

УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТЕЛАХ С ПОКРЫТИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ ДЕФЕКТЫ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Гладской И. Б.,
Акинина М. М., Уафа Г. Н., Плужник А. В., Шестопалов В. Л.

TO THE LOCALIZATION PROBLEM OF STRENUOUSLY STRAINED STATE
IN THE BODIES WITH COVERS, CONTAINING DEFECTS

Babeshko V. A.^{*}, Evdokimova O. V.^{**}, Babeshko O. M.^{*}, Gladskoi I. B.^{*}, Akinina M. M.^{**},
Uafa G. N.^{**}, Pluzhnik A. V.^{**}, Shestopalov V. L.^{**}

^{*} Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

^{**} Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia

e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The possibility of localization of strenuously strained state of blocked structures, consisting of horizontal positioned different-typed blocks, contacting with each other on the borders is analyzed. This blocked structure is situated on the surface of three dimensional linear-elastic base. The observed blocked structures are placed under the vertical statistic external action. Such state is peculiar for lithosphere plates and also for nanomaterials and items, which are made of constructive materials. The analysis of strenuously strained state of lithosphere plates allows getting the information about character of seismic territories. The topological approach gives an opportunity to examine bodies with covers, containing concealed defects, which are not observed visually. The case of existence of concealed defects, which is capable of inducing the localization in that sphere is analyzed on the example of blocked structure, consisting of two different typed contacting half-planes on the three dimensional strained base. It should be noted, that statistic case can't be received from the solving of analogical boundary problem about harmonic motions to the simple breaking move of disappearing frequency of motions. Static problems for coating defects can detect an increase of seismicity in areas with high seismic danger and under appropriate conditions, promotes the "silent earthquake". The detailed analysis of approach is made for important cases of contact of two fragments in the form of: half-planes, which are occurred in the earth-quake prone territories.

Keywords: mixed boundary problem, localization, factorization of matrix functions, topology, outer forms, and integral equations

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Гладской Игорь Борисович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: i.glad@list.ru.

Акинина Мария Михайловна, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: akinina_mm@mail.ru.

Уафа Галина Николаевна, инженер-исследователь Южного научного центра РАН; e-mail: uafa70@mail.ru.

Плужник Андрей Валерьевич, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: infocenter@kubsu.ru.

Шестопалов Валерий Леонидович, канд. техн. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: vlshestopalov@gmail.com.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 13-01-12003-м, 13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 13-01-96509, 15-01-01379, 15-08-01377), гранта Президента РФ (НШ-1245.2014.1), Программ Президиума РАН № 3 и № 43.

1. Не вдаваясь в детали топологического решения граничных задач и факторизационных подходов, изложенных в [1–9], приведем определяющие уравнения для блочной структуры, состоящей из двумерных фрагментов покрытия на трехмерной подложке, сохранив обозначения работ [1, 2]. Уравнение Кирхгофа для некоторого блока b покрытия, $b = 1, 2, \dots, B$, занимающего область Ω_b с границей $\partial\Omega_b$, при вертикальных статических воздействиях напряжением t_{3b} имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} - \varepsilon_{5b}(g_{3b} + t_{3b}) &\equiv \\ \equiv \varepsilon_{3b} \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} - \\ - \varepsilon_{5b}(g_{3b} + t_{3b}) &= 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) u_{3b} - \varepsilon_{5b}g_{3b} = \varepsilon_{5b}t_{3b},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} &\equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \\ &\equiv \varepsilon_{3b}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b}, \end{aligned}$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \quad b = 1, 2, \dots, B.$$

Здесь u_{3b} — амплитуда вертикальных перемещений пластины,

$$\varepsilon_{1b} = 0,5(1 - \nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0,5(1 + \nu_b),$$

$$\varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12}, \quad \varepsilon_{5b} = \frac{1 - \nu_b^2}{E_b h_b},$$

где для пластин приняты обозначения: ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, g_{3b} , t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b . $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

