УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ С ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ СЛОЕМ

Еремеев В. В., Зубов Л. М.

STABILITY OF A THREE-LAYERED RECTANGULAR PLATE WITH PRESTRESSEDMIDDLE LAYER

Eremeev V. V., Zubov L. M.

South Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: er.vadim@gmail.com

Abstract. Within the framework of the nonlinear elasticity, the problem on stability of a three-layered rectangular plate with prestressed core is solved. The model of neo-Hookean incompressible material (Treloar's model) was used for description of material behavior. The middle layer of the plate is subjected to initial uniform compression or stretching and then combined with other two layers in three-layered plate. Further, the three-layered plate with prestressed middle layer (core) subjected to uniform lateral compression. For analysis of instability, Euler's method is applied. The method consists of determination of such values of deformation parameter for which linearized boundary-value problem has non-trivial solutions. For each layer the linearized equilibrium equations were derived. Using Fourier's method of variable separation, the solutions of the linearized equilibrium equations are obtained. Analysis of dependence of critical stress resultant on initial strains of prestressed core is performed.

Keywords: nonlinear elasticity, buckling, bifurcation of equilibrium, three-layered plate

В представленной работе в рамках нелинейной теории упругости рассмотрена задача о потере устойчивости нагруженной в своей плоскости трехслойной прямоугольной пластинки, средний слой которой предварительно сжат или растянут. В качестве уравнения состояния использована модель несжимаемого неогуковского материала (модель Трелоара). Предполагается, что средний слой подвергнут предварительной однородной деформации и скреплен с верхним и нижним слоями по плоскости контакта. Далее трехслойная пластинка с предварительно напряженным средним слоем подвергается боковому сжатию (растяжению). Устойчивость пластинки изучается на основе нелинейной трехмерной теории упругости статическим методом Эйлера, состоящим в определении параметров деформации, при которых линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения. Составлены трехмерные дифференциальные линеаризованные уравнения равновесия для каждого слоя. Методом разделения переменных построены решения этих уравнений. Проведен анализ зависимости критического усилия от начальной деформации предварительно напряженного слоя.

Введение

Неоднородность деформируемых тел может быть обусловлена не только различием свойств материала в различных точках среды, но и наличием в теле предварительно напряженных включений. Такие включения могут образовываться в результате различных необратимых процессов в отдельных частях тела (фазовые превращения, пластические деформации и др .) или быть созданы искусственно. Особенность нелинейно упругих тел с предварительно напряженными включениями состоит в том, что они не имеют естественной (ненапряженной) конфигурации, единой для всего тела. Единую отсчетную конфигурацию можно выбрать так, чтобы она была предварительно деформиро-

Еремеев Вадим Викторович, аспирант кафедры теории упругости Южного Федерального университета; e-mail: er.vadim@gmail.com.

Зубов Леонид Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: zubovl@yandex.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-01492), в рамках проекта Министерства образования и науки РФ (9.665.2014/K) на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

ванной для материала включения и ненапряженной для другой части тела. Указанную особенность следует учитывать при постановке и решении задач об устойчивости равновесия тел и конструкций, содержащих в исходном состоянии предварительно деформированные части.

1. Основные соотношения

Уравнения равновесия нелинейной теории упругости при отсутствии массовых сил относительно отсчетной конфигурации записываются следующим образом [3]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{C}), \tag{1.1}$$

где ∇ — оператор градиента в отчетной конфигурации, $\mathbf{D}$ — тензор напряжений Пиолы, $\mathbf{C}$ — градиент деформации.

Тензоры $\mathbf{D}$ и $\mathbf{C}$ зависят от отсчетной конфигурации. Пусть имеются две отсчетные конфигурации κ и κ', а $\mathbf{C}$ $(\kappa \to \chi)$ и $\mathbf{C}'$ $(\kappa' \to \chi)$ – соответствующие им градиенты деформации, отвечающие одной текущей конфигурации χ. Справедлива [1]– [3] следующая формула преобразования градиента деформации при изменении отсчетной конфигурации: $\mathbf{C} = \mathbf{P}\mathbf{C}'$, где $\mathbf{P}$ – градиент деформации при переходе от одной отсчетной конфигурации к другой: $\mathbf{P}$ $(\kappa \to \kappa')$.

Записывая выражения для тензоров Пиолы в разных отсчетных конфигурациях

$$\mathbf{D} = (\det \mathbf{C})\mathbf{C}^{-1}\mathbf{T}, \quad \mathbf{D}' = (\det \mathbf{C}')\mathbf{C}'^{-1}\mathbf{T},$$

где $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши, получаем связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{D}'$

$$\mathbf{D}' = (\det \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}. \tag{1.2}$$

Для несжимаемого материала определители градиента деформации в разных отсчетных конфигурациях и градиента деформации перехода равны единице

$$\det \mathbf{C} = \det \mathbf{C}' = \det \mathbf{P} = 1.$$

В качестве уравнения состояния примем модель несжимаемого неогуковского материала. Для него удельная потенциальная энергия деформации W и тензор напряжений Пиолы относительно ненапряженной отсчетной конфигурации κ задаются следующими выражениями:

$$W = \frac{\mu}{2}\left[\operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}^T) - 3\right], \qquad \mathbf{D} = \mu\mathbf{C} - p\mathbf{C}^{-T}, \tag{1.3}$$

где μ — материальная постоянная, имеющая смысл модуля сдвига, p — давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию.

Согласно (1.2), (1.3) тензор напряжений Пиолы для неогуковского материала относительно преднапряженной отсчетной κ' конфигурации имеет вид

$$\mathbf{D}' = \mu\mathbf{P}^T\mathbf{P}\mathbf{C}' - p'\mathbf{C}'^{-T}. \tag{1.4}$$

Для исследования устойчивости равновесия применим метод линеаризации нелинейных уравнений [3]. Суть метода состоит в том, что на известное напряженное состояние тела, называемое невозмущенным или докритическим, накладывается малая деформация, определяемая из линеаризованных уравнений равновесия и линеаризованных граничных условий. Далее разыскиваются такие параметры нагружения, при которых однородная линеаризованная краевая задача допускает нетривиальные решения. Рассмотрим возмущения вида $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \eta\mathbf{w}$, $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 + \eta\dot{\mathbf{D}} + \ldots$,

$$\dot{\mathbf{D}} = \left.\frac{d}{d\eta}\mathbf{D}(\mathbf{C}_0 + \eta\nabla\mathbf{w})\right|_{\eta=0},$$

где η — малый параметр, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точек тела в возмущенном деформированном состоянии, $\mathbf{w}$ — вектор малых добавочных перемещений, а знак «0» внизу относится к невозмущенному состоянию. Подставляя эти разложения в нелинейные уравнения равновесия (1.1) и граничные условия, удерживая члены только первого порядка относительно параметра η, получим линейную однородную краевую задачу для векторфункции $\mathbf{w}$.

