УДК 539.3

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД В ПРОБЛЕМЕ ОЦЕНКИ КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В РАЗЛОМАХ ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТ

Бабешко О. М.

TOPOLOGICAL METHOD IN THE PROBLEM OF ESTIMATING THE CONCENTRATION OF STRESSES IN THE FAULTS OF LITHOSPHERIC PLATES

Babeshko O. M.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. A static boundary about the interaction of lithospheric plates, contacting at a fault and locating on a deformable foundation is considered. The problem is reduced to the research and solution of the system of Wiener–Hopf functional equations, the exact solution of which is obtained recently. The boundary value problem was reduced to functional equations transformed to pseudo differential equations applying the topological method. The factorization of the matrix-functions were made and the exterior forms were used to calculate the Lere residue. The solving of the Wiener and Hopf equations were performed and the asymptotic behavior of the solutions were received. As a result of researches, it is shown that unlimited stress concentration occurs under certain conditions of the interaction nature between the ends of lithospheric plates to each other and the external environment in the fault zone.

Keywords: localization, stress-strain state, factorization, topology, boundary-value problems, differential equations, exterior forms

1. Развивается метод исследования скрытых дефектов в покрытиях, обобщающий топологический подход в динамических граничных задачах [1, 2] на случай статических задач. Исследуется напряженно-деформированное состояние блочной структуры, состоящей из горизонтально расположенных разнотипных блоков — литосферных плит, контактирующих по границам между собой. Эта блочная структура расположена на поверхности трехмерной линейно-деформируемой подложки. Рассматриваемые литосферные плиты находятся под вертикальным статическим внешним воздействием. Такое состояние свойственно литосферным плитам, а также наноматериалам и изделиям из конструкционных материалов. Исследование напряженно-деформированного состояния литосферных плит в статическом режиме позволяет получать информацию о характере сейсмичности территорий. Топологический подход дает возможность одновременно рассматривать тела с покрытиями, имеющими скрытые дефекты, не наблюдаемые визуально, в отличие, например, от рассмотренных в [3]. На примере блочной структуры, состоящей из двух разнотипных литосферных плит в форме полуплоскостей, контактирующих на трехмерной деформируемой подложке, рассмотрен случай существования скрытого дефекта, предшествующего разрушению в зоне разлома. Заметим, что статический случай не удается получить из решения аналогичной граничной задачи о гармонических колебаниях простым предельным переходом к исчезающей частоте колебания [1]. С помощью исследования статических задач для таких литосферных плит с разломами можно выявлять нарастание сейсмичности в районах с повышенной сейсмоопасностью, а также ситуации, при соответствующих условиях способствующие протеканию «тихих землетрясений». Детальный анализ подхода вы-

---

Бабешко Ольга Мефодьевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 13-01-12003-м, 13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 13-01-96509, 15-01-01379, 15-08-01377), гранта Президента РФ НШ-1245.2014.1, Программ Президиума РАН № 3 и № 43.

полнен для важного в приложениях случая контакта двух литосферных плит в виде полуплоскостей, наиболее часто встречающихся в сейсмоопасных территориях.

2. Не вдаваясь в детали топологического решения граничных задач и факторизационных подходов, изложенных в [1, 2, 4–9], приведем определяющие уравнения для блочной структуры, состоящей из двумерных фрагментов покрытия на трехмерной подложке, сохранив обозначения работ [1, 2]. Уравнение Кирхгофа для некоторого блока b покрытия, $b = 1, 2, \ldots, B$, занимающего область Ω_b с границей $\partial\Omega_b$, при вертикальных статических воздействиях напряжением t_{3b} имеет вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} - \varepsilon_{5b}(g_{3b} + t_{3b}) \equiv \\ \equiv \varepsilon_{3b}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right)u_{3b} - \\ - \varepsilon_{5b}(g_{3b} + t_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right)u_{3b} - \varepsilon_{5b}g_{3b} = \varepsilon_{5b}t_{3b},$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \\ \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \varepsilon_{3b}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b}, \\ b = 1{,}2, \ldots, B.$$

Здесь u_{3b} — амплитуда вертикальных перемещений пластины

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1 - \nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1 + \nu_b),$$

$$\varepsilon_{3b} = \frac{h_b^2}{12}, \quad \varepsilon_{5b} = \frac{1 - \nu_b^2}{E_b h_b}.$$

