Механика

УДК 539.375:534.1

О СВОЙСТВАХ МАТРИЦ ГРИНА ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД С ТРЕЩИНАМИ[1]

О. Д. Пряхина[2], ***А. В. Смирнова***[3], ***И. В. Кардовский***[4], ***В. А. Мазин***[5]

ON THE PROPERTIES OF GREEN MATRICES OF DYNAMIC PROBLEMS FOR MULTI-LAYERED SEMI-BOUNDED MEDIA WITH FRACTURES

Pryakhina O. D., Smirnova A. V., Kardovsky I. V., Mazin V. A.

The work describes new properties of the Green matrices of dynamic problems for multi-layered semi-bounded media with fractures.

В работах [1, 2] предложен эффективный метод исследования динамических задач теории упругости для многослойных полуограниченных сред, содержащих в плоскостях раздела или внутри слоев множественные дефекты типа трещин-полостей или жестких включений. На его основе краевые задачи со смешанными граничными условиями на поверхности среды и в плоскостях расположения дефектов сведены к системам интегральных уравнений (СИУ) относительно контактных напряжений, скачков векторов перемещений на берегах трещин и скачков векторов напряжений на границах включений, дальнейшее решение которых предполагает использование метода фиктивного поглощения [3].

В настоящей работе приводятся свойства матриц-символов Грина построенных СИУ, в том числе новые, не встречавшиеся авторам в других работах, посвященных указанной тематике.

Рассмотрим задачу о колебаниях пакета из N параллельных слоев толщины $H = 2h_1 + 2h_2 + \ldots + 2h_N$ в условиях неидеального контакта между ними. Каждый слой имеет свои характеристики: полутолщину h_k, плотность ρ_k, модуль сдвига μ_k и коэффициент Пуассона ν_k. Нижняя грань пакета жестко сцеплена с недеформируемым основанием, а поверхность среды подвержена гармонической нагрузке. В плоскостях раздела слоев имеются трещины, занимающие области Ω_m $(m = 1, 2, \ldots N-1)$, на границе которых вектор перемещений претерпевает разрыв.

Система функционально-матричных соотношений, связывающих в трансформантах Фурье перемещения $\mathbf{W}_1$ точек поверхности среды, скачки перемещений $\mathbf{f}_m$

[1]Работа выполнена при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ (03-01-00662, 03-01-96658, 03-01-96645), Минобрнауки России (Е-02-4.0-191), ФЦП «Интеграция» (Б0121), гранта Президента РФ (НШ-2107-2003.1).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, заведующая кафедрой высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета, доцент.

[4]Кардовский Игорь Владимирович, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[5]Мазин Василий Александрович, преподаватель кафедры высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

($m = 1, 2, \ldots N-1$) на берегах трещин и напряжения $\mathbf{T}_k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots N-1$) на верхней грани $(k+1)$-го слоя, методом, изложенным в работах [1, 2], получена в форме

$$\mathbf{KU} = \mathbf{T}, \qquad (1)$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}_1, \mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{N-1}),$$
$$\mathbf{U} = (\mathbf{T}_0, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_{N-1}),$$

где элементами блочной матрицы $\mathbf{K} = ||\mathbf{K}_{ij}||_{i,j=1}^{N}$ являются матрицы-функции, причем

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{R}_N(h_1) \equiv \mathbf{R}_N(h_1, \ldots, h_N),$$

$$\mathbf{K}_{22} = \mathbf{F}_1^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \mathbf{F}_{j-1}^{-1}\mathbf{G}_{j-1}\mathbf{K}_{j-1,j-1}\mathbf{B}_-(h_{j-1})\mathbf{F}_{j-1}^{-1} + \\ + \prod_{k=1}^{j-2}(g_k)^{-1}\mathbf{F}_{j-1}^{-1}, \quad j = 3, \ldots, N.$$

Недиагональные элементы имеют вид

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}, \quad \mathbf{K}_{21} = \mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{i,j-1}\mathbf{B}_-(h_{j-1})\mathbf{F}_{j-1}^{-1}, \quad i < j, \\ i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad j = 3, 4, \ldots, N,$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{F}_{i-1}^{-1}\mathbf{G}_{i-1}\mathbf{K}_{i,j-1}, \quad i > j, \\ j = 1, 2, \ldots, N-1, \quad i = 3, 4, \ldots, N.$$