Для неогуковского материала линеаризованные уравнения равновесия имеют вид [4]

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{D}} = \mathbf{0}, \qquad \dot{\mathbf{D}} = \mu\nabla\mathbf{w} - \dot{p}\mathbf{C}_0^{-T} + p_0\mathbf{C}_0^{-T}\nabla\mathbf{w}\mathbf{C}_0^{-T}. \tag{1.5}$$

Аналогично при помощи (1.4) определяется $\dot{\mathbf{D}}'$

$$\dot{\mathbf{D}}' = \mu\mathbf{A}\nabla\mathbf{w} - \dot{p}'\mathbf{C}_0^{-T} + p_0'\mathbf{C}_0^{-T}\nabla\mathbf{w}\mathbf{C}_0^{-T}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}.$$

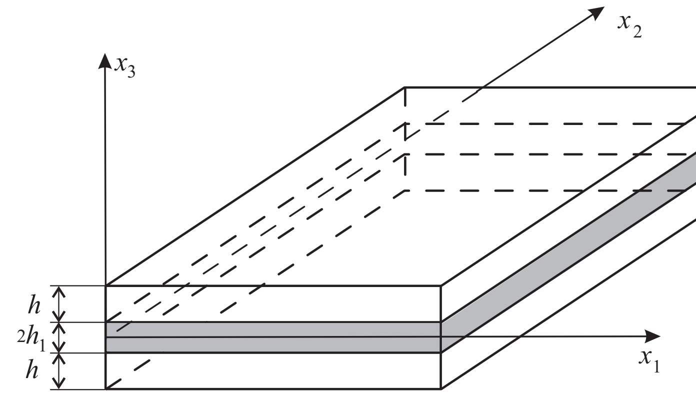

Рис. 1. Прямоугольная трехслойная пластинка

Для несжимаемого материала также необходимо рассматривать линеаризованное условие несжимаемости

$$\mathrm{tr}(\mathbf{C}_0^{-1}\nabla\mathbf{w}) = 0. \qquad (1.7)$$

Таким образом, линеаризованная задача для предварительно напряженного тела состоит из линеаризованных уравнений равновесия (1.1), в которых используются линеаризованные уравнения состояния (1.5) или (1.6), а также линеаризованное условие несжимаемости (1.7), дополненные соответствующими граничными условиями, которые здесь не приводятся.

2. Устойчивость прямоугольной трехслойной плиты

2.1. Пространственная задача

Применим полученные уравнения к случаю прямоугольной трехслойной плиты с начальными напряжениями (рис. 1).

Для определенности примем, что начальные напряжения действуют в среднем слое. Пусть плита со сторонами a и b имеет толщину $2H$, верхний и нижний слои имеют толщину h, а средний — $2h_1$, $H = h_1 + h$. Средний слой $-h_1 \leqslant x_3 \leqslant h_1$ предварительно подвергнут однородной деформации и неподвижно скреплен с верхним $h_1 \leqslant x_3 \leqslant h$ и нижним $-h \leqslant x_3 \leqslant -h_1$ слоям по плоскостям $x_3 = -h_1$, $x_3 = h_1$. Градиент деформации в преднапряженной состоянии среднего слоя с учетом условия несжимаемости имеет вид

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \beta\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + (\alpha\beta)^{-1}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3, \qquad (2.1)$$

где α и β — положительные постоянные.

После этого трехслойная плита испытывает однородную деформацию, обусловленную нормальной нагрузкой, приложенной к боковым поверхностям $x_1 = a, x_2 = b$. Плоские грани плиты $x_3 = -H$ и $x_3 = H$ свободны от внешних сил. Таким образом, невозмущенное состояние составной плиты описывается формулами

$$\mathbf{C}_0 = \lambda_1\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \lambda_2\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + (\lambda_1\lambda_2)^{-1}\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3,$$
$$h_1 \leqslant x_3 \leqslant H, \quad -H \leqslant x_3 \leqslant -h_1,$$
$$\mathbf{C}_0' = \mathbf{C}_0, \quad -h_1 \leqslant z \leqslant h_1, \qquad (2.2)$$
$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$$

В (2.1), (2.2) α, β — параметры предварительной деформации нижнего слоя, λ_1, λ_2 — постоянные кратностей удлинений в докритическом состоянии составной плиты.

Важным частным случаем невозмущенного состояния плиты является кусочно однородное состояние с собственными напряжениями. Речь идет о состоянии, возникающем после самопроизвольной деформации составного тела без приложения внешних сил. В данном случае лицевые плоскости, т. е. горизонтальные границы трехслойной плиты свободны от нагрузки. Отсутствие нагрузки на боковой поверхности плиты понимается приближенно, в осредненном по толщине смысле. Это означает, что распределенные по краю плиты погонное результирующее усилие и погонный результирующий момент тождественно равны нулю.

Невозмущенное плоское напряженное состояние плиты, обусловленное самопроизвольной деформацией, описывается формулами

$$D_1 = \mu\lambda_1 - p\lambda_1^{-1}, \quad D_2 = \mu\lambda_2 - p\lambda_2^{-1},$$

$$D_3 = \mu\lambda_1\lambda_2^{-1} - p\lambda_1\lambda_2,$$
$$D_1' = \mu_1\lambda_1\alpha^2 - p_1\lambda_1^{-1}, \quad D_2' = \mu_1\lambda_2\beta^2 - p_1\lambda_2^{-1},$$

