УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРЕДВАРИТЕЛЬНО-НАПРЯЖЕННОГО ТЕРМОУПРУГОГО ЦИЛИНДРА

Ватульян А. О., Нестеров С. А.

ON PARTICULARITIES OF IDENTIFICATION THE INHOMOGENEOUS CHARACTERISTICS OF PRESTRESSED THERMOELASTIC CYLINDER

Vatulyan A. O.[*, **], Nesterov S. A.[*]

[*] South Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia
[**] South Mathematical Institute, Vladikavkaz, 344090, Russia
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract. Functionally graded and pre-strained materials find wide application in various engineering fields with large thermo-mechanical loads. Knowing the exact laws heterogeneity of materials after fabrication requires the solution of coefficient inverse problems of thermoelasticity. In this work we present the formulation of the inverse problems of thermoelasticity for pre-stressed functionally graded cylinder. The direct problem is solved on the basis of the method of adjustment in transform by Laplace and use handling procedures implemented in accordance with the method of Durbin. As additional information when solving the inverse problem is the measured displacement at the external border. For the solution of nonlinear inverse problems based on the method of linearization was built by an iterative process. Thermomechanical characteristics were recovered in two stages. The first stage was an initial approximation. In the second stage of the amendment to the restoring characteristics were determined from the solution of the Fredholm integral equations of the 1st kind. The results of computational experiments are presented. The influence of prestressed term on the results of reconstruction of thermoelastic characteristics is considered.

Keywords: coefficient inverse problem, thermoelasticity, pre-stressing, functionally graded cylinder, integral equations

Введение

Изучение термомеханических процессов в телах цилиндрической формы имеет большое значение для многих областей науки и техники, в частности для волноводов и трубопроводов. При этом для термомеханических расчетов требуется знание физических характеристик материалов. Часто при моделировании считают, что материал однороден, поэтому его термомеханические характеристики описывают набором физических постоянных. Однако в последние годы все шире внедряются функционально-градиентные материалы — композиты, обладающие переменными физическими свойствами [1, 2] и обеспечивающие некоторые новые качества для исследуемых объектов. Неоднородную структуру материалы могут получить также в процессе эксплуатации, например, из-за воздействия больших тепловых полей. Для адекватного описания напряженно-деформированного состояния трубопроводов важно учитывать и наличие предвари-

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; заведующий отделом дифференциальных уравнений Южного математического института Владикавказского научного центра РАН и Правительства Республики Северная Осетия – Алания; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Нестеров Сергей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: 1079@list.ru.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (13-01-00196-а), проекта Министерства образования и науки РФ (9.665.2014/K) на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности и проекта «Математическое моделирование неоднородных и многофазных структур» (в рамках Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1 «Фундаментальные проблемы математического моделирования»).

тельных напряжений. В случае неоднородных предварительно-напряженных тел прямые измерения термомеханических характеристик невозможны, поскольку искомые зависимости представляют собой некоторые функции координат. В связи с этим требуется разработка эффективной технологии контроля качества таких материалов после изготовления на основе решения коэффициентных обратных задач (КОЗ) термоупругости. Отметим, что КОЗ термоупругости — малоизученный раздел математической физики [2–5], а на практике исследование КОЗ термоупругости проводят только в классах слоистых [4] или слабо-неоднородных структур [5].

В последние годы в ряде работ [6–10] развит новый подход к решению нелинейных обратных задач. В этих работах решение обратных задач сводится к итерационному процессу, на каждом этапе которого решается линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. Этот подход ранее был успешно применен в [11] для идентификации термомеханических характеристик неоднородного стержня при наличии предварительно-напряженного состояния. В настоящей работе этот подход распространен на решение обратной задачи для функционально-градиентного предварительно-напряженного цилиндра. С этой целью сначала на основе подхода, предложенного ранее Треффтцем Э. и развитого Гузем А.Н. [12], были получены уравнения термоупругости для предварительно-напряженного цилиндра. Прямая задача для цилиндра решалась на основе метода пристрелки в трансформантах и обращения трансформант решений на основе метода Дурбина. Проведен анализ влияния преднапряжений на смещение внешней поверхности цилиндра. Для решения обратной задачи были получены операторные уравнения, связывающие искомые и измеряемые функции, и проведены вычислительные эксперименты. Сделан анализ влияния предварительных напряжений на результаты реконструкции термоупругих характеристик цилиндра.

