

УДК 539.3

О ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЯХ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА В ПОЛЕ НЕОДНОРОДНЫХ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Ватульян А. О., Юров В. О.

ON THE DISPERSION RELATIONS FOR A HOLLOW CYLINDER
WITHIN INHOMOGENEOUS RESIDUAL STRESS FIELD

Vatulyan A. O.^{*,**}, Yurov V. O.^{*}

^{*} Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia

^{**} Southern mathematical institute of the Vladikavkaz scientific centre of the RAS,
Vladikavkaz, 362027, Russia
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract. Identification of residual stresses is one of the most important technical problems allowing estimating correctly a resource of designs. Nowadays there are several ways to estimate the level of residual stress state, among them the most economic and simple one is the acoustic method connected with the measurement of velocities of elastic waves.

The waves in the hollow elastic inhomogeneous cylinder with free boundary are considered in the presence of fields of residual stress of various structure (inflating, stretching, torsion). The defining relation of problems on deformation of elastic bodies with residual stresses is nonlinear; the linearized Trefftz model is used.

The structure of dispersive multiplicity of a problem is studied. The analysis of standing waves has allowed to establish, that for any laws of change of residual stresses exists three set of the dispersive curves, differing movement kinematics. Fields of an abnormal dispersion are found. Some features of a structure of dispersive curves are revealed, influence on them of type of residual stresses is investigated. On the basis of a method of disturbances the formulas characterizing linear sites of dispersive curves and the formula, reflecting change of a dispersive picture in a vicinity of resonances of various type are received. The numerical and analytical research, allowed to establish degree of influence of type residual stresses and its amplitudes on structure a component of dispersive set and change of velocities of extending modes is carried out.

Keywords: residual stresses, waves, inhomogeneous cylinder, dispersion relations, asymptotic analysis

В 2015 году исполняется 95 лет со дня рождения выдающегося механика и математика, основателя школы механики на Юге России, создателя кафедры теории упругости и НИИ механики и прикладной математики в Ростовском госуниверситете, академика РАН Иосифа Израилевича Воронича. Он внес значительный вклад в развитие многих направлений механики деформируемого твердого тела, среди которых следует отметить нелинейную теорию оболочек, разработку методов решения смешанных статических и динамических

задач для полуграниченных тел, теорию устойчивости вязкоупругих конструкций.

Введение

Идентификация предварительных напряжений — одна из важных технических проблем, позволяющих правильно оценивать ресурс конструкций. В настоящее время существует несколько способов оценки уровня предварительного напряженного (ПН) состояния, среди которых наиболее экономичным и простым является акустический метод,

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, зав. отделом Южного математического института Владикавказского научного центра РАН; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Юров Виктор Олегович, студент Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: vitja.jurov@yandex.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (13-01-00196-а).

связанный с измерением скоростей упругих волн. Подробный обзор методов и закономерностей распространения волн при постоянных ПН достаточно подробно изложен в [1,2].

Общая постановка задач о деформировании упругих тел с предварительными напряжениями является нелинейной. Наиболее употребительными являются различные линейризованные теории, среди которых выделим модель Треффтца [3], в рамках которой исследовано значительное число задач [4–6]. Именно эта модель использована в настоящем исследовании для описания волновых процессов в полом цилиндре при анализе возмущений, вызванных наличием поля ПН. Отметим также, что существуют и иные подходы к процедуре линеаризации [7–9].

Итак, рассмотрим волны в полом упругом неоднородном цилиндре со свободными границами при наличии полей предварительных напряжений различной структуры (раздувание, растяжение, кручение). Отметим, что волновые процессы в однородных упругих цилиндрических волноводах со свободными границами достаточно подробно исследованы, поскольку возможно получить явный вид дисперсионного уравнения через цилиндрические функции [10, 11]. Известно, что поля предварительных напряжений различной структуры изменяют количественные характеристики распространяющихся волн, подобные задачи при наличии постоянных полей предварительных напряжений исследованы [2, 8], однако эти исследования не позволяют оценить влияние поля ПН даже для простейшего предварительного напряженного состояния, соответствующего задаче Ламе, поскольку приводит к анализу краевой задачи для оператора с существенно переменными коэффициентами.