Здесь

$$\mathbf{F}_k(h_k, \ldots, h_N) = \\ = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{R}_{N-k}(h_{k+1}, \ldots, h_N), \\ k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$\mathbf{F}_N(h_N) = \mathbf{B}_-(-h_N), \quad g_k = \frac{\mu_k}{\mu_{k+1}},$$

$$\mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k), \quad k = 1, \ldots, N,$$

$\mathbf{R}_{N+1-k}(h_k) \equiv \mathbf{R}_{N+1-k}(h_k, h_{k+1}, \ldots, h_N)$ — матрицы-символы Грина k-слойной среды без дефектов, определяемые по формуле [3]

$$\mathbf{R}_{N-k+1}(h_k, h_{k+1}, \ldots, h_N) = \\ = \mathbf{B}_+(h_k) + \mathbf{B}_-(h_k)\mathbf{F}_k^{-1}\mathbf{G}_k, \\ k = 1, 2, \ldots, N.$$

Базовые матрицы $\mathbf{B}_\pm(h)$ имеют структуру

$$\mathbf{B}_\pm(h) = \begin{pmatrix} b_{11}^{\pm} & b_{12}^{\pm} & \pm b_{13}^{\pm} \\ b_{21}^{\pm} & b_{22}^{\pm} & \pm\frac{\beta}{\alpha}b_{13}^{\pm} \\ -b_{13}^{\pm} & -\frac{\beta}{\alpha}b_{13}^{\pm} & \pm b_{33}^{\pm} \end{pmatrix}.$$

Их элементы зависят от параметров конкретного слоя толщины $2h$ и представимы в виде отношения целых функций

$$b_{11}^{\pm} = \frac{\alpha^2}{\lambda^4\Delta_{10}}m_{10}^{\pm} + \frac{\beta^2}{\lambda^4\Delta_{20}}n_0^{\pm},$$

$$b_{22}^{\pm} = \frac{\beta^2}{\lambda^4\Delta_{10}}m_{10}^{\pm} + \frac{\alpha^2}{\lambda^4\Delta_{20}}n_0^{\pm},$$

$$b_{12}^{\pm} = b_{21}^{\pm} = \frac{\alpha\beta}{\lambda^4}\left(\frac{1}{\Delta_{10}}m_{10}^{\pm} - \frac{1}{\Delta_{20}}n_0^{\pm}\right),$$

$$b_{13}^{\pm} = \frac{i\alpha}{\lambda^2\Delta_{10}}m_{20}^{\pm}, \quad b_{33}^{\pm} = \frac{k_{20}^{\pm}}{\Delta_{10}}.$$

Здесь

$$m_{10}^{+} = -\sigma_2\Omega^2(\gamma^2\, c_2 s_1 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 c_1 s_2),$$
$$m_{10}^{-} = \sigma_2\Omega^2(\gamma^2\, s_1 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 s_2),$$
$$k_{20}^{+} = -\sigma_1\Omega^2(\gamma^2\, c_1 s_2 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 c_2 s_1),$$
$$k_{20}^{-} = -\sigma_1\Omega^2(\gamma^2\, s_2 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 s_1),$$

$$m_{20}^{+} = 2\sigma_1\sigma_2\gamma(\gamma + \lambda^2)(c_1c_2 - 1) - \\ - 2(\gamma^3 + \lambda^2\sigma_1^2\sigma_2^2)s_1 s_2,$$

$$m_{20}^{-} = \Omega^2\gamma\sigma_1\sigma_2\left(c_1 - c_2\right),$$
$$n_0^{+} = c_2, \quad n_0^{-} = -1,$$

$$\Delta_{10} = 4\left(\gamma^4 + \lambda^4\sigma_1^2\sigma_2^2\right)s_1 s_2 - \\ - 8\sigma_1\sigma_2\gamma^2\lambda^2(c_1c_2 - 1), \qquad (2)$$

$$\Delta_{20} = \sigma_2 s_2.$$

В последних формулах $\Omega^2 = \rho\omega^2/\mu$, $\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $\gamma = \lambda^2 - 0,5\Omega^2$, $\sigma_2^2 = \lambda^2 - \Omega^2$, $\sigma_1^2 = \lambda^2 - \varepsilon\Omega^2$, $\varepsilon = (1-2\nu)/(2-2\nu)$, $c_i = \mathrm{ch}(2h\sigma_i)$, $s_i = \mathrm{sh}(2h\sigma_i)$, где σ_j — корни характеристического уравнения задачи для одного слоя, ω — частота колебаний; ρ — плотность; μ — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона для конкретного слоя, занимающего область ($|z| \leqslant h, -\infty < x, y < \infty$); α, β — параметры преобразования Фурье.