В локальной системе координат $x_1 x_2 x_3$ с плоскостью $x_1 x_2$, совпадающей со срединной плоскостью пластины, и осью ox_3 , направленной по нормали к пластине, осью ox_1 , направленной по касательной к границе разлома, осью ox_2 — по нормали к его границе, граничные условия могут быть заданы любыми двумя из представленных ниже четырех соотношений, а именно, в виде вертикального перемещения на границе:

$$u_{3b} = f_1(\partial\Omega_b); \quad (1)$$

поворота срединной плоскости вокруг оси x_1 ,

$$\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} = f_2(\partial\Omega_b); \quad (2)$$

момента изгиба на границе

$$\begin{aligned} M = -D \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} \right) = \\ = f_{3b}(\partial\Omega_b), \end{aligned} \quad (3)$$

$$D = \frac{E_b h_b^2}{12(1 - \nu_b^2)};$$

перерезывающей силы на границе

$$\begin{aligned} Q = -D \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b). \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения между напряжениями на поверхности слоистой среды и перемещениями имеют вид

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3) G_3(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2, 0) = O(A^{-1}),$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty,$$

где $K(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k , в частности мероморфная, многочисленные примеры вида K приведены в [10, 11].

В случае двух пластин, контактирующих вдоль оси ox_1 , наделим параметры левой от оси пластины индексом λ , а правой — индексом r . Тогда функциональное уравнение граничной задачи для левой полуплоскости можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3\lambda} &\equiv \varepsilon_{3\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3\lambda} = \\ &= - \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (6)$$

$$S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(g_{3\lambda} + t_{3\lambda}).$$

Аналогично для правой полуплоскости

$$R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3r} \equiv \varepsilon_{3r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3r} = - \int_{\partial\Omega_r} \omega_r + S_{3r}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (7)$$

$$S_{3r}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(g_{3r} + t_{3r}).$$

Здесь ω_b — участвующая в представлении внешняя форма ($b = \lambda, r$), имеющая вид

$$\begin{aligned} \omega_b = & \varepsilon_{3b} e^{i\langle \alpha, x \rangle} \left\{ - \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ & + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2 \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \left. \right] dx_1 + \\ & + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2 \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b} \right] dx_2 \left. \right\}. \end{aligned}$$

Приняв обозначения работ [1, 2], вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить для левой полуплоскости в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{2-} D_\lambda^{-1} M_\lambda - D_\lambda^{-1} Q_\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{5\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \\ \alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ iD_\lambda^{-1} M_\lambda - 2\alpha_{2-} \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i [3\alpha_{2-}^2 + 2(2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{5\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda. \end{aligned}$$

Соответственно для правой

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ i\alpha_{2+} D_r^{-1} M_r - D_r^{-1} Q_r - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{2+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 \right. \\ \left. + \varepsilon_{5r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \end{aligned}$$

$$\alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \left\{ iD_r^{-1} M_r - 2\alpha_{2+} \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i [3\alpha_{2+}^2 + 2(2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \right. \\ \left. + \varepsilon_{5r} S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r. \end{aligned}$$

Производная вычисляется по параметру α_2 . Основываясь на (1)–(4), введем следующую систему обозначений:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_\lambda &= \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\}, \\ \mathbf{Y}_r &= \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\}, \\ \mathbf{F}_1 g &= \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g, \\ y_{1\lambda} &= D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda, \\ y_{1r} &= D_r^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r, \\ z_{1\lambda} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda, \\ z_{1r} &= \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r, \\ \mathbf{K}_\lambda &= \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{1\lambda} &= \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(g_\lambda + t_\lambda) = \\ &= \varepsilon_{5\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}), \end{aligned}$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{5\lambda} S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$