Для пластин приняты следующие обозначения: ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h — толщина, g_{3b}, t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b; $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

В локальной системе координат $x_1x_2x_3$ с плоскостью x_1x_2, совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3, направленной по нормали к пластине, осью ox_1, направленной по касательной к границе разлома, осью ox_2 — по нормали к его границе, граничные условия могут быть заданы любыми двумя из представленных ниже четырех соотношений, а именно:
в виде вертикального перемещения на границе

$$u_{3b} = f_1(\partial\Omega_b); \tag{1}$$

поворота срединной плоскости вокруг оси x_1,

$$\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} = f_2(\partial\Omega_b); \tag{2}$$

момента изгиба на границе

$$M = -D\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2}\right) = f_{3b}(\partial\Omega_b), \\ D = \frac{Eh^2}{12(1 - \nu^2)}; \tag{3}$$

перерезывающей силы на границе

$$Q = -D\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b). \tag{4}$$

Соотношения между напряжениями на поверхности слоистой среды g_{kb}, $k = 1, 2, 3$ и перемещениями u_k, $k = 1, 2, 3$, имеют вид

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3)G(\alpha_1, \alpha_2)\times \\ \times e^{-i\langle\alpha, x\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2, \tag{5}$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2{,}0) = O(A^{-1}), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \to \infty.$$

$K\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3\right)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k, в частности, мероморфная. Многочисленные примеры для K приведены в [10–13].

В случае двух пластин, контактирующих вдоль оси ox_1, наделим параметры левой от оси пластины индексом λ, а правой — индексом r. Тогда функциональное уравнение граничной задачи для левой полуплоскости можно представить в виде

$$R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3\lambda} \equiv \varepsilon_{3\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3\lambda} = \\ = -\int_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda + S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{6}$$

$$S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(g_{3\lambda} + t_{3\lambda}).$$

Аналогично для правой полуплоскости

$$R_r(-i\alpha_1,-i\alpha_2)U_{3r}\equiv\varepsilon_{3r}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2U_{3r}= \\ =-\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r+S_{3r}(\alpha_1,\alpha_2),\quad (7)$$

$$S_{3r}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(g_{3r}+t_{3r}).$$

Здесь ω_b — участвующая в представлении внешняя форма, имеющая вид

$$\omega_b=\varepsilon_{3b}e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_2^3}-i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_2^2}-\alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_2^3u_{3b}+2\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}-2i\alpha_2\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}\Bigg]dx_1+ \\ +\Bigg[\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^3}-i\alpha_1\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}-\alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1}+i\alpha_1^3u_{3b}\Bigg]dx_2\Bigg\},$$

Приняв обозначения работ [1, 2], вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи с учетом принятых обозначений можем представить для левой полуплоскости в виде

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_\lambda^{-1}M_\lambda-D_\lambda^{-1}Q_\lambda- \\ -(\alpha_{2-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}dx_1+ \\ +\varepsilon_{5\lambda}S_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0,$$

$$\alpha_{2-}=-i\sqrt{\alpha_1^2},\quad \xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{iD_\lambda^{-1}M_\lambda-2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right]u_{3\lambda}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}dx_1+ \\ +\varepsilon_{5\lambda}S'_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-})\Bigg\rangle=0,$$

$$\xi_1^\lambda\in\partial\Omega_\lambda.$$

Соответственно для правой

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{i\alpha_{2+}D_r^{-1}M_r-D_r^{-1}Q_r- \\ -(\alpha_{2+}^2+\nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}dx_1+ \\ +\varepsilon_{5r}S_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+})\Bigg\rangle=0,$$

$$\alpha_{2+}=i\sqrt{\alpha_1^2},\quad \xi_1^r\in\partial\Omega_r,$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{iD_r^{-1}M_r-2\alpha_{2+}\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2}+ \\ +i\left[3\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right]u_{3r}\Bigg\}e^{i\alpha_1x_1}dx_1+ \\ +\varepsilon_{5r}S'_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+})\Bigg\rangle=0,$$

$$\xi_1^r\in\partial\Omega_r.$$

Производная вычисляется по параметру α_2. Основываясь на (1)–(4), введем следующую систему обозначений:

$$\mathbf{Y}_\lambda=\{y_{1\lambda},y_{2\lambda}\},\quad \mathbf{Z}_\lambda=\{z_{1\lambda},z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_r=\{y_{1r},y_{2r}\},\quad \mathbf{Z}_r=\{z_{1r},z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1g=\mathbf{F}_1(\alpha_1)g,\quad \mathbf{F}_2g=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)g,$$

$$y_{1\lambda}=D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1M_\lambda,\quad y_{2\lambda}=D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1Q_\lambda,$$

$$y_{1r}=D_r^{-1}\mathbf{F}_1M_r,\quad y_{2r}=D_r^{-1}\mathbf{F}_1Q_r,$$

$$z_{1\lambda}=\mathbf{F}_1\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda},\quad z_{2\lambda}=\mathbf{F}_1u_\lambda,$$

$$z_{1r}=\mathbf{F}_1\frac{\partial u_r}{\partial x_2^r},\quad z_{2r}=\mathbf{F}_1u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda=\{k_{1\lambda},k_{2\lambda}\},\quad \mathbf{K}_\mathbf{r}=\{k_{1r},k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda}=\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21-})(g_\lambda+t_\lambda)=\varepsilon_{5\lambda}S_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-}),$$

$$k_{2\lambda}=\varepsilon_{5\lambda}S'_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2-}),$$

$$k_{1r}=\varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_{21+})(g_r+t_r)=\varepsilon_{5r}S_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+}),$$

$$k_{2r}=\varepsilon_{5r}S'_{3r}(\alpha_1,\alpha_{2+}).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в матричной форме

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda+\mathbf{B}_\lambda\mathbf{Z}_\lambda+\mathbf{K}_\lambda=0,\\ \mathbf{A}_r\mathbf{Y}_r+\mathbf{B}_r\mathbf{Z}_r+\mathbf{K}_r=0,\end{aligned} \tag{8}$$

$$\mathbf{A}_\lambda=\begin{pmatrix}a_{11\lambda} & a_{12\lambda}\\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_\lambda=\begin{pmatrix}b_{11\lambda} & b_{12\lambda}\\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r=\begin{pmatrix}a_{11r} & a_{12r}\\ a_{21r} & a_{22r}\end{pmatrix},\quad \mathbf{B}_r=\begin{pmatrix}b_{11r} & b_{12r}\\ b_{21r} & b_{22r}\end{pmatrix},$$

$$a_{11\lambda}=-i\alpha_{2-},\quad a_{12\lambda}=1,$$

$$a_{21\lambda}=-i,\quad a_{22\lambda}=0,$$

$$b_{11\lambda}=(\alpha_{2-}^2+\nu_\lambda\alpha_1^2),$$

$$b_{12\lambda}=-i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21\lambda}=2\alpha_{2-},$$

$$b_{22\lambda}=-i\left[3\alpha_{2-}^2+(2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$a_{11r}=-i\alpha_{2+},\quad a_{12r}=1,$$

$$a_{21r}=-i,\quad a_{22r}=0,$$

$$b_{11r}=(\alpha_{2+}^2+\nu_r\alpha_1^2),$$

$$b_{12r}=-i\alpha_{2+}\left[\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21r}=2\alpha_{2+},$$

$$b_{22r}=-i\left[3\alpha_{2+}^2+(2-\nu_r)\alpha_1^2\right].$$

Решив эти псевдодифференциальные уравнения для избранной граничной задачи и внеся найденные неизвестные во внешние формы в (6), (7), преобразование Фурье решения для пластин можно представить для левой полуплоскости ($b=\lambda$) и для правой ($b=r$) в однотипном виде

$$U_{3b}=[R_b(-i\alpha_{1b},-i\alpha_{2b})]^{-1}\times \\ \times\left\langle-\int_{\partial\Omega_b}\omega_b+\varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(g_{3b}+t_{3b})\right\rangle.$$

Дальнейшее использование этого представления для сопряжения с подложкой детально описано в [1, 2] и применено ниже. Заметим, что это исследование требует привлечения различных вариантов интегрального метода факторизации [14–16].

