mu) = \\ = (\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{p}) + \\ + 2(\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q})^*(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}) + \\ + (\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q})^*\,(\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q}) + \\ + 2\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,\mathbf{T}\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}) + \\ + \theta\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})\,. \quad (1.7)$$

В последнем выражении рассмотрим слагаемое $2(\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q})^*(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})$:

$$(\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q})^*(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}) = \\ = \kappa - \sigma\rho\mathbf{q}^*\mathbf{p} - \sigma\kappa\mathbf{p}^*\mathbf{q} + \rho = \\ = (\kappa+\rho)\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})\,.$$

Введем более компактные обозначения

$$x' = \left(\overline{\mathbf{f}}_\mu^*\overline{\mathbf{f}}_\mu\right), \quad x = (\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})\,,$$

$$w = 2(\kappa+\rho)\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}) + \\ + (\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q})^*\,(\kappa\mathbf{p}-\sigma\rho\mathbf{q}) + \\ + 2\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,\mathbf{T}\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}) + \\ + \theta\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})^*\,(\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q})\,. \quad (1.8)$$

С учетом последних обозначений (1.7) запишем в виде $x' - w = x$ и обратимся к машинному представлению чисел $x' = \gamma^{k'}m'$, $w = \gamma^{k_w}m_w$, $x = \gamma^k m$.

Установим при каких значениях x' порядки k и k' удовлетворяют неравенству $k-1 < k' < k+1$. Обращаясь к [2], находим, что достаточным условием выполнения последнего неравенства, является выполнение другого неравенства

$$k' - k_w > 2. \quad (1.9)$$

Из соотношения (1.8), видно, что матрица $\mathbf{T}$ и скаляры $(\kappa+\rho)$ и θ моделируют относительную погрешность, вносимую в величинуx, поэтому их суммарное влияние не может изменить ее порядок более чем на единицу. При малых углах между векторами доминирующее влияние на возмущение величины x приобретает слагаемое

$$(\kappa\mathbf{p} - \sigma\rho\mathbf{q})^* (\kappa\mathbf{p} - \sigma\rho\mathbf{q}) = \kappa^2 + \rho^2 - 2\sigma\kappa\rho\mathbf{p}^*\mathbf{q},$$

которое принимает наибольшее значение, когда $\kappa = -\rho$.

Руководствуясь этими соображениями, можно записать неравенство $w < (7\varepsilon_1)^2$.

Последнее выражение представим в машинном виде

$$(7\varepsilon_1)^2 = \left(7\gamma^{-\widehat{q}+1}\right)^2 = \\ = 49\gamma^{-2\widehat{q}+2} = \frac{49}{\gamma^t} \cdot \gamma^{-2\widehat{q}+2+t},$$

где t определяется из условия

$$\gamma^{-1} \leqslant \frac{49}{\gamma^t} < 1. \tag{1.10}$$

Обращаясь к (1.9), запишем неравенство $k' - (-2\widehat{q} + 2 + t) > 2$, из которого следует, что величина k' должна быть больше, чем $-2\widehat{q}+4+t$, соответственно в качестве δ^2 нужно принять

$$\frac{49}{\gamma^t} \cdot \gamma^{-2\widehat{q}+2+t} = 49 \cdot \gamma^{-2\widehat{q}+2}.$$

Здесь t определяется из неравенства (1.10).

Таким образом, установлено, что при $\delta^2 = 49\gamma^{-2\widehat{q}+2}$ осуществляется контроль за порядком аргумента функции (1.1).

2. Тестовые испытания

Для того чтобы проиллюстрировать надежность работы алгоритма построения двумерного ортогонального базиса в задаче ортогонализации системы векторов в качестве тестовой использована матрица Гилберта, в которой с ростом порядка n проявляется эффект «сплющивания базиса». При решении поставленной задачи с порядком матрицы $n = 6$ (число обусловленности $\operatorname{cond}(A) = 1{,}50 \times 10^7$ [3]) не было затруднений [1]. Когда порядок $n = 7$

$$\operatorname{cond}(A) = 4{,}75 \cdot 10^8 \tag{2.1}$$

построить ортонормированную систему векторов не удалось, так как на седьмом шаге процесса ортогонализации на вход алгоритма построения двумерного ортогонального базиса поступили векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ такие, что условие $x > \delta^2$, где $x = \|\mathbf{p} - \sigma\mathbf{q}\|^2$, проверяемое в пункте 2, оказалось не выполненным,

$$x = 4{,}06189807311438 \cdot 10^{-15}, \tag{2.2}$$

$$\delta^2 = 9{,}9475983006414 \cdot 10^{-14} \tag{2.3}$$

и программа выдала сообщение: «векторы p и q колинеарны».

Тем не менее был произведен переход на пункт 4 алгоритма построения двумерного ортогонального базиса и все последующие и шаги были выполнены. Это привело в решении системы уравнений к следующим результатам. Поддиагональные элементы матрицы $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{P}^*\mathbf{A}$ в последней строке получились «большими»:

$$\tilde{r}_{71} = 6{,}585 \cdot 10^{-9}, \quad \tilde{r}_{72} = 3{,}519 \cdot 10^{-9},$$

$$\tilde{r}_{73} = 2{,}429 \cdot 10^{-9}, \quad \tilde{r}_{74} = 1{,}839 \cdot 10^{-9},$$

$$\tilde{r}_{75} = 1{,}37 \cdot 10^{-9}, \quad \tilde{r}_{76} = 7{,}614 \cdot 10^{-10},$$

$$\tilde{r}_{77} = 1{,}797 \cdot 10^{-8}, \quad c(\mathbf{P}) = 1{,}000232,$$

$$c(\bar{\mathbf{R}}) = 4{,}75 \cdot 10^8,$$

$$\frac{c(\bar{\mathbf{R}}) - c(\mathbf{A})}{c(\mathbf{A})} = 2{,}352 \cdot 10^{-5},$$

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0{,}035, \tag{2.4}$$

где $c(\mathbf{P})$ — число обусловленности матрицы $\mathbf{P}$, составленной из вектор-столбцов, полученных в результате ортогонализации системы векторов $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ ($\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_n]$), $\bar{\mathbf{R}}$ — верхняя треугольная матрица, используемая при выполнении обратного хода, $\tilde{\mathbf{x}}$ — вычисленное решение, $\mathbf{x}$ — эталонное решение. Отметим, что все вычисления производились с одинарной точностью.