$$\begin{aligned} k_{1r} &= \varepsilon_{5r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(g_r + t_r) = \\ &= \varepsilon_{5r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}), \end{aligned}$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{5r} S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & -i\alpha_{2-}y_{1\lambda} + y_{2\lambda} + (\alpha_{2-}^2 + \nu_{\lambda}\alpha_1^2)z_{1\lambda} - \\ & -i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} + k_{1\lambda} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -iy_{1\lambda} + 2\alpha_{2-}z_{1\lambda} - \\ & -i [3\alpha_{2-}^2 + 2(2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2] z_{2\lambda} + k_{2\lambda} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -i\alpha_{2+}y_{1r} + y_{2r} + (\alpha_{2+}^2 + \nu_r\alpha_1^2)z_{1r} - \\ & -i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} + k_{1r} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -iy_{1r} + 2\alpha_{2+}z_{1r} - \\ & -i [3\alpha_{2+}^2 + 2(2 - \nu_r)\alpha_1^2] z_{2r} + k_{2r} = 0. \end{aligned}$$

В матричной форме система имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\lambda}\mathbf{Y}_{\lambda} + \mathbf{B}_{\lambda}\mathbf{Z}_{\lambda} + \mathbf{K}_{\lambda} &= 0, \\ \mathbf{A}_r\mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r\mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r &= 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_{\lambda} = \begin{pmatrix} a_{11\lambda} & a_{12\lambda} \\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_{\lambda} = \begin{pmatrix} b_{11\lambda} & b_{12\lambda} \\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11r} & a_{12r} \\ a_{21r} & a_{22r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} b_{11r} & b_{12r} \\ b_{21r} & b_{22r} \end{pmatrix},$$

$$a_{11\lambda} = -i\alpha_{2-}, \quad a_{12\lambda} = 1,$$

$$a_{21\lambda} = -i, \quad a_{22\lambda} = 0,$$

$$b_{11\lambda} = (\alpha_{2-}^2 + \nu_{\lambda}\alpha_1^2),$$

$$b_{12\lambda} = -i\alpha_{2-} [\alpha_{2-}^2 + (2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2],$$

$$b_{21\lambda} = 2\alpha_{2-}, \quad b_{22\lambda} = -i [3\alpha_{2-}^2 + 2(2 - \nu_{\lambda})\alpha_1^2],$$

$$a_{11r} = -i\alpha_{2+}, \quad a_{12r} = 1, \quad a_{21r} = -i,$$

$$a_{22r} = 0, \quad b_{11r} = (\alpha_{2+}^2 + \nu_r\alpha_1^2),$$

$$b_{12r} = -i\alpha_{2+} [\alpha_{2+}^2 + (2 - \nu_r)\alpha_1^2],$$

$$b_{21r} = 2\alpha_{2+}, \quad b_{22r} = -i [3\alpha_{2+}^2 + 2(2 - \nu_r)\alpha_1^2].$$

Решив эти псевдодифференциальные уравнения для избранной граничной задачи и внося найденные неизвестные во внешние формы в (6), (7), преобразование Фурье решения для пластин можно представить для

левой ($b = \lambda$) и правой ($b = r$) полуплоскости в однотипном виде

$$\begin{aligned} U_{3b} &= [R_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})]^{-1} \times \\ &\times \left\langle - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{5b} \mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}) \right\rangle. \end{aligned}$$

Дальнейшее использование этого представления для сопряжения с подложкой детально описано в [1, 2] и применено ниже. Заметим, что это исследование требует привлечения различных вариантов интегрального метода факторизации [14, 15].

2. Топологический метод решения граничных задач обладает важным достоинством, состоящим в охвате всех типов граничных условий, допускаемых рассматриваемой граничной задачей, а также в единообразном подходе к исследованию. Последнее позволяет наглядно сопоставлять решения этих задач, что показано ниже. Рассмотрим некоторые примеры треснувших покрытий. При отсутствии дефекта напряжения и перемещения берегов трещины обязаны совпадать. Изучим тот случай, когда дефект представляет свободные от напряжений края трещины, то есть $\mathbf{Y}_{\lambda} = \mathbf{Y}_r = 0$. Тогда из системы (8) находим

$$\mathbf{Z}_{\lambda} = -\mathbf{B}_{\lambda}^{-1}\mathbf{K}_{\lambda}, \quad \mathbf{Z}_r = -\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r. \quad (9)$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Z}_{\lambda} = \mathbf{Z}_r$ и $y_{1\lambda} = y_{1r} = 0$. Тогда, решение дается соотношениями