1. Постановка задачи для операторного пучка

Используя линеаризованные осесимметричные уравнения движения упругого изотропного предварительно напряженного тела [4, 5], сформулируем постановку задачи. Будем искать решение уравнений теории упругости при наличии ПН в полом цилиндре со свободными границами $r = a$, $r = b$ в виде бегущих волн с частотой ω и скоростью волны k .

Введем следующие безразмерные параметры и переменные:

$\xi_0 = \frac{a}{b}$ — безразмерный внутренний радиус, $\mu_0 = \max \mu(x)$, $x \in [\xi_0, 1]$;

$$u_r = bU_1, \quad u_\phi = bU_2, \quad u_z = ibU_3;$$

$$t_r = \mu_0 T_1, \quad t_{r\phi} = \mu_0 T_2, \quad t_{rz} = i\mu_0 T_3;$$

$$\sigma_r^0 = \mu_0 S_1, \quad \sigma_{r\phi}^0 = \mu_0 S_{12};$$

$$\sigma_\phi^0 = \mu_0 S_2, \quad \sigma_{\phi z}^0 = 0, \quad \sigma_z^0 = \mu_0 S_3, \quad \sigma_{rz}^0 = 0;$$

$$\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 b^2}{\mu_0}, \quad \gamma = kb, \quad \lambda = \mu_0 g_1;$$

$$\mu = \mu_0 g_2, \quad g_1 + 2g_2 = G_1;$$

λ , μ — параметры Ламе, которые также могут зависеть от радиальной координаты; σ_r^0 , σ_ϕ^0 , σ_z^0 , $\sigma_{r\phi}^0$ — компоненты тензора ПН; t_r , $t_{r\phi}$, t_{rz} — компоненты тензора напряжений Пиолы. При использовании традиционного подхода получается система трех дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами относительно амплитудных значений смещений, содержащая два спектральных параметра. С целью исследования произвольной неоднородности, связанной как с переменностью упругих свойств, так и с переменностью ПН, представим соответствующую спектральную задачу в виде матричного дифференциального уравнения первого порядка (1.1) с граничными условиями (1.2)

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} T_1(\xi_0) = T_1(1) = T_2(\xi_0) = T_2(1) = \\ = T_3(\xi_0) = T_3(1) = 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $\mathbf{X} = (U_1 \ U_2 \ U_3 \ T_1 \ T_2 \ T_3)^T$.

Матрицу коэффициентов \mathbf{A} представим в виде следующего квадратичного пучка $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{00} - \kappa^2 \mathbf{A}_{01} + \gamma \mathbf{A}_1 + \gamma^2 \mathbf{A}_2$, где введены следующие обозначения для матриц 6 порядка, причем ниже приведены лишь ненулевые компоненты матриц

$$\mathbf{A}_{00} : \quad a_{11}^{00} = \frac{-g_1}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{12}^{00} = \frac{S_{12}}{x(G_1 + S_1)},$$

$$a_{14}^{00} = \frac{1}{G_1 + S_1}, \quad a_{21}^{00} = \frac{-S_{12}}{x(g_2 + S_1)},$$

$$a_{22}^{00} = \frac{g_2}{x(g_2 + S_1)}, \quad a_{25}^{00} = \frac{1}{g_2 + S_1},$$