1. Решение прямой задачи для неоднородного термоупругого цилиндра

Рассмотрим плоскую задачу о радиальных колебаниях неоднородного предварительно напряженного термоупругого цилиндра под действием равномерно распределенной нагрузки, приложенной на внешней поверхности $r = b$. Внутренняя поверхность цилиндра $r = a$ теплоизолирована. При этом будем различать два способа возбуждения колебаний — тепловой и механический.

В соответствии с линеаризованной моделью [12] начально-краевая задача для случая механического способа возбуждения колебаний имеет вид

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rr}^0 + (\lambda + 2\mu)\left(1 + \frac{\partial u^0}{\partial r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \\ + \lambda\left(\frac{1}{r} - u^0\right)u - \gamma\theta, \quad (1.1)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \sigma_{\phi\phi}^0 + \lambda\left(1 + \frac{\partial u^0}{\partial r}\right)\frac{\partial u}{\partial r} + \\ + (\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{r} - u^0\right)u - \gamma\theta, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1.3)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(k(r)r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right) = c_\varepsilon(r)\frac{\partial\theta}{\partial t} + \\ + \theta^0\gamma(r)\left(1 + \frac{\partial u^0}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial t}\right), \quad (1.4)$$

$$\theta(r,0) = u(r,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial r}(a,t) = \frac{\partial\theta}{\partial r}(b,t) = 0,$$

$$\sigma_{rr}(a,t) = 0, \quad \sigma_{rr}(b,t) = p_0\varphi(t). \quad (1.6)$$

Здесь $\sigma_{rr}^0(r)$, $\sigma_{\phi\phi}^0(r)$ — преднапряжения, $\theta^0(r)$ — преднагрев, которые удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^0}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^0 - \sigma_{\phi\phi}^0}{r} = 0$$

и уравнению стационарной теплопроводности

$$\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{d\theta^0}{dr}\right) = 0$$

соответственно.

Перейдем в (1.1)–(1.6) к безразмерным параметрам и переменным, обозначая

$$z = \frac{r-a}{b-a}, \quad z_0 = \frac{a}{b-a}, \quad s(r) = \lambda(r) + 2\mu(r),$$

$$\bar{s}(z)=\frac{s(r)}{s_0},\quad \bar{\lambda}(z)=\frac{\lambda(r)}{s_0},\quad \bar{k}(z)=\frac{k(r)}{k_0},$$
$$\bar{c}(z)=\frac{c_\varepsilon(r)}{c_0},\quad \bar{\gamma}(z)=\frac{\gamma(r)}{\gamma_0},\quad \bar{\rho}(z)=\frac{\rho(r)}{\rho_0},$$
$$v=\sqrt{\frac{s_0}{\rho_0}},\quad t_1=\frac{(b-a)}{v},\quad t_2=\frac{(b-a)^2c_0}{k_0},$$
$$\tau_1=\frac{t}{t_1},\quad \tau_2=\frac{t}{t_2},$$
$$W=\frac{\gamma_0\theta}{s_0},\quad W^0=\frac{\gamma_0\theta^0}{s_0},$$
$$U=\frac{u}{(b-a)},\quad U^0=\frac{u^0}{(b-a)},$$
$$\Omega_r=\frac{\sigma_{rr}}{s_0},\quad \Omega_r^0=\frac{\sigma_{rr}^0}{s_0},$$
$$\Omega_\phi=\frac{\sigma_{\phi\phi}}{s_0},\quad \Omega_\phi^0=\frac{\sigma_{\phi\phi}^0}{s_0},$$
$$\delta=\frac{\gamma_0}{c_0},\quad \varepsilon=\frac{t_2}{t_1},\quad p^*=\frac{p_0}{s_0},$$
$$k_0=\max_{r\in[a,b]}k(r),\quad c_0=\max_{r\in[a,b]}c(r),$$
$$\gamma_0=\max_{r\in[a,b]}\gamma(r),\quad \rho_0=\max_{r\in[a,b]}\rho(r),$$
$$\lambda_0=\max_{r\in[a,b]}\lambda(r),\quad s_0=\max_{r\in[a,b]}s(r).$$