Здесь следует подчеркнуть, что для вычисленного решения последней системы уравнений с помощью приведения исходной матрицы к двухдиагональному виду преобразованиями отражения Хаусхолдера справедлива априорная оценка точности [3]

$$\frac{\|\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} < \varepsilon_7 = 2{,}16. \tag{2.5}$$

Заключение

Параметр $x = 1 - (\mathbf{p}^*\mathbf{q})^2$ $(x = \|\mathbf{p} - \sigma\mathbf{q}\|^2)$, характеризующий эффект «сплющивания базиса» $\{\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_j\}$, может служить для оценки числа обусловленности матрицы $\mathbf{A}_j = (\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_j)$, $j = 2, \ldots, n$. Действительно, для всех $j = 2, \ldots, n$

$$\frac{\left\|\Pi p_{R(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_{j-1})}\mathbf{a}_j\right\|}{\left\|\mathbf{a}_j - \Pi p_{R(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_{j-1})}\mathbf{a}_j\right\|} = \\ = \frac{\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q}}{\sqrt{1-(\mathbf{p}^*\sigma\mathbf{q})^2}} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad (2.6)$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{a}_j$ и его проекцией на линейное многообразие $R(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_{j-1})$. Продолжая начатую цепочку отношений, запишем

$$\frac{\left\|\Pi p_{R(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_{j-1})}\mathbf{a}_j\right\|}{\left\|\mathbf{a}_j - \Pi p_{R(\mathbf{a}_1|\ldots|\mathbf{a}_{j-1})}\mathbf{a}_j\right\|} < \frac{\cos(\varphi/2)}{2\sin(\varphi/2)} = \\ = \frac{\|\mathbf{p}+\sigma\mathbf{q}\|}{2\|\mathbf{p}-\sigma\mathbf{q}\|} = \frac{\max\limits_{\|x\|=1}\|[\mathbf{p}|\mathbf{q}]\,\mathbf{x}\|}{2\min\limits_{\|y\|=1}\|[\mathbf{p}|\mathbf{q}]\,\mathbf{y}\|} = \\ = \frac{1}{2}\operatorname{cond}([\mathbf{p}|\mathbf{q}]), \quad (2.7)$$

но

$$\operatorname{cond}([\mathbf{p}|\mathbf{q}]) \leqslant \operatorname{cond}(\mathbf{A}_j). \quad (2.8)$$

Таким образом, программа построения двумерного ортонормированного базиса не только обеспечивает построение базиса с гарантированной точностью, но, будучи применена в рамках процедуры ортогонализации Грамма–Шмидта, обеспечивает вычисленному решению высокую точность (случай $x > \delta^2$) [1]. Она также блокирует вычисление решения (случай $x < \delta^2$), при плохой обусловленности матрицы системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ (см. соотношения (2.6), (2.7), (2.8)), защищая пользователя от получения недостоверных результатов вычислений (см. описание тестовых испытаний, приведенных во втором параграфе (2.1), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5)).

Литература

1. *Бабенко В. Н.* Устойчивость ортогонализации Грама-Шмидта и способ ее повышения // Экологический вестник научных центров Черноморского экологического сотрудничества. 2014. № 4. С. 7–12.
2. *Бабенко В. Н.* Алгоритм изменения индекса произведения отражений Хаусхолдера // Сиб. матем. журнал. 1990. Т. 32. № 5. Деп. в ВИНИТИ за № 5350-В90. 59 с.
3. *Годунов С. К.* Решение систем линейных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 177 с.
4. *Икрамов Х. Д.* Несимметрическая проблема собственных значений. М.: Наука, 1991. 240 с.
5. *Беклемишев Д. В.* Дополнительные главы линейной алгебры. М.: Наука, 1983. 335 с.

References

1. Babenko V. N. Ustoychivost' ortogonalizatsii Grama-Shmidta i sposob ee povysheniya [Stability of Gram-Schmidt orthogonalization and a way of its increase]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekologicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no. 4, pp. 7–12. (In Russian)
2. Babenko V. N. Algoritm izmeneniya indeksa proizvedeniya otrazheniy Khauskholdera [The algorithm works by changing the index of Householder reflections]. *Sibirskiy matematicheskiy zhurnal* [Siberian Mathematical Journal], 1990, vol. 32, no. 5, Deposited in VINITI no. 5350-V90, 59 p. (In Russian)
3. Godunov S. K. *Reshenie sistem lineynykh uravneniy* [Solving systems of linear equations]. Novosibirsk, Nauka, 1980, 177 p. (In Russian)
4. Ikramov H. D. *Nesimmetricheskaya problema sobstvennykh znacheniy* [Asymmetric eigenvalue problem]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 240 p. (In Russian)
5. Beklemishev D. V. *Dopolnitel'nye glavy lineynoy algebry* [Additional chapters of linear algebra]. Moscow, Nauka Publ., 1983, 335 p. (In Russian)

Статья поступила 2 февраля 2015 г.