Другие подходы к построению систем, аналогичных (1) предложены в [4–14].

На основе соотношений (1) легко выписываются системы интегральных уравнений (СИУ) динамической смешанной задачи относительно неизвестных скачков перемещений на берегах трещин и контактных давлений под штампом [15, 16].

Метод фиктивного поглощения, который был выбран для построения решения СИУ, требует знания асимптотического поведения и особенностей элементов и определителей подынтегральных матриц-функций $\mathbf{K}_{ij}$, а также определителя системы (1). Для перечисленных функций получены новые представления, удобные для численного анализа.

При исследовании асимптотических свойств матриц-функций $\mathbf{K}_{ij}$ установлено экспоненциальное убывание элементов $\mathbf{K}_{ij}$, $(i \neq j)$ при $|\lambda| \to \infty$, а главные члены асимптотических разложений матриц $\mathbf{K}_{jj}$ представимы в виде

$$\mathbf{K}_{jj} = \mathbf{K}_{jj}^0 \left(1 + O\left(\lambda^{-2}\right)\right),$$

где элементы матрицы $\mathbf{K}_{jj}^0 = ||k_{ij}||^3$ имеют вид ($\alpha = \lambda \cos\varphi$, $\beta = \lambda \sin\varphi$)

$$k_{11} = M_{j1}^0 \cos^2\varphi + N_j^0 \sin^2\varphi,$$

$$k_{22} = M_{j1}^0 \sin^2\varphi + N_j^0 \cos^2\varphi,$$

$$k_{12} = k_{21} = \sin\varphi\cos\varphi(M_{j1}^0 - N_j^0),$$

$$k_{13} = -k_{31} = iM_{j2}^0 \cos\varphi,$$

$$k_{23} = -k_{32} = iM_{j2}^0 \sin\varphi,$$

$$k_{33} = M_{j1}^0,$$

$$M_{11}^0 = \frac{1-\nu_1}{|\lambda|}, \quad M_{12}^0 = \frac{1-2\nu_1}{2\lambda},$$

$$N_1^0 = \frac{1}{|\lambda|},$$

$$M_{j1}^0 = |\lambda| \frac{a_1}{(a_1^2 - a_2^2)}, \quad M_{j2}^0 = \lambda \frac{a_2}{(a_1^2 - a_2^2)},$$

$$N_j^0 = \frac{|\lambda|}{a_3}, \quad j \neq 1,$$

$$a_1 = (1 - \nu_{j-1}) + g_{j-1}(1 - \nu_j),$$

$$a_2 = \left(-\nu_{j-1} + \frac{1}{2}\right) - g_{j-1}\left(-\nu_j + \frac{1}{2}\right)$$

$$a_3 = 1 + g_{j-1}.$$

Для формирования условий локализации вибрационного процесса [6] особый интерес представляет поиск нулей определителя системы (1).

Впервые установлено, что для пакета из N слоев, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, при наличии штампа на поверхности среды и трещин на стыках слоев, определитель системы имеет вид

$$\det\mathbf{K} = \mu \det\left(\mathbf{B}_+(h_1)\right) \prod_{k=1}^{N-1} \det\left(\mathbf{F}_k^{-1}\right), \qquad \mu = \frac{\mu_{N-1}}{\mu_1}. \tag{3}$$

Если внешнее воздействие $\mathbf{T}_0$ отсутствует, то размерность системы (1) понижается на единицу и ее определитель равен

$$\det\mathbf{K} = \mu \prod_{k=1}^{N-1} \det\left(\mathbf{F}_k^{-1}\right). \tag{4}$$

Несложно показать, что определители (3) и (4) представимы в виде произведения

$$\det\mathbf{K} = \mu \det\mathbf{K}^1 \det\mathbf{K}^2.$$

Для $\det\mathbf{K}^p$ (p=1,2) получены новые соотношения, позволяющие эффективно проводить численный анализ нулей и полюсов в плоскости (λ, ω) и изучать поведение дисперсионных кривых при различных значениях параметров задачи

$$\det\mathbf{K}^p = \frac{\Delta_{p1}(h_N)}{\Delta_{pN}(h_1, h_2, \ldots, h_N)} \times \\ \times \begin{cases} \Delta_{p1}(h_1)\left(\prod\limits_{k=2}^{N-1} \Delta_{p0}(h_k)\right), & \mathbf{T}_0 \neq 0, \\ \left(\prod\limits_{k=1}^{N-1} \Delta_{p0}(h_k)\right), & \mathbf{T}_0 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

В этих формулах Δ_{p1}, Δ_{pN}, $p = 1, 2$ — знаменатели определителей и элементов матриц-символов Грина соответственно для однослойной и N-слойной среды без дефектов с жестко защемленной нижней границей, а Δ_{p0} — знаменатели элементов базовой матрицы-функции $\mathbf{B}_+(h_1)$ (знаменатели определителя и элементов однослойной среды со свободной нижней поверхностью).