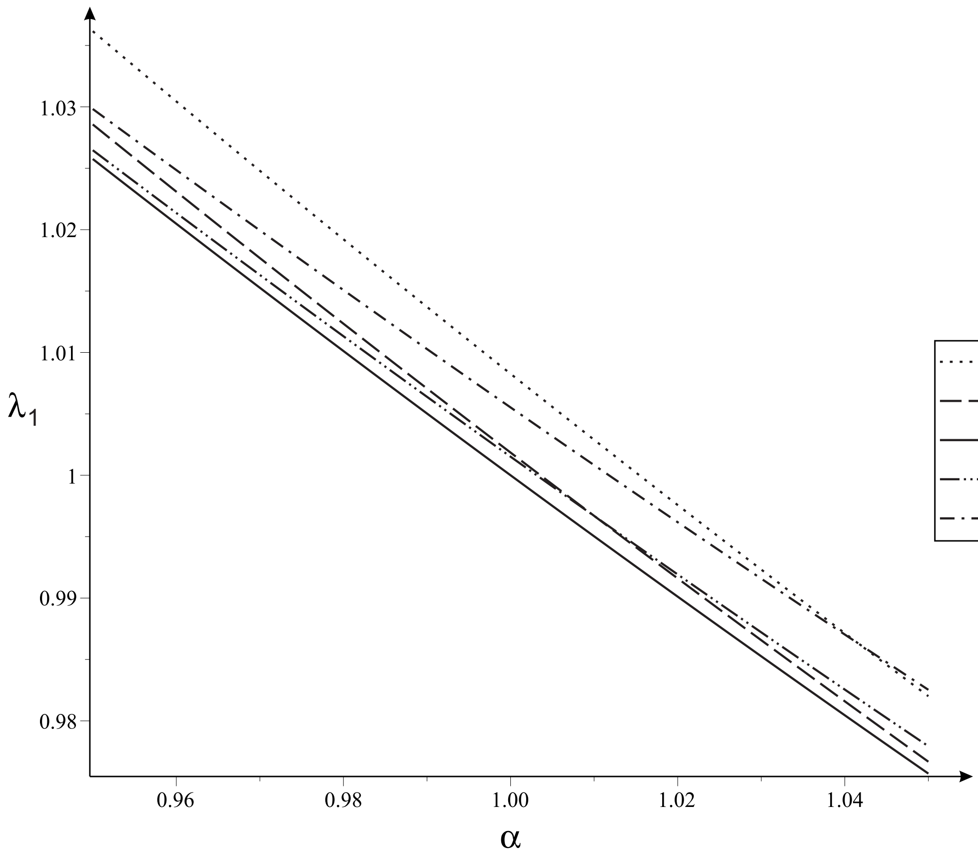

Рис. 2. Кратность удлинения плиты λ_1

$$D_3' = \mu_1\lambda_1{\lambda_2}^{-1}\alpha\beta^{-2} - p_1\lambda_1\lambda_2.$$

Здесь принято, что модуль сдвига крайних слоев μ отличается от модуля сдвига среднего слоя μ_1, а через p_1 обозначено давление в докритическом состоянии среднего слоя.

Величины p и p_1 находятся из условия равенства нулю вертикальных составляющих напряжений среднего и крайних слоев и даются выражениями $p = \mu\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}$, $p_1 = \mu_1\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\alpha^{-2}\beta^{-2}$. Параметры самопроизвольной деформации плиты находятся следующим образом:

$$\lambda_1 = \frac{(2h\mu + h_1\mu_1\beta^2)^{\frac{1}{6}}(2h\mu + h_1\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2})^{\frac{1}{6}}}{(2h\mu + h_1\mu_1\alpha^2)^{\frac{1}{3}}},$$

$$\lambda_2 = \frac{(2h\mu + h_1\mu_1\alpha^2)^{\frac{1}{6}}(2h\mu + h_1\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2})^{\frac{1}{6}}}{(2h\mu + h_1\mu_1\beta^2)^{\frac{1}{3}}}.$$

На рис. 2 и 3 построены графики кратности удлинений плиты λ_1 и λ_2 в зависимости от начальной деформации среднего слоя при фиксированных параметрах β и α, соответственно. Существенного качественного влияния на кратности удлинений вдоль осей x_1 и x_2 начальной деформации вдоль осей x_2 и x_1, соответственно, не выявлено.

В общем случае докритического состояния плиты параметры λ_1, λ_2 — произвольные положительные числа. При решении задачи устойчивости разыскиваются критические соотношения между λ_1 и λ_2, при которых линеаризованная задача имеет нетривиальные решения.

Будем разыскивать решение линеаризованной задачи в форме

$$\mathbf{w} = w_1(x_1,x_2,x_3)\mathbf{i_1} + w_2(x_1,x_2,x_3)\mathbf{i_2} + \\ + w_3(x_1,x_2,x_3)\mathbf{i_3},$$

Для каждого слоя решение разыскивается в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= W_1(x_3)\cos\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b},\\ w_2 &= W_2(x_3)\sin\frac{\pi n x_1}{a}\cos\frac{\pi m x_2}{b},\\ w_3 &= W_3(x_3)\sin\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b},\\ \dot{p} &= P(x_3)\sin\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

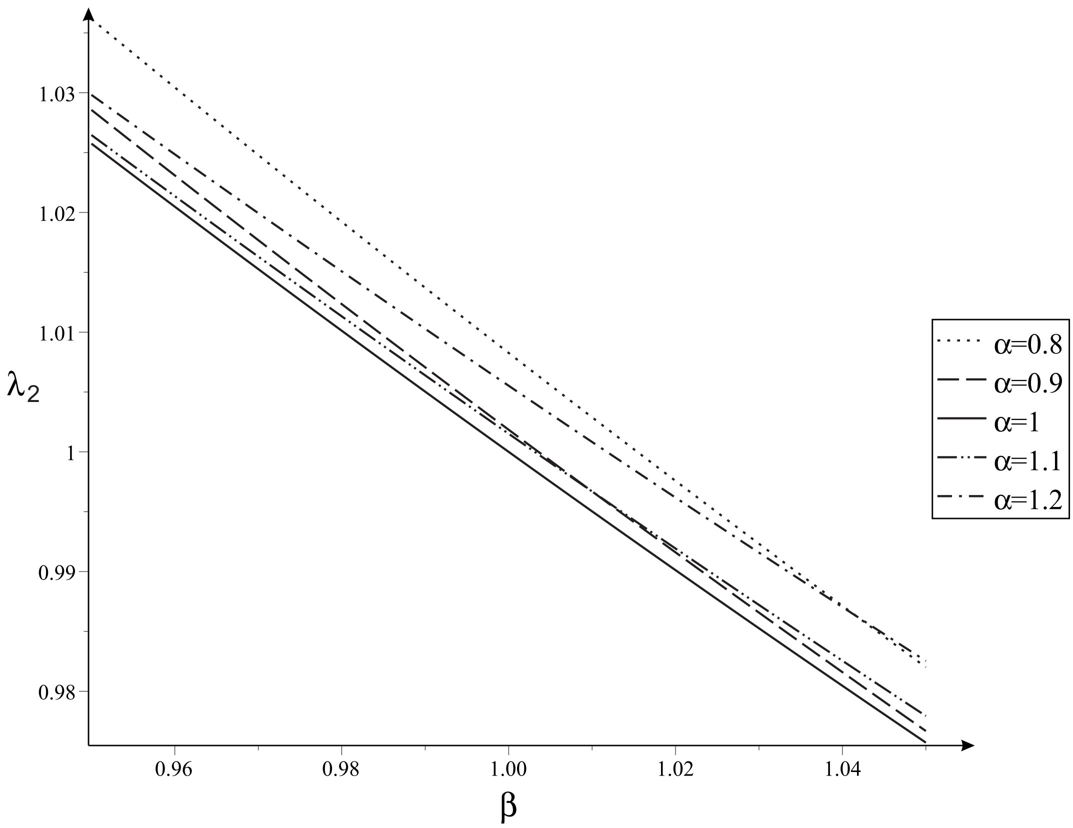

Рис. 3. Кратность удлинения плиты λ_2

Такой выбор функций (2.3) позволяет удовлетворить следующим условиям на краях плиты:

$$x_1 = 0, a: \quad w_2(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad w_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \dot{D}_{11} = 0,$$

$$x_2 = 0, b: \quad w_1(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad w_3(x_1, x_2, x_3) = 0, \quad \dot{D}_{22} = 0.$$

Граничные условия и условия сопряжения слоев даются формулами

$$\begin{aligned} z = -H: &\quad \dot{D}_{3k} = 0; \\ z = -h_1: &\quad \dot{D}'_{3k} = \dot{D}_{3k}, \quad w'_k = w_k; \\ z = h_1: &\quad \dot{D}'_{3k} = \dot{D}_{3k}, \quad w'_k = w_k; \\ z = H: &\quad \dot{D}_{3k} = 0, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

где штрихом отмечены функции, определенные в среднем слое.