После обезразмеривания начально-краевая задача (1.1)–(1.6) примет вид

$$\Omega_r=\Omega_r^0+\bar{s}\left(1+\frac{dU^0}{dz}\right)\frac{\partial U}{\partial z}+ +\bar{\lambda}\left(\frac{1}{z+z_0}-U^0\right)U-\bar{\gamma}W, \quad (1.7)$$

$$\Omega_\phi=\Omega_\phi^0+\bar{\lambda}\left(1+\frac{dU^0}{dz}\right)\frac{\partial U}{\partial z}+ +\bar{s}\left(\frac{1}{z+z_0}-U^0\right)U-\bar{\gamma}W, \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial\Omega_r}{\partial z}+\frac{\Omega_r-\Omega_\phi}{z+z_0}=\bar{\rho}\frac{\partial^2U}{\partial\tau_1^2}, \quad (1.9)$$

$$\frac{1}{z+z_0}\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{k}(z+z_0)\frac{\partial W}{\partial z}\right)= =\bar{c}\frac{\partial W}{\partial\tau_1}+\delta\bar{\gamma}W^0\left(1+\frac{dU^0}{dz}\right)\times \times\left(\frac{\partial^2U}{\partial z\partial\tau_1}+\frac{1}{z+z_0}\frac{\partial U}{\partial\tau_1}\right), \quad (1.10)$$

$$W(z,0)=U(z,0)=\dot{U}(z,0)=0, \quad (1.11)$$
$$\frac{\partial W}{\partial z}(0,\tau_1)=\frac{\partial W}{\partial z}(1,\tau_1)=0,$$
$$\Omega_r(0,\tau_1)=0,\quad \Omega_r(1,\tau_1)=p^*\varphi(\tau_1). \quad (1.12)$$

Прямая задача термоупругости заключается в определении функций $U(z,\tau_1)$ и $W(z,\tau_1)$ из (1.7)–(1.12) при известных термомеханических характеристиках $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{s}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ и функциях W^0, U^0, Ω_r^0, Ω_ϕ^0, характеризующих начальное состояние.

Для решения прямой задачи (1.7)–(1.12) сначала применим преобразование Лапласа по τ_1 к уравнениям (1.7)–(1.11). Прямая задача в трансформантах в работе решается методом пристрелки [13]. Для нахождения оригиналов функций по их трансформантам в работе применяется метод Дурбина [14].

Проведено исследование влияния начального состояния, возникшего в результате теплового воздействия, на безразмерное смещение точек внешней поверхности цилиндра. Начальное состояние (W^0, U^0, Ω_r^0, Ω_ϕ^0) определялось из решения следующих краевых задач:

$$\frac{1}{z+z_0}\frac{d}{dz}\left(\bar{k}(z)(z+z_0)\frac{dW^0}{dz}\right)=0, \quad (1.13)$$

$$W^0(0)=0,\quad -\bar{k}(1)\left.\frac{dW^0}{dz}\right|_{z=1}=\omega_0; \quad (1.14)$$

$$\Omega_r^0=\bar{s}\frac{dU^0}{dz}+\bar{\lambda}\frac{1}{z+z_0}U^0-\bar{\gamma}W^0, \quad (1.15)$$

$$\Omega_\phi^0=\bar{\lambda}\frac{dU^0}{dz}+\bar{s}\frac{1}{z+z_0}U^0-\bar{\gamma}W^0, \quad (1.16)$$

$$\frac{d\Omega_r^0}{dz}+\frac{\Omega_r^0-\Omega_\phi^0}{z+z_0}=0, \quad (1.17)$$

$$\Omega_r^0(0)=\Omega_r^0(1)=0. \quad (1.18)$$

На рис. 1 изображены графики изменения смещения внешней поверхности цилиндра от времени при нагрузке $\varphi(\tau_1)=H(\tau_1)$, безразмерных параметрах $z_0=0{,}5$, $\bar{s}=1$, $\bar{\lambda}=0{,}5$, $\delta=0{,}1$ и различных величинах тепловой нагрузки ω_0, создающей начальное состояние. Анализ влияния уровня начального состояния на смещение точек цилиндра показал, что это влияние наиболее существенно при $\omega_0\geqslant 0{,}1$.