$$a_{36}^{00} = \frac{1}{g_2 + S_1},$$

$$\begin{aligned}
a_{41}^{00} &= \frac{G_1 + S_2}{x^2} - \frac{g_1^2}{x^2(G_1 + S_1)} - \frac{S_{12}^2}{x^2(g_2 + S_1)}, \\
a_{42}^{00} &= \frac{g_1 S_{12}}{x^2(G_1 + S_1)} + \frac{g_2 S_{12}}{x^2(g_2 + S_1)}, \\
a_{44}^{00} &= -\frac{2g_2 + S_1}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{45}^{00} = \frac{S_{12}}{x(g_2 + S_1)}, \\
a_{55}^{00} &= -\frac{2}{x}, \quad a_{66}^{00} = -\frac{1}{x}; \\
\mathbf{A}_{01} : \quad a_{41}^{01} &= a_{52}^{01} = a_{63}^{01} = 1; \\
\mathbf{A}_1 : \quad a_{13}^1 &= \frac{g_1}{G_1 + S_1}, \quad a_{31}^1 = -\frac{g_2}{g_2 + S_1}, \\
a_{43}^1 &= -\frac{g_1(2g_2 + S_1)}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{46}^1 = \frac{g_2}{g_2 + S_1}, \\
a_{56}^1 &= \frac{S_{12}}{g_2 + S_1}, \quad a_{61}^1 = -\frac{g_1(2g_2 + S_1)}{x(G_1 + S_1)}, \\
a_{62}^1 &= -\frac{g_1 S_{12}}{x(G_1 + S_1)}, \quad a_{64}^1 = -\frac{g_1}{G_1 + S_1}; \\
\mathbf{A}_2 : \quad a_{41}^2 &= \frac{g_2 S_3 + S_1(g_2 + S_3)}{g_2 + S_1}, \\
a_{51}^2 &= -\frac{g_2 S_{12}}{g_2 + S_1}, \quad a_{52}^2 = g_2, \\
a_{63}^2 &= G_1 + S_3 - \frac{g_1^2}{G_1 + S_1}.
\end{aligned}$$

Отметим, что выбранные в качестве неизвестных физические величины позволяют получить систему, не содержащую производных от материальных функций, что позволяет анализировать с единых позиций непрерывные и кусочно-разрывные законы неоднородности.

В силу того, что обычно ПН на несколько порядков меньше параметров Ламе, введем малый параметр ε , характеризующий амплитуду ПН, и представим ПН в следующем виде: $S_i = \varepsilon S_i^*$, $S_{12} = \varepsilon S_{12}^*$.

Далее будем рассматривать следующие виды ПН:

1) раздувание (ПН1)

$$S_1 = \varepsilon S_1^*, \quad S_2 = \varepsilon S_2^*, \quad S_3 = 0, \quad S_{12} = 0;$$

2) растяжение (ПН2)

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \varepsilon S_3^*, \quad S_{12} = 0;$$

3) кручение (ПН3)

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0, \quad S_{12} = \varepsilon S_{12}^*.$$

Для дальнейшего анализа примем следующие законы изменения ПН, являющиеся решениями соответствующих задач о равновесии однородного упругого цилиндра

$$\begin{aligned}
1. \quad S_1 &= \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x^2}\right), \quad S_2 = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{x^2}\right), \\
S_3 &= \varepsilon \frac{g_1}{(g_1 + g_2)}, \quad S_{12} = 0; \\
2. \quad S_1 &= 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = \varepsilon \delta_2, \quad S_{12} = 0; \\
3. \quad S_1 &= 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = 0, \quad S_{12} = \varepsilon \frac{\delta_3}{x^2}.
\end{aligned}$$

Отметим, что всегда существует нулевое решение матричного дифференциального уравнения первого порядка (1.1) с граничными условиями (1.2). Вместе с тем известно [12, 13], что существуют такие сочетания спектральных параметров γ и κ , при которых имеется ненулевое решение задачи. Множество таких пар, при которых существует нетривиальное решение, образует дисперсионное множество задачи. В случае произвольных законов изменения неоднородностей точки дисперсионного множества могут быть найдены только численно, однако в некоторых частных случаях возможно построение аналитических зависимостей. В монографиях [13, 14] выявлены общие закономерности строения дисперсионного множества для слоя с произвольной неоднородностью и анизотропией, для кусочно-однородного цилиндрического волновода.