Топологический метод решения граничных задач обладает важным достоинством, состоящим в охвате всех типов граничных условий, допускаемых рассматриваемой граничной задачей. Данный метод также дает возможность однотипно исследовать различные граничные задачи. Последнее позволяет наглядно сопоставлять решения этих задач, что показано ниже. Рассмотрим некоторые примеры треснувших покрытий. При отсутствии дефекта напряжения и перемещения берегов трещины обязаны совпадать. Изучим тот случай, когда дефект представляет свободные от напряжений края трещины, то есть $\mathbf{Y}_\lambda=\mathbf{Y}_r=0$. Тогда из системы (8) находим

$$\mathbf{Z}_\lambda=-\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda,\quad \mathbf{Z}_r=-\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r. \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Z}_\lambda=\mathbf{Z}_r$, и $y_{1\lambda}=y_{1r}=0$. Тогда, решение дается соотношениями

$$\begin{gathered}\mathbf{Y}_{\lambda r}=-\mathbf{C}_{\lambda r}^{-1}(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda-\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r),\\ \mathbf{C}_\lambda=\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda,\quad \mathbf{C}_r=\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r,\\ \mathbf{C}_{\lambda r}=\begin{pmatrix}c_{12\lambda} & -c_{12r}\\ c_{22\lambda} & -c_{22r}\end{pmatrix},\\ \mathbf{Y}_{\lambda r}=\{y_{2\lambda},y_{2r}\},\quad \mathbf{Y}_\lambda=\{0,y_{2\lambda}\},\\ \mathbf{Y}_r=\{0,y_{2r}\},\\ \mathbf{Z}_\lambda=-\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda--\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda.\end{gathered} \tag{10}$$

Этот случай можно отнести к категории наличия скрытого дефекта, не наблюдаемого визуально, поскольку перемещения и углы поворота пластин на дефекте непрерывны. Тем не менее имеет место нарушение связности для компоненты напряжений, что свидетельствует о присутствии дефекта.

Подобные примеры различных типов дефектов, трещин или разломов можно продолжить. Чтобы понять возможную причину разрушения покрытия в исследуемом месте, целесообразно изучить вариант отсутствия дефекта и определить напряженно-деформированное состояние в этом случае. Тогда надо принять $\mathbf{Y}_\lambda=\mathbf{Y}_r$, $\mathbf{Z}_\lambda=\mathbf{Z}_r$. В результате имеем из (8)

$$\mathbf{Y}_\lambda=(\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{B}_\lambda-\mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{B}_r)\times \\ \times(\mathbf{A}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda-\mathbf{A}_r^{-1}\mathbf{K}_r), \tag{11}$$

$$\mathbf{Z}_\lambda=(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda-\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r)\times \\ \times(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda-\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r).$$

Таким образом, из приведенных примеров видно, что топологический метод для данного типа граничных задач удобен и единообразно позволяет исследовать задачи как с дефектами всех типов, так и при их отсутствии.

Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и для каждого блока, внеся в них соответствующие граничные условия и решив извлеченные из псевдодифференциальных уравнений интегральные уравнения, получим из (6), (7) вид решений в каждом блоке, представляющем полуплоскости,

$$u_{3\lambda} = \mathbf{F}_2^{-1} \left[R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda) \right\rangle, \quad (12)$$

$$u_{3r} = \mathbf{F}_2^{-1} \left[R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(g_r + t_r) \right\rangle.$$

3. Представим соотношение (5) при $x_3 = 0$ в виде

$$\mathbf{P}_\lambda u_3(x_1, x_2{,}0) + \mathbf{P}_r u_3(x_1, x_2{,}0) = \\ = \mathbf{F_2^{-1}} K(\alpha_1, \alpha_2{,}0) \times \\ \times \left[G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)\right], \quad (13)$$

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_\lambda g(x_1, x_2), \\ G_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 \mathbf{P}_r g(x_1, x_2).$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$ — проекторы на левую и правую полуплоскости, являющиеся носителями соответствующих плит. Внося соотношения (14) в левые части (13) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$\left[R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}(G_\lambda + T_\lambda) \right\rangle + \\ + \left[R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}(G_r + T_r) \right\rangle - \\ - K(\alpha_1, \alpha_2{,}0) \left[G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)\right] = 0,$$

$$T_\lambda = \mathbf{F}_2 t_\lambda(x_1, x_2), \quad T_r = \mathbf{F}_2 t_r(x_1, x_2).$$