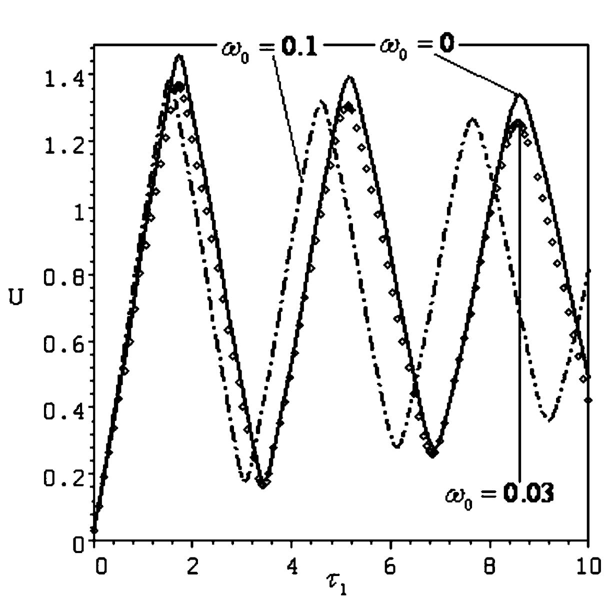

Рис. 1. Влияние начального состояния на смещение внешней поверхности цилиндра

2. Решение обратной задачи термоупругости для цилиндра

В обратной задаче требуется определить одну из термомеханических характеристик цилиндра при известных остальных по некоторой дополнительной информации. В качестве такой информации в случае механического нагружения выступает смещение на его наружной поверхности

$$U(1,\tau_1) = f(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a,b], \tag{2.1}$$

а в случае теплового нагружения — приращение температуры на наружной поверхности

$$W(1,\tau_2) = g(\tau_2), \quad \tau_2 \in [c,d]. \tag{2.2}$$

Коэффициентная обратная задача термоупругости относится к нелинейным задачам, решаемым, как правило, путем построения итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейное операторное уравнение.

Процедура восстановления термомеханических коэффициентов $\bar{a}(z)$ состоит из двух этапов. На первом этапе определяется начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}^{(0)}(z) = kz+b$ на основе минимизации функционала невязки, который в случае механического нагружения цилиндра имеет вид

$$J_1 = \int_a^b (f(\tau_1) - U(1,\tau_1))^2 d\tau_1, \tag{2.3}$$

а в случае теплового нагружения принимает вид

$$J_2 = \int_c^d (g(\tau_2) - W(1,\tau_2))^2 d\tau_2. \tag{2.4}$$

На втором этапе уточняется закон изменения восстанавливаемой функции на основе метода линеаризации в окрестности некоторого известного состояния. Выполняя действия, аналогичные описанным в [13], были получены интегральные уравнения Фредгольма 1-го рода для нахождения поправок восстанавливаемых функций. Так, для нахождения поправок плотности получено уравнение

$$\int_0^1 \delta\bar{\rho}^{(n-1)} R(z,\tau_1) dz = \\ = f(\tau_1) - U^{(n-1)}(1,\tau_1), \quad \tau_1 \in [a,b]. \tag{2.5}$$

Здесь ядро предстает в виде

$$R(z,\tau_1) = \\ = \int_0^{\tau_1} \frac{\partial U^{(n-1)}(z,t)}{\partial t} \frac{\partial U^{(n-1)}(z,\tau_1 - t)}{\partial t} dt.$$