При помощи (1.5)–(2.2) найдем выражения линеаризованных тензоров Пиолы для среднего и внешних слоев, соответственно

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{D}}' = &\left(\left(\mu_1\alpha^2 + p_1\lambda_1^{-2}\right) \frac{\partial w'_1}{\partial x_1} - \dot{p}'\lambda_1^{-1} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \\ &+ \left(\mu_1\alpha^2 \frac{\partial w'_2}{\partial x_1} + p_1\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \frac{\partial w'_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \\ &+ \left(\mu_1\alpha^2 \frac{\partial w'_3}{\partial x_1} + p_1\lambda_2 \frac{\partial w'_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + \\ &+ \left(\mu_1\beta^2 \frac{\partial w'_1}{\partial x_2} + p_1\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \frac{\partial w'_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \\ &+ \left(\left(\mu_1\beta^2 + p_1\lambda_2^{-2}\right) \frac{\partial w'_2}{\partial x_2} - \dot{p}'\lambda_2^{-1} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \\ &+ \left(\mu_1\beta^2 \frac{\partial w'_3}{\partial x_2} + p_1\lambda_1 \frac{\partial w'_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + \\ &+ \left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} \frac{\partial w'_1}{\partial x_3} + p_1\lambda_2 \frac{\partial w'_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \\ &+ \left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} \frac{\partial w'_2}{\partial x_3} + p_1\lambda_1 \frac{\partial w'_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + \\ &+ \Bigg(\left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} + p_1\lambda_1^2\lambda_2^2\right) \frac{\partial w'_3}{\partial x_3} - \\ &- \lambda_1\lambda_2\dot{p}' \Bigg) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$\dot{\mathbf{D}} = \left(\left(\mu + p\lambda_1^{-2}\right) \frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \dot{p}\lambda_1^{-1} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_2}{\partial x_1} + p\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_3}{\partial x_1} + p\lambda_2 \frac{\partial w_1}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_1\mathbf{i}_3 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_1}{\partial x_2} + p\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \frac{\partial w_2}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_1 + \\
+ \left(\left(\mu + p\lambda_2^{-2}\right) \frac{\partial w_2}{\partial x_2} - \dot{p}\lambda_2^{-1} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_3}{\partial x_2} + p\lambda_1 \frac{\partial w_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{i}_2\mathbf{i}_3 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_1}{\partial x_3} + p\lambda_2 \frac{\partial w_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_1 + \\
+ \left(\mu \frac{\partial w_2}{\partial x_3} + p\lambda_1 \frac{\partial w_3}{\partial x_2} \right) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_2 + \\
+ \left(\left(\mu + p\lambda_1^2\lambda_2^2\right) \frac{\partial w_3}{\partial x_3} - \lambda_1\lambda_2\dot{p} \right) \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3. \quad (2.6)$$

Далее, подставив (2.3) в (2.5) и (2.6) и полученные выражения в (1.1), получим системы линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно неизвестных функций $W_1'(x_3), W_2'(x_3), W_3'(x_3), P'(x_3)$ и $W_1(x_3), W_2(x_3), W_3(x_3), P(x_3)$ для среднего и крайних слоев, соответственно

$$-\left(\mu_1\alpha^2 + p_1\lambda_1^{-2}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_1'(x_3) - \\
- \lambda_1^{-1}\frac{\pi n}{a}P'(x_3) - \mu_1\beta^2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_1'(x_3) - \\
- p_1\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\frac{\pi n}{a}\frac{\pi m}{b}W_2'(x_3) + \\
+\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2}\frac{d^2W_1'(x_3)}{dx_3{}^2} + p_1\lambda_2\frac{\pi n}{a}\frac{dW_3'(x_3)}{dx_3} = 0,$$

$$-\mu_1\alpha^2\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_2'(x_3) - \\
- p_1\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\frac{\pi n}{a}\frac{\pi m}{b}W_1'(x_3) - \\
- \left(\mu_1\beta^2 + p_1\lambda_2^{-2}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_2'(x_3) - \\
- \lambda_2^{-1}\frac{\pi m}{b}P'(x_3) + \mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2}\frac{d^2W_2'(x_3)}{dx_3{}^2} + \\
+ p_1\lambda_1\frac{\pi m}{b}\frac{dW_3'(x_3)}{dx_3} = 0, \quad (2.7)$$

$$-\mu_1\alpha^2\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_3'(x_3) + p_1\lambda_2\frac{\pi n}{a}\frac{dW_1'(x_3)}{dx_3} - \\
- \mu_1\beta^2\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_3'(x_3) - p_1\lambda_1\frac{\pi m}{b}\frac{dW_2'(x_3)}{dx_3} + \\
+ \left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} + p_1\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{d^2W_3'(x_3)}{dx_3{}^2} - \\
- \lambda_1\lambda_2 dP'(x_3)dx_3 = 0,$$

$$-\lambda_1^{-1}\frac{\pi n}{a}W_1'(x_3) - \lambda_2^{-1}\frac{\pi m}{b}W_2'(x_3) + \\
+ \lambda_1\lambda_2 dW_3'(x_3)dx_3 = 0,$$

$$-\left(\mu + p\lambda_1^{-2}\right)\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_1(x_3) - \\
- \lambda_1^{-1}\frac{\pi n}{a}P(x_3) - \mu\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_1(x_3) - \\
- p\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\frac{\pi n}{a}\frac{\pi m}{b}W_2(x_3) + \\
+ \mu\frac{d^2W_1(x_3)}{dx_3{}^2} + p\lambda_2\frac{\pi n}{a}\frac{dW_3(x_3)}{dx_3} = 0,$$

$$-\mu\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_2(x_3) - p\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\frac{\pi n}{a}\frac{\pi m}{b}W_1(x_3) - \\
- \left(\mu + p\lambda_2^{-2}\right)\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_2(x_3) - \lambda_2^{-1}\frac{\pi m}{b}P(x_3) + \\
\mu\frac{d^2W_2(x_3)}{dx_3{}^2} + p\lambda_1\frac{\pi m}{b}\frac{dW_3(x_3)}{dx_3} = 0, \quad (2.8)$$

$$-\mu\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 W_3(x_3) + p\lambda_2\frac{\pi n}{a}\frac{dW_1(x_3)}{dx_3} - \\
- \mu\left(\frac{\pi m}{b}\right)^2 W_3(x_3)p\lambda_1\frac{\pi m}{b}\frac{dW_2(x_3)}{dx_3} + \\
+ \left(\mu + p\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{d^2W_3(x_3)}{dx_3{}^2} - \lambda_1\lambda_2\frac{dP(x_3)}{dx_3} = 0, \\
- \lambda_1^{-1}\frac{\pi n}{a}W_1(x_3) - \lambda_2^{-1}\frac{\pi m}{b}W_2(x_3) + \\
+ \lambda_1\lambda_2 dW_3(x_3)dx_3 = 0.$$