2. Асимптотический анализ дисперсионного множества для длинных волн

Анализ задачи начнем с простейшей ситуации. Несложный анализ краевой задачи при $\kappa = \gamma = 0$ позволяет установить наличие двух нетривиальных решений, отвечающих движению цилиндра как твердого целого — осевое смещение и поворот вокруг оси симметрии. В силу общих соображений [13, 14] нетрудно показать, что существуют две ветви дисперсионного множества, исходящие из начала координат, для которых возможно построение некоторых асимптотических решений. В области малых κ , γ можно отыскивать решение задачи в виде разложения по малому γ , полагая наличие линейного участка $\kappa = t\gamma$. Будем искать решение задачи (1.1)–(1.2) в виде следующего разложения:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \gamma \mathbf{X}_1 + \gamma^2 \mathbf{X}_2 + o(\gamma^2) \mathbf{E}, \quad (2.1)$$

где \mathbf{E} — единичный вектор.

Учитывая структуру исходного спектрального пучка, сформулируем три крайние задачи при одинаковых степенях γ .

Задача при γ^0 описывается следующим матричным дифференциальным уравнением:

$$\mathbf{X}'_0 = \mathbf{A}_{00}\mathbf{X}_0$$

при γ^1 :

$$\mathbf{X}'_1 = \mathbf{A}_{00}\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_0,$$

при γ^2 :

$$\mathbf{X}'_2 = \mathbf{A}_{00}\mathbf{X}_2 + \mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_0 - t^2\mathbf{A}_{01}\mathbf{X}_0.$$

с соответствующими однородными граничными условиями.

Несложный анализ спектральных задач нулевого и первого приближений и использование условия разрешимости в задаче второго приближения [15] позволяют установить следующие результаты относительно нахождения параметра t . Один из прямолинейных участков характеризуется тем, что t определяется по формуле

$$t_2 = \left(\frac{4}{1 - \xi_0^4} \int_{\xi_0}^1 g_2 x^3 dx \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

причем для ПН1 и ПН2 эта формула является точной, а для ПН3 — приближенной с точностью до $o(\varepsilon^2)$.

Второй прямолинейный участок характеризуется следующим значением t :

$$t_3 = \left(\frac{2}{1 - \xi_0^2} \int_{\xi_0}^1 \left[-\frac{g_1(2g_2 + S_1)}{(G_1 + S_1)} U_{11} - \frac{g_1 x}{G_1 + S_1} T_{11} - \frac{g_1 S_{12}}{(G_1 + S_1)} U_{21} + xG_1 + xS_3 - \frac{g_1^2 x}{G_1 + S_1} \right] dx \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

В случае отсутствия ПН и при ПН3 вида $S_{12}^* = \frac{\delta_3}{x^2}$ формула для t_3 примет вид

$$t_3 = \left(\frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{(g_1 + g_2)} \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

При ПН2 формула для t_3 запишется

$$t_3 = \left(\frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{(g_1 + g_2)} + S_3^* \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Используя формулы, отражающие действие внутреннего давления и растяжения

$$S_1 = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{x^2} \right), \quad S_2 = \varepsilon \left(1 + \frac{1}{x^2} \right),$$

$$S_3 = \varepsilon \frac{g_1}{(g_1 + g_2)}, \quad g_1, g_2 = \text{const},$$

получим

$$t_3 = \left(\left[\frac{g_2(3g_1 + 2g_2)}{(g_1 + g_2)} \right] + \left[\frac{g_1^2}{2(g_1 + g_2)^2} + \frac{g_1}{(g_1 + g_2)} \right] \varepsilon + o(\varepsilon^2) \right)^{1/2}. \quad (2.6)$$

Полученные формулы позволяют оценить влияние структуры ПН на две низшие стержневые моды дисперсионных множеств в окрестности начала координат.