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = -\mathbf{C}_{\lambda r}^{-1}(\mathbf{B}_{\lambda}^{-1}\mathbf{K}_{\lambda} - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r),$$

$$\mathbf{C}_{\lambda} = \mathbf{B}_{\lambda}^{-1}\mathbf{A}_{\lambda}, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r,$$

$$\mathbf{C}_{\lambda r} = \begin{pmatrix} c_{12\lambda} & -c_{12r} \\ c_{22\lambda} & -c_{22r} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = \{y_{2\lambda}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Y}_{\lambda} = \{0, y_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_r = \{0, y_{2r}\},$$

$$\mathbf{Z}_{\lambda} = -\mathbf{B}_{\lambda}^{-1}\mathbf{A}_{\lambda}\mathbf{Y}_{\lambda} - \mathbf{B}_{\lambda}^{-1}\mathbf{K}_{\lambda}.$$

Этот случай можно отнести к категории наличия скрытого дефекта, не наблюдаемого визуально, поскольку перемещения и углы поворота пластин на дефекте непрерывны. Тем не менее, имеет место нарушение связности для компоненты напряжений, что свидетельствует о присутствии дефекта.

Подобные примеры различных типов дефектов, трещин или разломов, можно продолжить. Чтобы понять возможную причину разрушения покрытия в исследуемом месте, целесообразно изучить вариант отсутствия дефекта и определить напряженно-деформированное состояние в этом случае. Тогда надо принять $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r$, $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r$. В результате из (8) получим

$$\mathbf{Y}_\lambda = (\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{B}_\lambda - \mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{B}_r)^{-1} \times (\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{K}_r), \quad (11)$$

$$\mathbf{Z}_\lambda = (\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r)^{-1} \times (\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r).$$

Таким образом, из приведенных примеров видно, что топологический метод для данного типа граничных задач удобен и позволяет однотипно исследовать задачи как с дефектами всех типов, так и при их отсутствии.

Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и для каждого блока, внося в них соответствующие граничные условия и решив извлеченные из псевдодифференциальных уравнений интегральные уравнения, получим из (6), (7) представление решений в каждом блоке, соответствующем полуплоскости, в виде

$$u_{3\lambda} = \mathbf{F}_2^{-1} [R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda) \right\rangle, \quad (12)$$

$$u_{3r} = \mathbf{F}_2^{-1} [R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r} \mathbf{F}_2(g_r + t_r) \right\rangle.$$

3. Представим соотношение (5), при $x_3 = 0$ в виде

$$\mathbf{P}_\lambda u_3(x_1, x_2, 0) + \mathbf{P}_r u_3(x_1, x_2, 0) = \mathbf{F}_2^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2, 0) \times [G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)], \quad (13)$$

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\lambda g(x_1, x_2),$$

$$G_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_r g(x_1, x_2).$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$ — проекторы на левую и правую полуплоскости, являющиеся носителями соответствующих плит. Внося соотношения (12) в левые части (13) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$\begin{aligned} & [R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \\ & \times \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}(G_\lambda + T_\lambda) \right\rangle + \\ & + [R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)]^{-1} \times \\ & \times \left\langle - \int_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}(G_r + T_r) \right\rangle - \\ & - K(\alpha_1, \alpha_2, 0) [G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)] = 0, \\ & T_\lambda = \mathbf{F}_2 t_\lambda(x_1, x_2), \quad T_r = \mathbf{F}_2 t_r(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Здесь $G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $G_r(\alpha_1, \alpha_2)$ как преобразования Фурье функций с носителями в полуплоскостях являются регулярными функциями параметров α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. Поэтому, можно ввести обозначения