Для упрощения дальнейших вычислений сведем системы уравнений (2.7) и (2.8) к системам линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Введем для каждого слоя неизвестные функции $B_{31}(x_3), B_{32}(x_3)$ и $B_{33}(x_3)$, выражаемые через компоненты линеаризованных тензоров Пиолы

$$B_{31}'(x_3) = \frac{\dot{D}_{31}'(x_1, x_2, x_3)}{\cos\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}} = \\
= \mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2}\frac{dW_1'(x_3)}{dx_3} + p_1\lambda_2\frac{\pi n}{a}W_3'(x_3),$$

$$B'_{32}(x_3) = \frac{\dot{D}'_{32}(x_1,x_2,x_3)}{\sin\frac{\pi n x_1}{a}\cos\frac{\pi m x_2}{b}} = \\ = \mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2}\frac{dW'_2(x_3)}{dx_3} + p_1\lambda_1\frac{\pi m}{b}W'_3(x_3),$$

$$B'_{33}(x_3) = \frac{\dot{D}'_{33}(x_1,x_2,x_3)}{\sin\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}} = \\ = \left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} + p_1\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{dW'_3}{dx_3} - \lambda_1\lambda_2 P',$$

$$B_{31}(x_3) = \frac{\dot{D}_{31}(x_1,x_2,x_3)}{\cos\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}} = \\ = \mu\frac{dW_1(x_3)}{dx_3} + p\lambda_2\frac{\pi n}{a}W_3(x_3),$$

$$B_{32}(x_3) = \frac{\dot{D}_{32}(x_1,x_2,x_3)}{\sin\frac{\pi n x_1}{a}\cos\frac{\pi m x_2}{b}} = \\ = \mu\frac{dW_2(x_3)}{dx_3} + p\lambda_1\frac{\pi m}{b}W_3(x_3),$$

$$B_{33}(x_3) = \frac{\dot{D}_{33}(x_1,x_2,x_3)}{\sin\frac{\pi n x_1}{a}\sin\frac{\pi m x_2}{b}} = \\ = \left(\mu + p\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{dW_3}{dx_3} - \lambda_1\lambda_2 P.$$

Справедливы формулы

$$P'(x_3) = -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}B'_{33}(x_3) + \\ + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\left(\mu_1\alpha^{-2}\beta^{-2} + p_1\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{dW'_3}{dx_3};$$

$$P(x_3) = -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}B_{33}(x_3) + \\ + \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\left(\mu + p\lambda_1^2\lambda_2^2\right)\frac{dW_3}{dx_3}.$$

Таким образом, исключая из систем (2.7) и (2.8) добавочные давления $P'(z)$ и $P(z)$ в слоях и подставив выражения для первых производных функций перемещений, получены системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка для среднего преднапряженного слоя и крайних слоев.

$$\frac{d}{dx_3}W'_1(x_3) = \\ = \frac{\alpha^2\beta^2 B'_{31}(x_3)}{\mu_1} - \frac{\lambda_2\alpha^2\beta^2 p_1\pi n W'_3(x_3)}{\mu_1 a},$$

$$\frac{d}{dx_3}W'_2(x_3) = \frac{\alpha^2\beta^2 B'_{32}(x_3)}{\mu_1} - \\ - \frac{\lambda_1\alpha^2\beta^2 p_1\pi m W'_3(x_3)}{\mu_1 b},$$

$$\frac{d}{dx_3}W'_3(x_3) = \frac{\pi n W'_1(x_3)}{{\lambda_1}^2\lambda_2 a} + \frac{\pi m W'_2(x_3)}{\lambda_1{\lambda_2}^2 b},$$

$$\frac{d}{dx_3}B'_{31}(x_3) = \\ = \frac{\pi^2 n^2}{a^2}\left(\mu_1\alpha^2 + \frac{p_1}{{\lambda_1}^2}\right)W'_1(x_3) + \\ + \frac{\pi^2 n^2}{a^2{\lambda_1}^4{\lambda_2}^2}\left(p_1{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + \frac{\mu_1}{\alpha^2\beta^2}\right)W'_1(x_3) + \\ + \frac{\pi^2 mn}{ba\lambda_1^3\lambda_2^3}\left(p_1{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + \frac{\mu_1}{\alpha^2\beta^2}\right)W'_2(x_3) - \\ - \frac{\pi n B'_{33}(x_3)}{a{\lambda_1}^2\lambda_2} + \frac{\pi^2 m^2\mu_1\beta^2 W'_1(x_3)}{b^2} + \\ + \frac{\pi^2 m p_1 n W'_2(x_3)}{ba\lambda_1\lambda_2}, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dx_3}B'_{32}(x_3) = \\ = \frac{\pi^2 n^2\mu_1\alpha^2 W'_2(x_3)}{a^2} + \frac{\pi^2 m p_1 n W'_1(x_3)}{ba\lambda_1\lambda_2} + \\ + \frac{\pi^2 m^2}{b^2}\left(\mu_1\beta^2 + \frac{p_1}{\lambda_2^2}\right)W'_2(x_3) + \\ + \frac{\pi^2 mn}{ba\lambda_1^3\lambda_2^3}\left(p_1\lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{\mu_1}{\alpha^2\beta^2}\right)W'_1(x_3) + \\ + \frac{\pi^2 m^2}{b^2{\lambda_1}^2{\lambda_2}^4}\left(p_1{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2 + \frac{\mu_1}{\alpha^2\beta^2}\right)W'_2(x_3) - \\ - \frac{\pi m B'_{33}(x_3)}{b\lambda_1{\lambda_2}^2},$$

$$\frac{d}{dx_3}B'_{33}(x_3) = \\ = \frac{\pi^2 n^2\mu_1\alpha^2 W'_3(x_3)}{a^2} + \frac{\pi n\lambda_2 p_1\alpha^2\beta^2 B'_{31}(x_3)}{a\mu_1} + \\ + \frac{\pi^2 m^2\mu_1\beta^2 W'_3(x_3)}{b^2} + \frac{\pi m\lambda_1 p_1\alpha^2\beta^2 B'_{32}(x_3)}{b\mu_1} - \\ - \frac{{p_1}^2{\lambda_2}^2\pi^2 n^2\alpha^2\beta^2 W'_3(x_3)}{a^2\mu_1} - \\ - \frac{{p_1}^2{\lambda_1}^2\pi^2 m^2\alpha^2\beta^2 W'_3(x_3)}{b^2\mu_1},$$