3. Асимптотический анализ в окрестности радиальных резонансов

Аналогично предыдущим рассуждениям проведем анализ задачи для стоячих волн, характеризующихся нулевым значением параметра $\gamma = 0$. уравнение задачи принимает вид

$$\mathbf{X}' = (\mathbf{A}_{00} - \kappa^2 \mathbf{A}_{01})\mathbf{X}. \quad (3.1)$$

Отметим, что общая задача (3.1) расщепляется на две подзадачи: для дифференциального оператора второго порядка и для оператора четвертого порядка, — которые имеют переменные коэффициенты. Несложно установить, что порождающие операторы являются самосопряженными и каждая из этих задач имеет вещественный спектр, и собственным значениям соответствуют начальные точки дисперсионных кривых. Таким образом, в силу аналитичности компонент дисперсионных множеств [13], получаем два семейства решений, исходящих из этих точек. В то время как одна задача имеет нетривиальное решение, другая имеет только нулевое решение. При появлении предварительных напряжений (ПН) точки изменяют свое положение. Получим формулы, отражающие это изменение.

В силу малости параметра ε , характеризующего интенсивность ПН, представим решение в виде следующего разложения

$$\begin{aligned} \kappa &= \kappa_0 + \varepsilon \kappa_1 + o(\varepsilon^2), \\ \mathbf{X} &= \mathbf{X}_0 + \varepsilon \mathbf{X}_1 + o(\varepsilon^2) \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Найдем поправки к собственным значениям однородной задачи на основе метода возмущений [15]. Для каждой из подзадач выполним разложение по малому параметру ε . Задача при ε^0 разделяется на три подзадачи относительно следующих пар функций: $U_1 T_1$, $U_2 T_2$ и $U_3 T_3$, — каждая из которых имеет свой спектр κ_{10} , κ_{20} , κ_{30} соответственно.

Используя условие ортогональности, получим поправки κ_{11} , κ_{21} , κ_{31} , которые выражаются через интегралы от ПН и собственных функций задачи при ε^0 . Для первого семейства имеем

$$\begin{aligned} \kappa_{11} &= \int_{\xi_0}^1 \left(\frac{S_1^*}{G_1^2} T_{10}^2 + \left(\frac{g_1^2 S_1^*}{x^2 G_1^2} + \frac{S_2^*}{x^2} \right) U_{10}^2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2g_1 S_1^*}{x G_1^2} T_{10} U_{10} \right) x dx \times \\ &\quad \times \left(2\kappa_{10} \int_{\xi_0}^1 U_{10}^2 x dx \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Важным является вопрос относительно знака поправки в зависимости от ПН. Заметим, что под интегралом находится квадратичная форма относительно переменных T_{10} и U_{10} . Критерий положительной определенности Сильвестра для квадратичной формы дает возможность определить знак поправки: $\kappa_{11} \geq 0$ при $S_1^* > 0$, $S_2^* > 0$ и $\kappa_{11} \leq 0$ при $S_1^* < 0$, $S_2^* < 0$. Однако, для ПН1 при $S_1^* = 1 - \frac{1}{x^2}$, $S_2^* = 1 + \frac{1}{x^2}$ знак κ_{11} зависит от переменных T_{10} и U_{10} , поскольку в этом случае под интегралом находится не знакоопределенная квадратичная форма. Заметим также, что ПН2 и ПН3 не входят в формулу для поправки κ_{11} , тогда она равна нулю для ПН2 и ПН3.