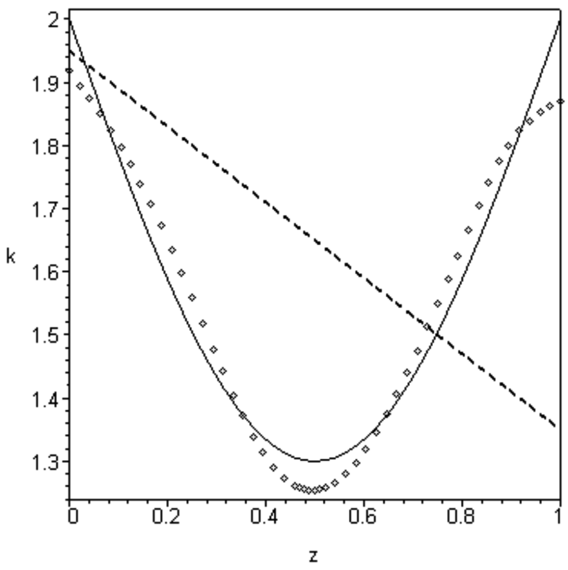

Рис. 2. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности

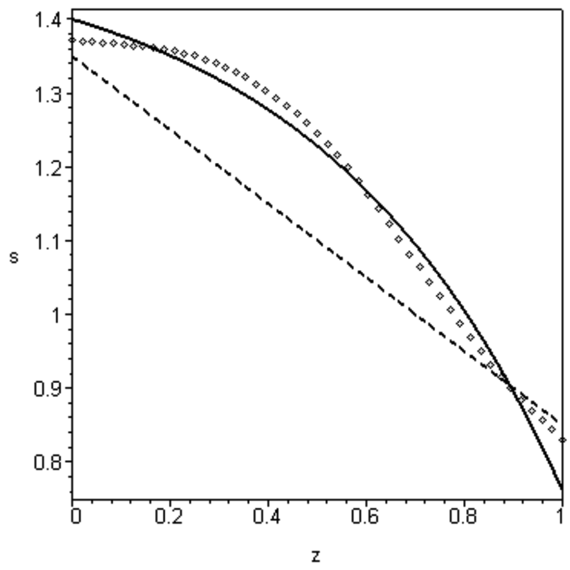

Рис. 3. Результат реконструкции модуля упругости

Решение интегральных уравнений вида (2.5) является некорректной задачей. В работе для регуляризации уравнения (2.5) применялся метод Тихонова [15]. На основе интегральных уравнений вида (2.5) строится итерационный процесс уточнения реконструируемой функции по следующей схеме:

$$\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{a}^{(n-1)}(z). \qquad (2.6)$$

Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении функционалом невязки порогового значения, равного 10^{-6}.

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительного эксперимента принято

$$\varphi(\tau_1) = H(\tau_2),$$

$$z_0 = 0{,}5, \quad \delta = 0{,}05, \quad \varepsilon = 10^{-6}.$$

Сначала были проведены исследования по реконструкции термомеханических характеристик цилиндра при отсутствии начального состояния. Определены наиболее информативные промежутки времени для измерения смещений и температуры на внешней поверхности цилиндра и оценена погрешность реконструкции в зависимости от типа нагружения и монотонности функций, характеризующих неоднородность. Оказалось, что измерения наиболее информативны внутри безразмерных временных отрезков $[a,b] = [0,2]$, $[c,d] = [0, 0{,}5]$ при 4 точках наблюдения. Безразмерные термоупругие характеристики цилиндра восстанавливаются с хорошей точностью: погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 4 %, а немонотонных 10 %. Для достижения порогового значения в функционале невязки при реконструкции гладких функций требуется не более 8 итераций.

Появление начального состояния, вызванного тепловым воздействием, характеризуемым величиной ω_0, существенно влияет на результаты реконструкции некоторых термомеханических характеристик. При увеличении начальных напряжений и преднагрева погрешность реконструкция модулей упругости $\bar{s}(z)$, $\bar{\lambda}(z)$ быстро возрастает. Так, при $\omega_0 = 0{,}05$ погрешность восстановления $\bar{s}(z)$ для монотонных функций увеличивается до 6 %, при $\omega_0 = 0{,}1$ — до 11%, а при $\omega_0 \geqslant 0{,}18$ реконструкция становится уже невозможной. В то же время возрастание ω_0 до единицы увеличивает относительную погрешность реконструкции коэффициентов $\bar{c}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\gamma}(z)$ только на 1–3 %.

На рис. 2 и 3 сплошной линией изображен точный закон, точками — восстановленный при параметре $\omega_0 = 0{,}05$, пунктиром — начальное приближение.

На рис. 2 приводится пример реконструкции немонотонной функции $\bar{k}(z) = 2 - 0{,}7\sin(\pi z)$. Начальное приближение $\bar{k}_0(z) = 1{,}95 - 0{,}6z$. Для достижения порогового значения в функционале (2.3) потребовалось 7 итераций. Погрешность реконструкции на последней итерации не превысила 6 %.

На рис. 3 изображен результат реконструкции убывающей функции $\bar{s}(z) = 1{,}5 - 0{,}1e^{2z}$. Начальное приближение $\bar{s}_0(z) = 1{,}35 - 0{,}5z$. Потребовалось 8 итераций; погрешность восстановления на последней итерации не превысила 5 %.

