

УДК 539.3

## АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ПЛОСКИХ УПРУГИХ ВОЛН НА КРУГОВОЙ ИНТЕРФЕЙСНОЙ ТРЕЩИНЕ

Дорошенко О. В.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF ELASTIC WAVES SCATTERING PROBLEM  
BY CIRCULAR INTERFACE CRACK

Doroshenko O. V.

Institute of Mathematics, Mechanics and Informatics,  
Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: oldorosh@mail.ru

*Abstract.* The present paper investigates the problem of an elastic wave scattering by a circular interface crack situated between two dissimilar half-spaces. The scattering by a crack is investigated by the boundary integral equation method and the integral approach, which can be generalized for layered composites. An explicit expression for the crack opening displacement of circular interface crack is derived for wavelengths of an incident wavefield larger than the diameter of the crack. For the case of a plane longitudinal wave diffraction at normal incidence to the interface an asymptotic solution is obtained. This asymptotic expression can be used in order to simulate wave scattering by a random distribution of small cracks and to estimate effective spring stiffness for spring models.

*Keywords:* crack, diffraction, elastic waves, asymptotic, integral approach

### Введение

Рассеяние упругих волн на пространственных неоднородностях имеет важные приложения в неразрушающем контроле при выявлении дефектов и оценке поврежденности композитов [1]. Одним из основных типов дефектов, представляющих существенный интерес в практических задачах ультразвукового контроля и мониторинга, являются трещины. Развитие таких неоднородностей в процессе эксплуатации конструкции может привести к её разрушению и невозможности дальнейшего использования. Это обуславливает существенный интерес к изучению процессов дифракции упругих волн на трещинах как на основе математического и компьютерного моделирования, так и с использованием современных экспериментальных подходов. Поэтому рассеяние упругих волн на трещинах изучалось с помощью разных методов, от численных до аналитических [2].

Полное описание реальной трещины является нетривиальной математической задачей, требующей учёта сложной геометрии и, например, нелинейного взаимодействия

поверхностей трещины. Отдельный интерес представляют отслоения или зоны нарушения сплошности, а также множества микротрещин и их колебания при динамическом упругом воздействии [3]. В работе [4] была предложена квазистатическая модель для описания прохождения и отражения ультразвука через дефектную зону, где прямая линия, вдоль которой расположен дефект, заменяется распределённой пружиной, жёсткость которой определяется по упругой деформации среды с повреждением. Идея метода заключается в том, что при применении растягивающей нагрузки изменение смещений за счёт дефекта в дальней от повреждения зоне может быть описано как взаимодействие двух соприкасающихся полупространств, соединённых распределённой пружиной. Пружинная жёсткость при этом получается из существующих решений для упругого смещения при растяжении полосы, содержащей трещины. В работах [5, 6] данный подход получил дальнейшее развитие для описания повреждений в однородных материалах. Позднее подход был применен для изучения контактного взаимодей-

Дорошенко Ольга Валерьевна, научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: oldorosh@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (12-01-33011-мол\_вед\_a).

ствия разнородных материалов [7, 8], где при нахождении скачка смещений на произвольным образом распределённых полосовых трещинах одинакового размера применялось усреднение по ансамблю на основе асимптотического решения для одной трещины.

В настоящей статье рассматривается решение трёхмерной задачи о рассеянии плоских упругих волн на круговой интерфейсной трещине. Задача о дифракции на круговой трещине в упругом пространстве плоских  $P$ - и  $SV$ -волн, падающих под произвольным углом, была решена в [9], где использовалось преобразование Ханкеля для получения интегральных уравнений относительно скачка перемещений на трещине, который определялся в виде разложения по полиномам Лежандра. В данной работе используется преобразование Ханкеля и метод граничных интегральных уравнений [10] для случая круговой трещины на границе двух различными материалами. Более того, схема построения решения позволяет получить асимптотические представления волновых полей для трещин малых размеров по сравнению с длиной волны. Асимптотика даёт возможность моделировать распространение волн через распределение трещин на интерфейсе и определять пружинную жёсткость при введении граничных условий пружинного типа на основе подходов [8, 11].