$$\frac{d}{dx_3}W_1(x_3)=\frac{B_{31}(x_3)}{\mu}-\frac{\lambda_2 p\pi n W_3(x_3)}{\mu a},$$
$$\frac{d}{dx_3}W_2(x_3)=\frac{B_{32}(x_3)}{\mu}-\frac{\lambda_1 p\pi m W_3(x_3)}{\mu b},$$
$$\frac{d}{dx_3}W_3(x_3)=\frac{\pi n W_1(x_3)}{{\lambda_1}^2\lambda_2 a}+\frac{\pi m W_2(x_3)}{\lambda_1{\lambda_2}^2 b},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B_{31}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2n^2}{a^2}\left(\mu+\frac{p}{{\lambda_1}^2}\right)W_1(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2n^2}{a^2{\lambda_1}^4{\lambda_2}^2}\left(p{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2+\mu\right)W_1(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2mn}{ba{\lambda_1}^3{\lambda_2}^3}\left(p{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2+\mu\right)W_2(x_3)-\\ &-\frac{\pi n B_{33}(x_3)}{a{\lambda_1}^2\lambda_2}+\frac{\pi^2m^2\mu W_1(x_3)}{b^2}+\\ &+\frac{\pi^2mpnW_2(x_3)}{ba\lambda_1\lambda_2},\end{aligned}\tag{2.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B_{32}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2n^2\mu W_2(x_3)}{a^2}+\frac{\pi^2mpnW_1(x_3)}{ba\lambda_1\lambda_2}+\\ &+\frac{\pi^2m^2}{b^2}\left(\mu+\frac{p}{{\lambda_2}^2}\right)W_2(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2mn}{ba{\lambda_1}^3{\lambda_2}^3}\left(p{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2+\mu\right)W_1(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2m^2}{b{\lambda_1}^2{\lambda_2}^4}\left(p{\lambda_1}^2{\lambda_2}^2+\mu\right)W_2(x_3)-\frac{\pi m B_{33}(x_3)}{b\lambda_1{\lambda_2}^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B_{33}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2n^2\mu W_3(x_3)}{a^2}+\frac{\pi n\lambda_2 pB_{31}(x_3)}{a\mu}+\\ &+\frac{\pi^2m^2\mu W_3(x_3)}{b^2}+\frac{\pi m\lambda_1 pB_{32}(x_3)}{b\mu}-\\ &-\frac{p^2{\lambda_2}^2\pi^2n^2W_3(x_3)}{a^2\mu}-\frac{p^2{\lambda_1}^2\pi^2m^2W_3(x_3)}{b^2\mu}.\end{aligned}$$

2.2. Плоская задача

Рассмотрим сначала плоскую задачу об устойчивости трехслойного прямоугольного бруса. Полагаем $\alpha=1$, $\lambda_1=1$, $m=0$ и $W_1\equiv 0$. Тогда $B'_{31}(x_3)=0$, $B_{31}(x_3)=0$ и системы дифференциальных уравнений (2.9), (2.10) принимают вид

$$\frac{d}{dx_3}W'_2(x_3)=\frac{\beta^2B'_{32}(x_3)}{\mu_1}-\frac{\beta^2p_1\pi mW'_3(x_3)}{\mu_1 b},$$
$$\frac{d}{dx_3}W'_3(x_3)=\frac{\pi\, mW'_2(x_3)}{{\lambda_2}^2b},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B'_{32}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2m^2}{b^2}\left(\mu_1\beta^2+\frac{p_1}{{\lambda_2}^2}\right)W'_2(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2m^2}{b^2{\lambda_2}^4}\left(p_1{\lambda_2}^2+\frac{\mu_1}{\beta^2}\right)W'_2(x_3)-\\ &-\frac{\pi mB'_{33}(x_3)}{{\lambda_2}^2b},\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B'_{33}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2m^2\mu_1\beta^2W'_3(x_3)}{b^2}+\frac{\pi mp_1\beta^2B'_{32}(x_3)}{b\mu_1}-\\ &-\frac{{p_1}^2\pi^2m^2\beta^2W'_3(x_3)}{b^2\mu_1},\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx_3}W_2(x_3)=\frac{B_{32}(x_3)}{\mu}-\frac{p\pi\, mW_3(x_3)}{\mu b},$$
$$\frac{d}{dx_3}W_3(x_3)=\frac{\pi\, mW_2(x_3)}{{\lambda_2}^2b},$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B_{32}(x_3)&=\frac{\pi^2m^2}{b^2}\left(\mu+\frac{p}{{\lambda_2}^2}\right)W_2(x_3)+\\ &+\frac{\pi^2m^2}{b^2{\lambda_2}^4}\left(p{\lambda_2}^2+\mu\right)W_2(x_3)-\\ &-\frac{\pi mB_{33}(x_3)}{{\lambda_2}^2b},\end{aligned}\tag{2.12}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx_3}B_{33}(x_3)&=\\ &=\frac{\pi^2m^2\mu W_3(x_3)}{b^2}+\frac{\pi mpB_{32}(x_3)}{b\mu}-\\ &-\frac{p^2\pi^2m^2W_3(x_3)}{b^2\mu}.\end{aligned}$$

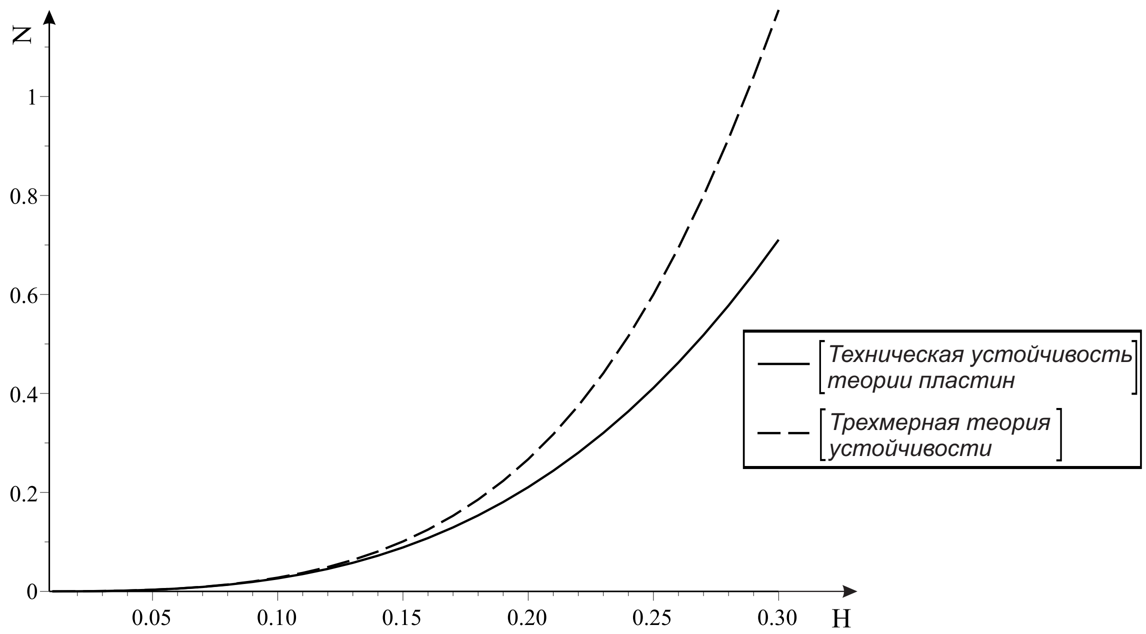

Рис. 4. Сравнение критических усилий

3. Результаты расчетов

3.1. Плоская задача

В качестве тестового примера рассмотрена однослойная пластинка. Под критическим усилием понимается величина

$$N = \int\limits_{-H}^{H} D_2 dx_3.$$

На рис. 4 построены критические усилия от толщины однослойной пластинки. Сплошной линией обозначено усилие, найденное в рамках прикладной теории устойчивости тонких пластинок [5], пунктирной линией обозначено усилие, построенное по методу, описанному выше. По графику видно, что для пластин малой толщины наблюдается хорошее совпадение результатов. При увеличении толщины пластинки наблюдаются более существенные расхождения величин критических усилий.