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = G_-(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$G_r(\alpha_1, \alpha_2) = G_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внося G_+ и G_- в предыдущее соотношение, приходим к функциональному уравнению Винера–Хопфа вида

$$\begin{aligned} MG_+ &= G_- + V, \quad M = K_1 K_2^{-1}, \\ K_1 &= R_r^{-1} \varepsilon_{5r} - K, \quad K_2 = K - R_\lambda^{-1} \varepsilon_{5\lambda}, \quad (14) \\ V &= K_2^{-1} \left(R_\lambda^{-1} \int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + R_r^{-1} \int_{\partial\Omega_r} \omega_r - \right. \\ & \left. - R_\lambda^{-1} \varepsilon_\lambda T_\lambda - R_r^{-1} \varepsilon_r T_r \right). \end{aligned}$$

Последнее эквивалентно интегральному уравнению Винера–Хопфа следующего вида:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty m(x - \xi) g(\xi) d\xi = \mathbf{v}^+(x), \\ & m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty M(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (15) \\ & v^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty V(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Исследование на возможность существования локализации производится в соответствии с алгоритмом, изложенным в [12–15], где приведены условия локализации процесса.

Решение функционального уравнения (14) не представляет сложности.

Способы построения его точных или приближенных решений можно найти в работе [16]. Учитывая, что при $\alpha_2 \rightarrow \pm\infty$ имеет место соотношение $M \rightarrow \text{const}$, решение может быть записано в форме

$$\begin{aligned} G_+ &= M_+^{-1} \{M_-^{-1} V\}^+, \\ G_- &= -M_- \{M_-^{-1} V\}^-, \\ M &= M_+ M_-, \\ M_-^{-1} V &= \{M_-^{-1} V\}^+ + \{M_-^{-1} V\}^-. \end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения работы [16].

Построенные таким образом решения обладают следующей структурой.

$$\begin{aligned} G_+(\alpha_1, \alpha_2) &= C_{1+}(\alpha_1, \alpha_2)G_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \\ &+ C_{2+}(\alpha_1, \alpha_2)G_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + \\ &+ C_{3+}(\alpha_1, \alpha_2)G'_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \\ &+ C_{4+}(\alpha_1, \alpha_2)G'_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + \\ &+ C_{5+}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_-(\alpha_1, \alpha_2) &= C_{1-}(\alpha_1, \alpha_2)G_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \\ &+ C_{2-}(\alpha_1, \alpha_2)G_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + \\ &+ C_{1-}(\alpha_1, \alpha_2)G'_+(\alpha_1, \alpha_{2+}) + \\ &+ C_{2-}(\alpha_1, \alpha_2)G'_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) + C_{3-}(\alpha_1, \alpha_2). \end{aligned}$$

Продифференцируем первое и второе уравнения по α_2 . Здесь функции

$$C_{n+}(\alpha_1, \alpha_2), \quad C_{n-}(\alpha_1, \alpha_2), \quad n = 1, 2, 3$$

являются известными, а

$$\begin{aligned} G_+(\alpha_1, \alpha_{2-}), \quad G_-(\alpha_1, \alpha_{2+}), \\ G'_+(\alpha_1, \alpha_{2+}), \quad G'_-(\alpha_1, \alpha_{2-}) \end{aligned}$$

требуется определить. Для их определения положим в первом уравнении, а также в полученном в результате его дифференцирования $\alpha_2 = \alpha_{2+}$, а во втором и продифференцированном уравнении - $\alpha_2 = \alpha_{2-}$. Получаем алгебраическую систему для определения всех вышеперечисленных неизвестных,

решив которую находим искомые функции. Внесение найденных решений в соотношения (9)–(11), в зависимости от поставленной граничной задачи, с последующим использованием соотношений (16), (12) дает возможность полностью определить напряженно-деформированное состояние покрытия с любым из рассматриваемых дефектов или без них.