## 1. Постановка задачи

Рассматриваются установившиеся колебания круговой трещины радиуса  $a$  на стыке упругих изотропных полупространств при падении плоских  $P$ - и  $SV$ -волн. Нижнее полупространство имеет плотность  $\rho_1$  и константы Ляме  $\lambda_1, \mu_1$ , а верхнее соответственно —  $\rho_2, \lambda_2$  и  $\mu_2$ . Для гармонических колебаний множитель  $\exp(-i\omega t)$ , содержащий время  $t$  и круговую частоту  $\omega$ , может быть опущен. Волновые числа для нижней и верхней среды можно обозначить соответственно  $h_j, k_j$ :

$$h_j = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\lambda_j + 2\mu_j}}, \quad k_j = \omega \sqrt{\frac{\rho_j}{\mu_j}}, \quad j = 1, 2.$$

Уравнения движения относительно вектора смещений в нижнем  $\mathbf{u}_1 = (u_{1x}, u_{1y}, u_{1z})$  и верхнем  $\mathbf{u}_2 = (u_{2x}, u_{2y}, u_{2z})$  полупростран-

ствах имеют вид

$$\begin{aligned} h_1^{-2} \nabla \nabla \mathbf{u}_1 - k_1^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_1) + \\ + \mathbf{u}_1 = 0, \quad z \leq 0, \\ h_2^{-2} \nabla \nabla \mathbf{u}_2 - k_2^{-2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}_2) + \\ + \mathbf{u}_2 = 0, \quad z > 0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

В плоскости  $z = 0$  предполагается непрерывность перемещений  $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$  и напряжений  $\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2$  при  $r > a$ . Здесь вектор, составленный из нормальных и касательных напряжений, имеет вид

$$\boldsymbol{\tau}_j = \lambda_j \hat{\mathbf{z}} \nabla \mathbf{u}_j + 2\mu_j \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial z} + \mu_j \hat{\mathbf{z}} \times (\nabla \times \mathbf{u}_j) = 0,$$

а  $\hat{\mathbf{z}}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси  $z$ . На границе раздела сред  $z = 0$  вне трещины, то есть при  $r > a$  предполагается идеальный контакт между полупространствами

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2, \quad \boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2, \quad z = 0, \quad r > a, \quad (1.2)$$

тогда как на берегах трещины заданы условия отсутствия нормальных и касательных напряжений

$$\boldsymbol{\tau}_1 = \boldsymbol{\tau}_2 = 0.$$

Полное поле перемещений  $\mathbf{u}$  представляется как сумма падающего волнового поля (в отсутствие трещины)  $\mathbf{u}^{in}$  и рассеянного трещиной поля  $\mathbf{u}^{sc}$ . Поэтому граничные условия на трещине можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\tau}_1^{sc} = \boldsymbol{\tau}_2^{sc} = -\boldsymbol{\tau}^{in}, \quad r < a. \quad (1.3)$$

Вполне естественно рассматривать настоящую задачу в цилиндрической системе координат, начало которой совпадает с центром трещины, а ось  $z$  параллельна нормали к ней (рис. 1). Ниже индекс  $j$  для  $u_j$  и  $\tau_j$  будет опущен. Вектор смещений  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  в цилиндрической системе координат в терминах потенциалов  $\psi_i$  имеет вид [12]

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \psi_3}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta}, \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_3}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial \theta \partial z} - \frac{\partial \psi_1}{\partial r}, \\ u_z &= \frac{\partial \psi_3}{\partial z} - \left( \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_2, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

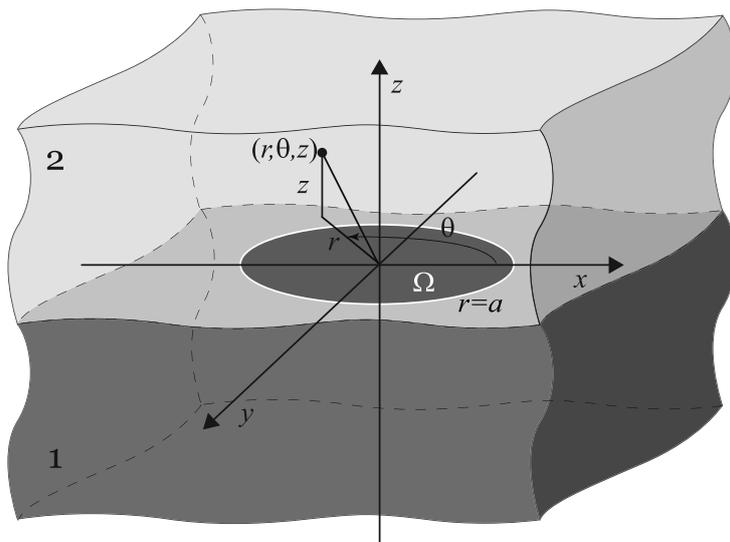


Рис. 1. Постановка задачи

Компоненты тензора напряжений выражаются через перемещения

$$\tau_{rz} = \mu_j \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{\theta z} = \mu_j \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right),$$

$$\tau_{zz} = (\lambda_j + 2\mu_j) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda_j \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right).$$