Для второго семейства получим

$$\begin{aligned} \kappa_{21} &= \kappa_{20} \int_{\xi_0}^1 S_1^* \left(T_{20} U_{20} + \frac{T_{20}^2}{g_2} x \right) dx \times \\ &\quad \times \left(2 \int_{\xi_0}^1 T_{20}^2 x dx \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поправка κ_{21} является ненулевой для ПН1, а при ПН2 и ПН3 она равна нулю. Это означает, что наличие ПН2 и ПН3 не меняет собственные значения этого семейства. Для поправок третьего семейства получим

$$\begin{aligned} \kappa_{31} &= \kappa_{30} \int_{\xi_0}^1 \frac{S_1^* x T_{30}^2}{g_2^2} dx \times \\ &\quad \times \left(\int_{\xi_0}^1 \frac{2x T_{30}^2}{g_2} dx \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поправка κ_{31} является ненулевой при ПН1, а при ПН2 и ПН3 она равна нулю. Нетрудно видеть, что $\kappa_{31} \leq 0$ при $S_1^* < 0$ и $\kappa_{31} \geq 0$ при $S_1^* > 0$ для любой функции T_{30} . Например, при $S_1^* = 1 - \frac{1}{x^2} < 0$ и $g_2 = \text{const}$, $\kappa_1 \leq 0$, следовательно, наличие раздувания снижает величину собственных значений этого семейства.

4. Численный анализ

Осуществим серию расчетов точек дисперсионного множества при произвольных соотношениях между спектральными параметрами и проведем проверку построенных выше формул. Решение ищется численно методом пристрелки путем сведения к решению набора задач Коши и линейной алгебраической системы. Отметим, что предложенная схема позволяет анализировать любые законы изменения компонент тензора предварительных напряжений.

На рис. 1 изображено характерное дисперсионное множество задачи, состоящее из двух ветвей, выходящих из начала координат, и набора ветвей, порожденных описанными выше задачами и пересекающими ось под прямым углом. Имеется участок аномальной дисперсии.

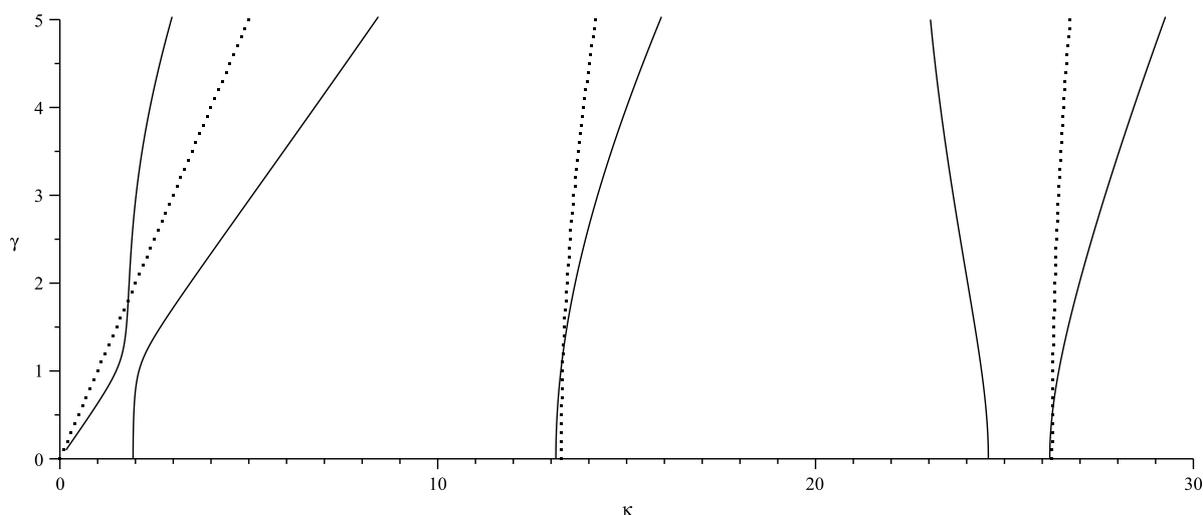


Рис. 1

Таблица 1

Семейства	Без ПН	κ_1 численно	κ_1 асимптотика	$\delta_k, \%$
1)	1,937	0,7744	0,7746	0,026
3)	13,12	-1,9745	-1,9752	0,034
2)	13,27	-1,9003	-1,9001	0,01
1)	24,57	-1,0201	-1,020	0,001
3)	26,19	-4,0872	-4,0884	0,029
2)	26,27	-4,0491	-4,0482	0,026