На рис. 5 показаны критические усилия трехслойного бруса с предварительно напряженным слоем при различных параметрах начальной деформации β в зависимости от полутолщины бруса H. По графику видно, что предварительно растянутый средний слой увеличивает абсолютное значение критического усилия, а предварительно сжатый наоборот — уменьшает.

Потеря устойчивости может возникать и без приложения внешней нагрузки, в результате самопроизвольной деформации, обусловленной предварительным сжатием среднего слоя, например, при $\beta = 0{,}984$ и полутолщине $H = 0{,}05$.

3.2. Пространственная задача

Под усилиями понимаются величины

$$N_k = \int\limits_{-H}^{H} D_k dx_3.$$

Кривые усилий строятся по значениям кратности удлинения плиты, удовлетворяющих критическому соотношению между λ_1 и λ_2, при которых полная система линейных уравнений для составной плиты, образованной из дифференциальных уравнений (2.9), (2.10) и граничных условий, (2.4) имеет нетривиальные решения.

На рис. 6 сравниваются критические кривые усилий трехслойной плиты для различных мод выпучивания m, n с критической кривой усилий однородной плиты в зависимости от полутолщины плиты H. Средний слой предварительно сжат в двух направлениях при значениях параметров начальной

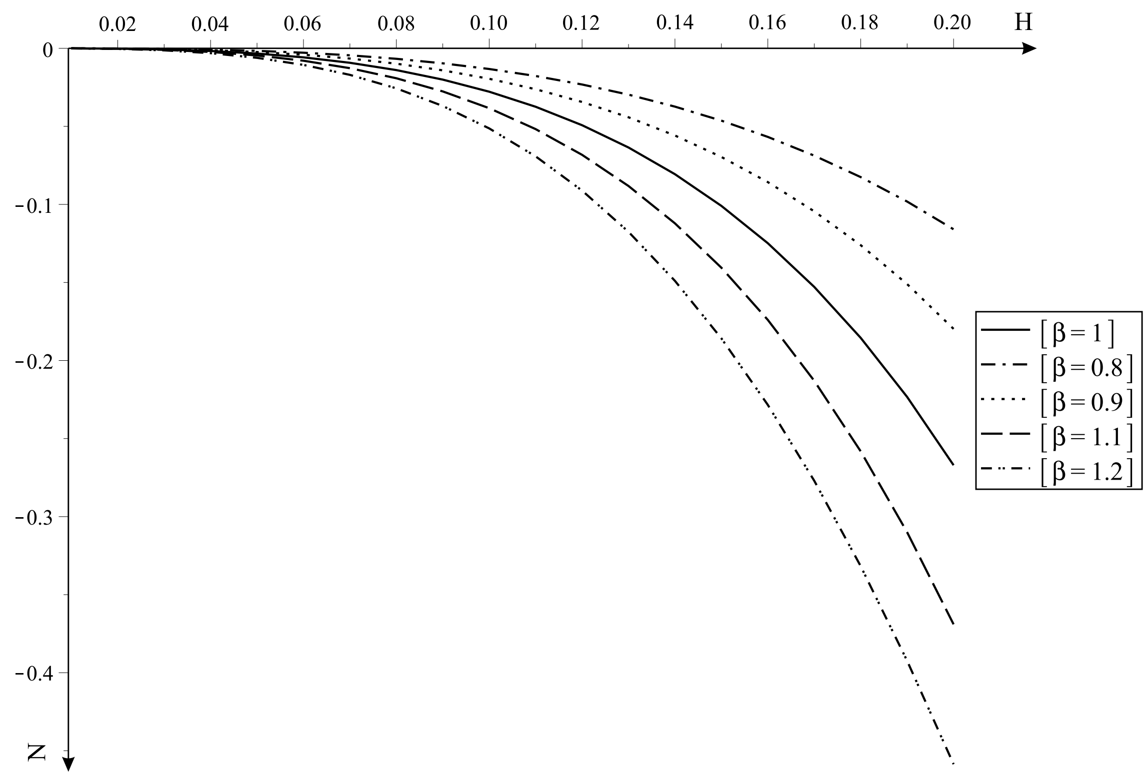

Рис. 5. Зависимость критических усилий от полутолщины плиты H

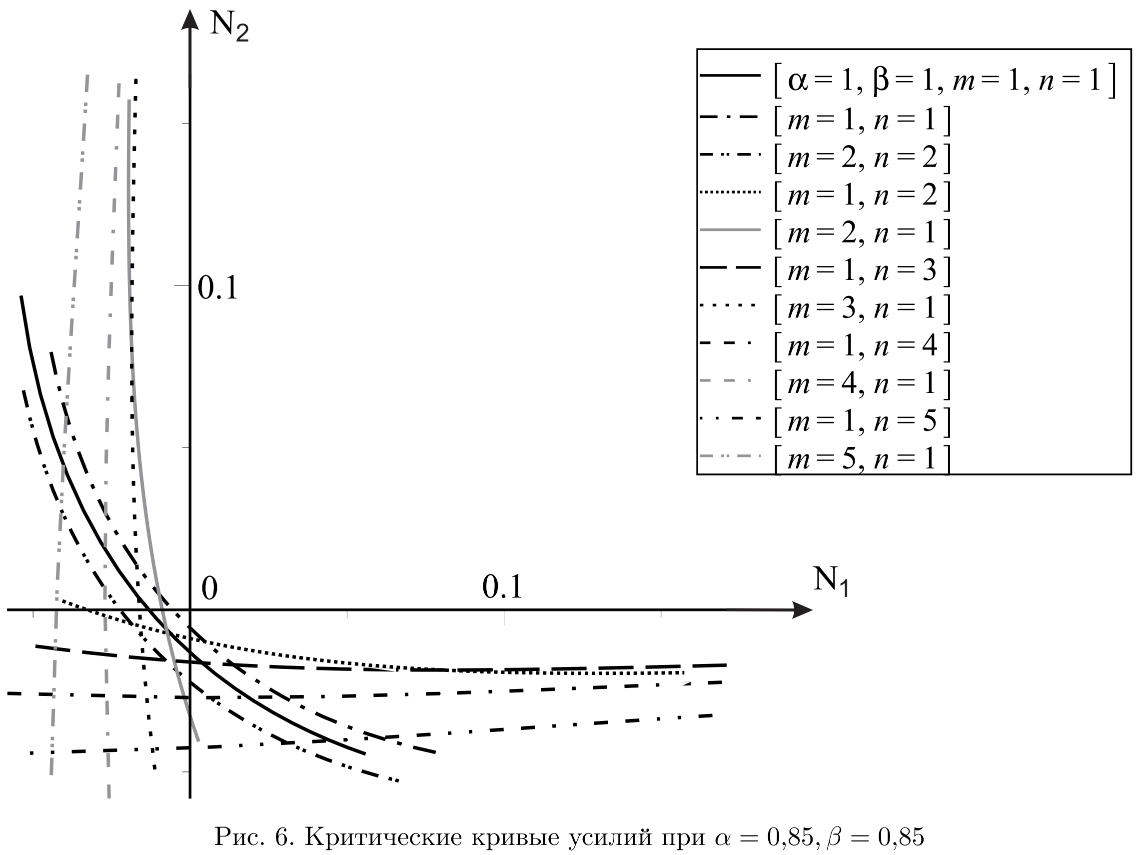

Рис. 6. Критические кривые усилий при $\alpha = 0{,}85, \beta = 0{,}85$

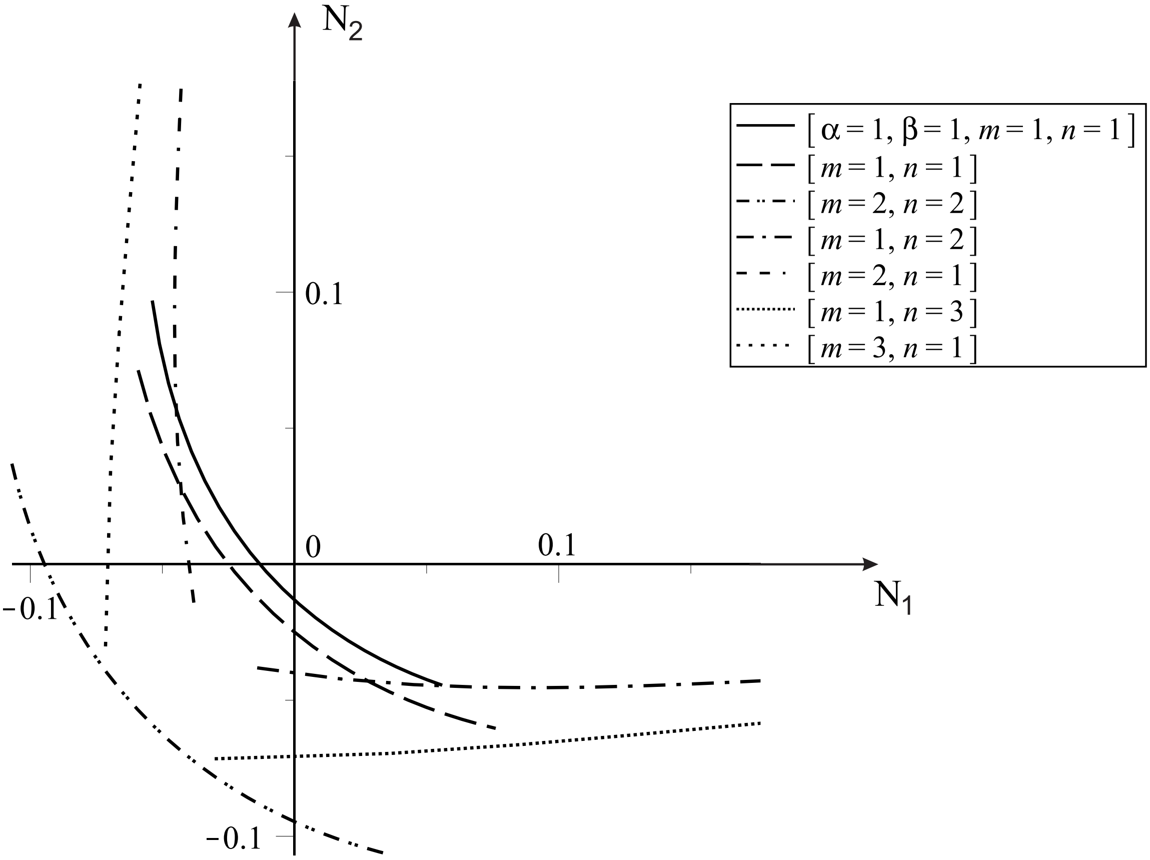

Рис. 7. Критические кривые усилий при $\alpha = 1{,}15, \beta = 1{,}15$.

деформации $\alpha = 0{,}85$, $\beta = 0{,}85$. Из рисунка видно, что минимальное абсолютное значение критического усилия достигается в точке на кривой, для которой $m = 1$, $n = 1$, при равномерном сжатии трехслойной плиты в двух перпендикулярных направлениях.