Заметим, что при $\lambda \equiv \alpha$, $\beta = 0$ система (1) распадается на две независимые системы, отвечающие плоской задаче с блочной матрицей $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}^1$ и антиплоской задаче с матрицей $\mathbf{K} \equiv \mathbf{K}^2$, определители которых описываются формулой (5).

Из (5) следует, что нули изучаемого определителя $\det \mathbf{K}$ в случае $\mathbf{T}_0 \neq 0$ являются совокупностью полюсов определителей матриц-символов Грина одного слоя с защемленной нижней гранью с параметрами верхнего и нижнего слоев $\Delta_{11}(h_1)$, $\Delta_{11}(h_N)$, $\Delta_{21}(h_1)$, $\Delta_{21}(h_N)$, а также полюсов определителей матриц-символов Грина однослойных сред со свободной нижней гранью с параметрами внутренних слоев $\Delta_{10}(h_k)$, $\Delta_{20}(h_k)$ $(k = 2, \ldots, N-1)$. Функции $\Delta_{p0}(h)$ даются формулами (2), а $\Delta_{p1}(h)$ имеют вид

$$\Delta_{11} = \frac{1}{2}\sigma_1\sigma_2 \left[\frac{1}{4}\Omega_2^4 - \left(\gamma + \lambda^2\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{4}\Omega_2^4 + \left(\gamma + \lambda^2\right)^2 \right) c_1 c_2 \right] -$$
$$- \lambda^2 \left(\gamma^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2\right) s_1 s_2,$$

$$\Delta_{21} = c_2, \quad c_i = \mathrm{ch}(2h\sigma_i), \quad s_i = \mathrm{sh}(2h\sigma_i).$$

Таким образом, каждый из сомножителей, входящих в (5), зависит от геометрических и механических параметров только одного слоя. Проводя вычислительные эксперименты, подбором этих параметров можно управлять волновыми, в том числе и резонансными, свойствами изучаемых объектов.

Рассмотрим плоскую задачу для пакета из N слоев при отсутствии трещин (идеальная среда) или наличии только одной трещины.

1. Среда без дефектов, внешняя нагрузка отлична от нуля ($\mathbf{T}_0 \neq 0$), тогда система (1) эквивалентна одному матричному уравнению
$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 = \mathbf{W}_1,$$
$$\det \mathbf{K} \equiv \det \mathbf{K}_{11} = \frac{D_{1N}(h_1, h_2, \ldots, h_N)}{\Delta_{1N}(h_1, h_2, \ldots, h_N)}.$$
2. Когда трещина расположена между первым и вторым слоем и $\mathbf{T}_0 \neq 0$, имеем систему двух матричных уравнений
$$\begin{cases} \mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{f}_1 = \mathbf{W}_1, \\ \mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}_1, \end{cases}$$
определитель которой равен
$$\det \mathbf{K} = \frac{\Delta_{11}(h_1)\Delta_{1N-1}(h_2, \ldots, h_N)}{\Delta_{1N}(h_1, \ldots, h_N)}.$$
3. Если трещина расположена между вторым и третьим слоем, то также имеем систему двух уравнений с определителем
$$\det \mathbf{K} = \frac{1}{g_1} \frac{\Delta_{12}(h_2, h_1)\Delta_{1(N-2)}(h_3, \ldots, h_N)}{\Delta_{1N}(h_1, \ldots, h_N)}.$$
4. Если трещина находится на границе между m и $m+1$ слоем $(m = 1, 2, \ldots, N-1)$, то
$$\det \mathbf{K} = \frac{\mu_m}{\mu_1}\Delta_{1N}^{-1}(h_1, \ldots, h_N)\times$$
$$\times \Delta_{1m}(h_m, \ldots, h_1)\Delta_{1(N-m)}(h_{m+1}, \ldots, h_N).$$
5. Если в условиях п.2 принять $\mathbf{T}_0 = 0$, то имеем одно матричное уравнение $\mathbf{K}_{22}\mathbf{f}_1 = \mathbf{T}_1$ с определителем
$$\det \mathbf{K} = \det \mathbf{K}_{22} =$$
$$= \frac{\Delta_{10}(h_1)\Delta_{1N-1}(h_2, \ldots, h_N)}{\Delta_{1N}(h_1, h_2, \ldots, h_N)}.$$