В табл. 1 приведены поправки, рассчитанные по полученным формулам (3.3)–(3.5) и перемещениям начальных точек дисперсионных кривых, найденных при помощи численного анализа при ПН1 $S_1^* = (1 - \frac{1}{x^2})$, $S_2^* = (1 + \frac{1}{x^2})$. Для ПН2 и ПН3 эта поправка равна нулю, что также подтверждено численными расчетами. В расчетах принято $g_1 = 1,5$, $g_2 = 1$, $\xi_0 = 0,76$, $\varepsilon = 10^{-3}$, а относительная погрешность обозначена через δ .

Проведен вычислительный эксперимент по проверке точности формулы (2.2). Судя по кинематике движения, эта ветвь характеризует крутильную моду колебаний. Параметр t не меняется даже при достаточном удалении от начала координат, t_2 вычислялось при ПН всех представленных типов (при $\varepsilon = 10^{-3}$), а значение этого параметра не менялось.

В табл. 2 проведено сравнение значений параметра t_3 , найденных по формуле (6) и при помощи численных расчетов. В сравнении с наклонным участком крутильной моды диапазон применимости этой формулы зна-

чительно уже. Он характеризует продольную моду колебаний. Для формул (2.3), (2.5), (2.6) также выполнялись соответствующие расчеты. В результате установлено, что в области $\kappa \in [0, 0,5]$ отличие значений не превышает одного процента.

Заключение

Изучено дисперсионное соотношение задачи о распространении волн в полом упругом цилиндре при наличии различных типов ПН. Анализ стоячих волн позволил установить, что для любых законов изменения предварительных напряжений существует три семейства дисперсионных кривых, отличающихся кинематикой движения. Найденны участки аномальной дисперсии. Проведено численное и аналитическое исследование, позволившее установить степень влияния типа ПН и его амплитуды на структуру компонент дисперсионного множества и изменение скоростей распространяющихся мод.

Таблица 2

κ	γ	t_3 численно	t_3	δ , %
0,08062	0,05	1,61244	1,61245	0,0006
0,48209	0,3	1,60696		0,34

Литература

1. Углов А. Л., Ерофеев В. И., Смирнов А. Н. Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации. М.: Наука, 2009. 280 с.
2. Никитина Н. Е. Акустоупругость. Опыт практического применения. Нижний Новгород: Издательство ТАЛАМ, 2005. 208 с.
3. Trefftz E. Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts // ZAMM. 1933. Vol. 12. No. 2. P. 160–165.
4. Гузь А. Н., Махорт Ф. Г., Гуца О. И. Введение в акустоупругость. Киев: Наукова думка, 1977. 162 с.
5. Ватульян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону, Издательство ЮФУ, 2014. 206 с.
6. Ватульян А. О., Недин Р. Д. Модели предварительного напряженного состояния и принципы его идентификации // Итоги науки. Юг России Математический форум. Т. 8, ч. 2. Исследования по дифференциальным уравнениям, математическому моделированию и проблемам математического образования. Владикавказ: ЮМИ ВНЦ и РСО-А, 2014. С. 32–52.
7. Bazant Z.P. A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies // J. Appl. Mech. 1971. Vol. 38. P. 919–928.
8. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
9. Зубов Л. М. Теория малых деформаций предварительно напряженных тонких оболочек // ПММ. 1976. Т. 40. № 1. С. 85–95.
10. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder // J. Reine Angew. Math. 1876. Vol. 81. P. 324–336.
11. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar // J. Quart. Pure Appl. Math. 1886. Vol. 21. P. 287–298.
12. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. М.: Наука, 1981. 282 с.
13. Ворovich И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
14. Гетман И. П., Устинов Ю. А. Математическая теория нерегулярных твердых волноводов. Ростов-на-Дону: Изд-во Рост. ун-та, 1993. 144 с.
15. Найфе А. Х. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 454 с.