На рис. 7 сравниваются критические кривые усилий трехслойной плиты для различных мод выпучивания m, n с критической кривой усилий однородной плиты в зависимости от полутолщины плиты H. Средний слой предварительно растянут в двух направлениях при значениях параметров начальной деформации $\alpha = 1{,}15$, $\beta = 1{,}15$. По рисунку видно, что минимальное абсолютное значение критического усилия достигается в точке на кривой, соответствующей однородной плите, при равномерном сжатии трехслойной плиты в двух перпендикулярных направлениях. Таким образом, потеря устойчивости плиты с предварительно растянутым в двух направлениях средним слоем, в отличие от плиты с предварительно сжатым средним слоем, наступает при больших значениях сжимающих усилий, по сравнению с однослойной плитой.

Из расположения кривых на рис. 6 и рис. 7 можно сделать вывод, что предварительно растянутый в двух направлениях средний слой увеличивает абсолютные значения критических усилий, а предварительно сжатый в двух направлениях средний слой уменьшает.

Литература

1. *Truesdell C., Noll W.* The non-linear field theories of mechanics. Berlin: Springer-Verlag, 2004. 602 p.
2. *Truesdell C.* A first course in rational continuum mechanics. 2ed., Academic Press, 1991.
3. *Лурье А. И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1990. 512 с.
4. *Zubov L. M.* Buckling of plates made of neo-hookean material in the case of affine initial deformation // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1970. Vol. 34. Iss. 4. P. 632–642.
5. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

References

1. Truesdell C., Noll W. *The non-linear field theories of mechanics.* Berlin, Springer-Verlag, 2004, 602 p.
2. Truesdell C. *A first course in rational continuum mechanics.* 2ed., Academic Press, 1991.
3. Lurie A. I. *Nelinejnaja teorija ustojchivosti* [Nonlinear Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1990. 512 p. (In Russian)
4. Zubov L. M. Buckling of plates made of neohookean material in the case of affine initial deformation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1970, vol. 34, no. 4, pp. 632–642.
5. Vol'mir A. S. *Ustojchivost' deformiruemyh sistem* [Stability of deformable systems]. Moscow, Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russian)

Статья поступила 25 февраля 2015 г.