Из полученных соотношений (3)–(5) можно сделать ряд важных заключений, даже не прибегая к численному анализу, что также является их достоинством. Например, в [3] изучены условия существования изолированных резонансов системы «массивный штамп — пакет слоев, жестко сцепленный с недеформируемым основанием». Показано, что точек дискретного спектра всегда конечное число, и они лежат в диапазоне частот $0 < \omega < \omega_{\text{кр}} \neq 0$. Если $\omega_{\text{кр}} = 0$, то рассматриваемая система не имеет низкочастотных резонансов. Из (3–5) следует, что при идеальном контакте между слоями или при наличии только одной трещины $\det \mathbf{K}(\lambda, \omega)$ имеет вещественные нули и полюса, начиная с некоторого значения $\omega = \omega^* > 0$. Если трещин в среде две и более, то за счет функций $\Delta_{p0}(\lambda, \omega)$ появляются кривые нулей, выходящие из начала координат, что соответствует $\omega_{\text{кр}} = 0$. В случае $\mathbf{T}_0 = 0$ при любом количестве трещин $\omega_{\text{кр}} = 0$.

Детальный численный анализ дисперсионных кривых элементов и определителей матриц $\mathbf{K}^1$ и $\mathbf{K}^2$ для двух- и трехслойной среды приведен в [17–20].

Литература

1. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Динамические задачи для сред с нарушением сплошности // Прикладная механика. 2004. № 2.
2. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научн. мир, 1999. 246 с.
4. *Бабешко В. А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
5. *Бабешко В. А.* К проблеме исследования динамических свойств трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 304. № 2. С. 317–321.
6. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
7. *Бабешко В. А., Бужан В. В., Вильямс Р. Т.* Вирусы вибропрочности в упругих твёрдых телах. Случай полупространства // ДАН. 2002. Т. 385. № 3. С. 332–333.
8. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. Т.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
9. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В.* К задаче о вибрации полупространства с совокупностью внутренних трещин // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2002. № 3. С. 36–38.
10. *Барсуков С. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Сингулярность напряжений в угловых точках фронта трещины, находящейся на границе раздела двух сред // Изв. РАН. МТТ. 2002. № 2. С. 77–85.
11. *Ватульян О. А., Ворович И. И., Соловьёв А. Н.* Об одном классе граничных задач в динамической теории упругости // ПММ. 2000. Т. 64. Вып. 3. С. 373–380.
12. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В, Ехлаков А. В.* Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 1. С. 147–156.
13. *Гузъ А. Н.* О постановке задач динамической механики разрушения // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2000. № 3. С. 54–56.
14. *Гузь И.А.* О расчётных схемах в трёхмерной теории устойчивости (модель кусочно-однородной среды) для композитов с трещинами между слоями // Прикладная механика. 1993. Т. 29. № 4. С. 31–39.
15. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Постановка и решение динамических задач о взаимодействии массивных объектов со слоистым основанием // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Материалы II школы-семинара молодых ученых Юга России. Краснодар, 2004. С. 5–21.
16. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Построение матриц-символов Грина динамических смешанных задач для слоистых сред с неоднородностями // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Нелинейные проблемы механики сплошной среды. Спец. выпуск. 2003. С. 279–284.
17. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Антиплоские динамические задачи для упругих полуограниченных сред, содержащих систему дефектов // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. 2004. С. 89–93.
18. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Кардовский И. В.* Интегральные уравнения динамической задачи для двухслойной среды, содержащей систему трещин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Материалы II школы-семинара молодых ученых Юга России. Краснодар, 2004. С. 152–155.
19. *Кардовский И. В., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Решение динамической задачи для трехслойной среды с трещинами // Известия вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2004. № 3. С. 38–43.
20. *Смирнова А. В., Мазин В. В.* Антиплоская задача для слоистых сред с системой трещин // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. Математическое моделирование, вычислительная механика и геофизика: Материалы II школы-семинара молодых ученых Юга России. Краснодар, 2004. С. 161–166.

Статья поступила 24 февраля 2004 г.
Кубанский государственный университет
© Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Кардовский И. В., Мазин В. А., 2004