Функции $G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2)$, $G_r(\alpha_1, \alpha_2)$, как преобразования Фурье функций с носителями в полуплоскостях, являются регулярными функциями параметра α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можем обозначить

$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = G_-(\alpha_1, \alpha_2), \\ G_r(\alpha_1, \alpha_2) = G_+(\alpha_1, \alpha_2).$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к матричному функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида:

$$\mathbf{M}\mathbf{G}_+ = \mathbf{G}_- + \mathbf{V},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2, \quad \mathbf{K}_2 = \varepsilon_{5r}\mathbf{R}_r^{-1} - \mathbf{K}, \\ \mathbf{K}_1 = \mathbf{K} - \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{R}_\lambda^{-1}, \quad (14)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_1^{-1}\left(\mathbf{R}_\lambda^{-1} \int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \mathbf{R}_r^{-1} \int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r - \\ - \varepsilon_\lambda \mathbf{R}_\lambda^{-1}\mathbf{T}_\lambda - \varepsilon_r \mathbf{R}_r^{-1}\mathbf{T}_r\right).$$

Изучение последнего эквивалентно исследованию следующей системы интегральных уравнений Винера–Хопфа:

$$\int\limits_0^\infty \mathbf{m}(x - \xi)\mathbf{g}(\xi)d\xi = \mathbf{v}^+(x),$$

$$\mathbf{m}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{M}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

$$\mathbf{v}^+(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha, \quad x \geqslant 0.$$

Решение функционального уравнения (14) не представляет сложности.

Способы построения его точных или приближенных решений можно найти в работах [10–15]. Одновременно заметим, что наличие интегрального уравнения Винера-Хопфа позволяет осуществлять локализацию его решений в заданной форме [15]. Это обстоятельство позволяет утверждать, что при соотношениях локализации, которые могут сфомироваться в реальных условиях, могут иметь место опасности сейсмических событий. Ниже приводится один из результатов этого исследования. Решение интегрального уравненяможет быть записано в форме

$$G_+ = M_+^{-1}\left\{M_-^{-1}V\right\}^+,$$

$$G_- = -M_-\left\{M_-^{-1}V\right\}^-,$$

$$M = M_+M_-,$$

$$M_-^{-1}V = \left\{M_-^{-1}V\right\}^+ + \left\{M_-^{-1}V\right\}^-.$$

Здесь приняты обозначения работы [11].

Построенные таким образом решения обладают следующей структурой:

$$\begin{aligned} G_+(\alpha_1,\alpha_2) = C_{1+}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})+ \\ + C_{2+}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})+ \\ + C_{3+}(\alpha_1,\alpha_2)G_+'(\alpha_1,\alpha_{2+})+ \\ + C_{4+}(\alpha_1,\alpha_2)G_-'(\alpha_1,\alpha_{2-})+ \\ + C_{5+}(\alpha_1,\alpha_2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} G_-(\alpha_1,\alpha_2) = C_{1-}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})+ \\ + C_{2-}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})+ \\ + C_{1-}(\alpha_1,\alpha_2)G_+'(\alpha_1,\alpha_{2+})+ \\ + C_{2-}(\alpha_1,\alpha_2)G_-'(\alpha_1,\alpha_{2-}) + C_{3-}(\alpha_1,\alpha_2). \end{aligned}$$

Способ решения системы уравнений подробно описан в [2] и здесь не повторяется. Внесение найденных решений в соотношения (9)–(11), в зависимости от поставленной граничной задачи, с последующим использованием соотношений (15), (14) дает возможность полностью определить напряженно-деформированное состояние покрытия с любым из рассматриваемых дефектов или без них.

Осуществив обращение построенной таким образом системы алгебраических уравнений и исследовав свойства ее решений, вносим полученные значения в выражения (15). Это позволяет провести анализ контактных напряжений в зоне разлома. Следуя [15] и опуская детали, приведем один из результатов исследования. Справедлива следующая теорема.

Теорема. Существуют некоторые соотношения между параметрами сред покрытий, подложки, а также значениями внешних воздействий, при которых в зоне разлома литосферных плит возникает концентрация контактных напряжений, описываемая выражением

$$g_b(x_1,x_2) = \sigma_b(x_1,x_2)\ln|x_2|\,[1+o(1)],$$

$$b = \lambda, r, \quad x_2 \to 0.$$

Здесь функции $\sigma_b(x_1,x_2)$ являются ограниченными. Таким образом, установлена возможность локализации контактных напряжений в зоне разлома при некоторых значениях параметров граничной задачи.