Литература

1. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Топологические методы в теории скрытых дефектов и некоторые аномалии // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 650–655.
2. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О разнотипных покрытиях с дефектами в статических задачах сейсмологии и наноматериалах // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 41–45.
3. Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382, № 5. С. 625–628.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 767–770.
5. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 163–167.
6. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
7. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
8. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
9. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
10. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
11. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1979. 262 с.
12. Бабешко В. А., Ритцер Д., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О локализации энергий природных процессов и природные ви-

- русы // ДАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 406–409.
13. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.
 14. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. «Вирусная теория» некоторых природных аномалий // ДАН. 2012. Т. 447. № 6. С. 624–628.
 15. Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М. Об одной модели некоторых природных явлений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 3. С. 15–23.
 16. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
- ### References
1. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Topologicheskie metody v teorii skrytykh defektov i nekotorye anomalii [Topological methods in the theory of hidden defects and some anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no. 6, pp. 650–655. (In Russian)
 2. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. O raznotipnykh pokrytiyakh s defektami v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialakh [On different types of surfaces with defects in the static problems of seismology and nanomaterials]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 6, pp. 41–45 (In Russian)
 3. Babeshko V. A., Pavlova A. V., Ratner S. V., Vil'yams R. K resheniyu zadachi o vibratsii uprugogo tela, soderzhashchego sistemu vnutrennikh polostey treshchin [To solve the problem of vibration of the elastic body containing a system of internal cavities cracks]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2002, vol. 382, no. 5, pp. 625–628. (In Russian)
 4. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii v kraevykh zadachakh v neogranichennykh oblastyakh [Factorization method in boundary value problems in unbounded domains]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2003, vol. 392, no. 6, pp. 767–770. (In Russian)
 5. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matrits-funktsiy [Factorization formulas of some meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)
 6. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii resheniya nekotorykh kraevykh zadach [The factorization method for solving some boundary value problems]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2003, vol. 389, no. 2, pp. 184–188. (In Russian)
 7. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Ob avtomorfizme i psevdodifferentsial'nykh uravneniyakh v metode blochnogo elementa [Automorphisms and pseudodifferential equations in the block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 5, pp. 623–625. (In Russian)
 8. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. K probleme issledovaniya materialov s pokrytiyami [On the problem of the study of materials with coverings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 1, pp. 49–52. (In Russian)
 9. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. K probleme otsenki sostoyaniya materialov s pokrytiyami [On the problem of assessment of materials with coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2006, vol. 409, no. 4, pp. 481–485. (In Russian)
 10. Vorovich I. I., Aleksandrov V. M., Babeshko V. A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Nonclassical mixed elasticity problem]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p. (In Russian)
 11. Ulitko A. F. *Metod sobstvennykh vektornykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti* [The method of characteristic vector functions in spatial elasticity problems]. Kiev, Naukova Dumka Publ, 1979, 262 p. (In Russian)
 12. Babeshko V. A., Rittser D., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. O lokalizatsii energii prirodnnykh protsessov i prirodnye virusy [On the localization energy of natural processes and natural viruses]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2013, vol. 448, no. 4, pp. 406–409. (In Russian)
 13. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. O “virusnoy” teorii nekotorykh anomal'nykh prirodnykh yavleniy [About “viral” theory of some anomalous natural phenomena]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2012, vol. 447, no. 1, pp. 33–37. (In Russian)
 14. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. “Virusnaya teoriya” nekotorykh prirodnykh anomal'iy [“Virus theory” of certain natural anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2012, vol. 447, no. 6, pp. 624–628. (In Russian)
 15. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Ob odnoy modeli nekotorykh prirodnykh yavleniy [On a model of some natural phenomena]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov*

- Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no 3, pp. 15–23. (In Russian)
16. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 320 p. (In Russian)

Статья поступила 9 марта 2015 г.

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Гладской И. Б., Акинина М. М., Уафа Г. Н., Плужник А. В., Шестопалов В. Л., 2015