Литература

1. *Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Science and Technology. 1996. No. 56. P. 1099–1104.
2. *Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F, Lee Y.D., Mutasin Z.* Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // Journal of American Ceramic Society. 1996. Vol. 19. P. 3003–3012.
3. *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. *Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E.* Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // Journal of Thermal Stresses. 2003. Vol. 26. No. 1. P. 13–23.
5. *Ломазов В.А.* Задачи диагностики неоднородных термоупругих сред. Орел: ОрелГТУ, 2002. 168 с.
6. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 224 с.
7. *Ватульян А.О.* О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Доклады РАН. 2008. Т. 422. №2. С. 182–184.
8. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. №1. С. 217–224.
9. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures. 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
10. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Об особенностях идентификации термомеханических характеристик функционально-градиентных материалов // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2014. Т. 14. Вып. 3. С. 329–335.
11. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Об особенностях идентификации неоднородных характеристик предварительно напряженных термоупругих тел // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. №1. С.18–24.
12. *Guz A.N.* Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses // International Applied Mechanics. 2005. No. 38. P. 23–59.
13. *Ватульян А.О., Нестеров С.А.* Коэффициентные обратные задачи термоупругости для функционально-градиентных материалов // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76. №4. С. 335–342.
14. *Durbin F.* Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method // The Computer Journal. 1974. Vol. 17. P. 371–376.
15. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.

References

1. Wetherhold R.C., Seelman S., Wang J. The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation. *Composites Science and Technology*, 1996, no. 56, pp. 1099–1104.
2. Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F, Lee Y.D., Mutasin Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications. *Journal of American Ceramic Society*, 1996, vol. 19, pp. 3003–3012.
3. Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V. *Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1988, 288 p. (In Russian)
4. Lukasievicz S.A., Babaei R., Qian R.E. Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects. *Journal of Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
5. Lomazov V.A. *Zadachi diagnostiki neodnorodnykh termouprugikh sred* [The problems of identification inhomogeneous thermoelastic bodies]. Orel, OrelSTU Publ., 2002, 168 p. (In Russian)
6. Vatulyan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of deformable solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 224 p. (In Russian)
7. Vatulyan A.O. O variatsionnoy postanovke obratnykh koeffitsientnykh zadach dlya uprugikh [On the variation formulation of the inverse coefficient problems for elastic bodies]. *Doklady RAN* [Reports of the Russian Academy of Sciences], 2008, vol. 422, no. 2, pp. 182–184. (In Russian)
8. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob odnom sposobe identifikatsii termouprugikh kharakteristik dlya neodnorodnykh tel [About one

method of identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies]. *Inzhenero-fizicheskiy zhurnal* [Journal of engineering physics], 2014, vol. 87, no. 1, pp. 217–224.

9. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 767–773.
10. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob osobennostyakh identifikatsii termomekhanicheskikh kharakteristik funktsional'no-gradientnykh materialov [About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded materials]. *Izvestiya Saratovskogo universitrta. Novaya seriya. Seriya matematika. Mekhanika. Informatika* [Proceedings of the Saratov University. The new series. Series Mathematics. The mechanics. Computer science], 2014, vol. 14, iss. 3, pp. 329–335. (In Russian)
11. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob osobennostyakh identifikatsii neodnorodnykh kharakteristik predvaritel'no-napryazhennykh termouprugikh tel [About the specifics of identification the inhomogeneous characteristics of prestressed thermoelastic solids]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the scientific centers of the black sea economic cooperation], 2014, no. 1, pp. 18–24. (In Russian)
12. Guz A.N. Elastic waves in bodies with initial (residual) stresses. *International Applied Mechanics*, 2005, no. 38, pp. 23–59.
13. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Koeffitsientnye obratnye zadachi termouprugosti dlya funktsional'no-gradientnykh materialov [Coefficient inverse problems of thermoelasticity for functionally-graded materials]. *Problemy prochnosti i plastichnosty* [The problems of toughness and plasticity], 2014, vol. 76, no. 4, pp. 335–342. (In Russian)
14. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*, 1974, vol. 17, pp. 371–376.
15. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow: Nauka Publ., 1990, 230 p. (In Russian)

Статья поступила 24 февраля 2015 г.