Литература

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Топологические методы в теории скрытых дефектов и некоторые аномалии // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 650–655.
2. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* О разнотипных покрытиях с дефектами в статических задачах сейсмологии и наноматериалах. // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 41–45.
3. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 767–770.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 163–167.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
7. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
10. *Бабешко В. А. Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* Метод фиктивного поглощения в зада-

чах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.

11. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., Наука, 1979. 320 с.
12. *Бабешко В. А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1293–1296.
13. *Бабешко В. А.* Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // ПММ. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 505–512.
14. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1094–1097.
15. *Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Grishenko D. V.* Localization in Mechanics and Nature. Proceedings of the XLI Summer School-Conference “Advanced problems in mechanics”, St. Petersburg, June 30 – July 5, 2014. P. 209–216.
16. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.

References

1. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. *Topologicheskie metody v teorii skrytykh defektov i nekotorye anomalii* [Topological methods in the theory of hidden defects and some anomalies]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no. 6. S. 650–655. (In Russian)
2. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. O raznotipnykh pokrytiyakh s defektami v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialakh [About different types of coatings with defects in static problems of seismology and nanomaterials]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 6, pp. 41–45. (In Russian)
3. Babeshko V. A., Pavlova A. V., Ratner S. V., Vil'yams R. K resheniyu zadachi o vibratsii uprugogo tela, soderzhashchego sistemu vnutrennikh polostey treshchin [To solve the problem of vibration of an elastic body containing internal cavities cracks]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2002, vol. 382, no. 5, pp. 625–628. (In Russian)
4. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii v kraevykh zadachakh v neogranichennykh oblastyakh [Method of factorization in boundary value problems in unbounded domains]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2003, vol. 392, no. 6, pp. 767–770. (In Russian)
5. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matrits-funktsiy [Formula some factorization of meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)
6. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii resheniya nekotorykh kraevykh zadach [Method of factorization of the solution of some boundary value problems]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2003, vol. 389, no. 2, pp. 184–188. (In Russian)
7. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Ob avtomorfizme i psevdodifferentsial'nykh uravneniyakh v metode blochnogo elementa [About the automorphism and pseudo-differential equations in method block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 5, pp. 623–625. (In Russian)
8. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. K probleme issledovaniya materialov s pokrytiyami [The problem of research of materials with coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 1, pp. 49–52. (In Russian)
9. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. K probleme otsenki sostoyaniya materialov s pokrytiyami [The problem of assessing the condition of coated materials]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2006, vol. 409, no. 4, pp. 481–485. (In Russian)
10. Babeshko V. A. Belyankova T. I., Kalinchuk V. V. Metod fiktivnogo pogloshcheniya v zadachakh teorii uprugosti dlya neodnorodnogo poluprostranstva [The method of fictitious absorption in the problems of elasticity theory for nonhomogeneous half-space]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2002, vol. 66, Iss. 2, pp. 276–284.
11. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
12. Babeshko V. A. O sistemakh integral'nykh uravneniy dinamicheskikh kontaktnykh zadach [About the systems of integral equations of dynamic contact problems]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 220, no. 6, pp. 1293–1296. (In Russian)
13. Babeshko V. A. Staticheskie i dinamicheskie kontaktnye zadachi so stsepleniem [Static and dynamic contact problems with adhesion]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1975, vol. 39,

iss. 3, pp. 505–512. (In Russian)

14. Babeshko V. A. Faktorizatsiya odnogo klassa matrits-funktsiy i ee prilozheniya [Factorization of a class of matrix functions and its applications]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 223, no. 5, pp. 1094–1097. (In Russian)
15. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Grishenko D. V. Localization in mechanics and nature. *Proc. of the XLI Summer School-Conference "Advanced problems in mechanics", St. Petersburg, June 30 – July 5*, 2014, pp. 209–216.
16. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. *Ob odnoy faktorizatsionnoy zadache Gil'berta–Vinera i metode blochnogo elementa* [About one factorization problem of Hilbert–Wiener method and block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (In Russian)

Статья поступила 31 мая 2015 г.