References

1. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskiy kontrol' oborudovaniya pri izgotovlenii i ekspluatatsii* [Acoustic testing equipment during manufacturing and operation]. Moscow, Nauka Publ., 2009, 280 p. (In Russian)
2. Nikitina N.E. *Akustouprugost'. Opyt prakticheskogo primeneniya* [Acoustoelasticity. Practical experience]. Nizhniy Novgorod, Talam Publ., 2005, 208 p. (In Russian)
3. Trefftz E. Zur theorie der stabilität des elastischen gleichgewichts [On the theory of stability of elastic equilibrium]. *ZAMM*, 1933, vol. 12, no. 2, pp. 160–165. (In German)
4. Guz' A.N., Makhort F.G., Gushcha O.I. *Vvedenie v akustouprugost'* [Introduction to acoustoelasticity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1977, 162 p. (In Russian)
5. Vatulyan A.O., Dudarev V.V., Nedin R.D. *Predvaritel'nye napryazheniya: modelirovaniye i identifikatsiya* [Prestressing: modeling and identification]. Rostov-na-Donu, SFEDU Publ., 2014. 206 p. (In Russian)
6. Vatulyan A.O., Nedin R.D. Modeli predvaritel'nogo napryazhennogo sostoyaniya i printsipy ego identifikatsii [Models of prestressed state and the principles of identification]. In *Itogi nauki. Yug Rossii Matematicheskiy forum. T. 8, ch. 2. Issledovaniya po differentsial'nym uravneniyam, matematicheskoy modelirovaniyu i problemam matematicheskogo obrazovaniya* [Results of science. South Russian Math Forum. Vol. 8. Ch. 2. Research on differential equations, mathematical modeling and mathematical education problems]. Vladikavkaz, YuMI VNTs i RSO-A, 2014, pp. 32–52. (In Russian)
7. Bazant Z.P. A correlation study of formulations of incremental deformation and stability of continuous bodies. *J. Appl. Mech.*, 1971, vol. 38, pp. 919–928.
8. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [The dynamics of the surface of heterogeneous environ-

- ments]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 312 p. (In Russian)
9. Zubov L.M. Teoriya malykh deformatsiy predvaritel'no napryazhennykh tonkikh obolochek [The theory of small deformations of prestressed thin shells]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1976, vol. 40, no. 1, pp. 85–95. (In Russian)
 10. Pochhammer L. Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder [About cylinder reproduction speeds of small oscillations in an infinite isotropic circle]. *J. Reine Angew. Math.*, 1876, vol. 81, pp. 324–336. (In German)
 11. Chree C. Longitudinal vibrations of a circular bar. *J. Quart. Pure Appl. Math.*, 1886, vol. 21, pp. 287–298.
 12. Grinchenko V.T., Meleshko V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic waves in elastic bodies]. Moscow, Nauka Publ., 1981, 282 p. (In Russian)
 13. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskoe smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
 14. Getman I.P., Ustinov Yu.A. *Matematicheskaya teoriya neregulyarnykh tverdykh volnovodov* [The mathematical theory of irregular waveguides solid]. Rostov-on-Don, Izdatelstvo Rostovskogo univesiteta Publ., 1993, 144 p. (In Russian)
 15. Nayfe A.Kh. *Metody vozmushcheniy* [The Perturbation methods]. Moscow, Mir Publ., 1976, 454 p. (In Russian)

Статья поступила 8 мая 2015 г.

© Ватульян А. О., Юров В. О., 2015