Следовательно уравнения движения могут быть записаны в потенциалах, которые удовлетворяют уравнениям Гельмгольца в цилиндрических координатах [12]

$$\nabla^2 \psi_3 + h_j^2 \psi_3 = 0, \quad \nabla^2 \psi_i + k_j^2 \psi_i = 0, \quad (1.5)$$

$$i = 1, 2.$$

## 2. Интегральные представления для волновых полей, рассеянных на круговой трещине

Для построения интегрального представления рассеянного поля удобно использовать преобразование Фурье–Ханкеля по  $r$  и разложение в виде рядов Фурье по  $\theta$ . Тогда для

потенциалов справедливы представления [9]

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, z) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_1^m(r, z) \chi_2^{l,m}(\theta), \\ \psi_i(r, \theta, z) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} \psi_i^m(r, z) \chi_1^{l,m}(\theta), \quad (2.1) \\ & \quad i = 2, 3, \\ \chi_2^{1,m}(\theta) &= \chi_1^{2,m}(\theta) = \sin m\theta, \\ \chi_1^{1,m}(\theta) &= -\chi_2^{2,m}(\theta) = \cos m\theta. \end{aligned}$$

Подстановка разложений (2.1) в волновые уравнения (1.5) и использование интегрального преобразования Ханкеля позволяет получить следующие выражения для потенциалов [9]:

$$\psi_{ij}^m(r, z) = \int_0^{\infty} \Psi_{ij}^m(\alpha) e^{-\sigma_j |z|} J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\sigma_{3j} = \sqrt{\alpha^2 - h_j^2},$$

$$\sigma_{1j} = \sigma_{2j} = \sqrt{\alpha^2 - k_j^2}, \quad (2.2)$$

$$\text{Im } \sigma_n \geq 0, \quad \text{Re } \sigma_n \leq 0.$$

В терминах потенциалов, учитывая свойства преобразования Ханкеля, удобнее использовать  $u_r^m \pm u_\theta^m$  и  $\tau_{rz}^m \pm \tau_{\theta z}^m$  вместо  $u_r^m$ ,  $u_\theta^m$ ,  $\tau_{rz}^m$  и  $\tau_{\theta z}^m$ . Нетрудно получить следующие

представления для перемещений (здесь и ниже индекс  $j$  опущен для  $\sigma_{ij}$ , так как соотношения записываются одинаково для обоих полупространств):

$$u_z(r, \theta, z) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} D_1^m(r, z) \chi_1^{l,m}(\theta),$$

$$(u_r + u_\theta)(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( D_2^m(r, z) \chi_1^{1,m}(\theta) + D_3^m(r, z) \chi_1^{2,m}(\theta) \right),$$

$$(u_r - u_\theta)(r, \theta, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( D_3^m(r, z) \chi_1^{1,m}(\theta) + D_2^m(r, z) \chi_1^{2,m}(\theta) \right),$$

$$D_1^m(z, r) = \int_0^{\infty} \left[ -(-1)^j \Psi_3^m(\alpha) \sigma_3 e^{-\sigma_3|z|} + \Psi_2^m(\alpha) \alpha^2 e^{-\sigma_2|z|} \right] J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha,$$

$$D_i^m(z, r) = \int_0^{\infty} \left[ (-1)^i \Psi_3^m(\alpha) \alpha e^{-\sigma_3|z|} - (-1)^{i+j} \Psi_2^m(\alpha) \sigma_1 \alpha e^{-\sigma_2|z|} + \Psi_1^m(\alpha) \alpha e^{-\sigma_1|z|} \right] J_{m-(-1)^i}(\alpha r) \alpha \, d\alpha, \\ i = 2, 3$$

и напряжений

$$\tau_{zz}^m = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=0}^{\infty} F_1^m(r, z) \chi_1^{l,m}(\theta),$$

$$\tau_{rz}^m + \tau_{\theta z}^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left( F_2^m(r, z) \chi_1^{1,m}(\theta) + F_3^m(r, z) \chi_1^{2,m}(\theta) \right),$$

$$\tau_{rz}^m - \tau_{\theta z}^m = \sum_{m=0}^{\infty} \left( F_3^m(r, z) \chi_1^{1,m}(\theta) + F_2^m(r, z) \chi_1^{2,m}(\theta) \right),$$

$$F_1^m(r, z) = \mu_j \int_0^{\infty} \left[ \Psi_3^m(\alpha) (2\alpha^2 - k^2) e^{-\sigma_3|z|} - (-1)^j \Psi_2^m(\alpha) \sigma_1 2\alpha^2 e^{-\sigma_2|z|} \right] J_m(\alpha r) \alpha \, d\alpha,$$

$$F_i^m(z, r) = \mu_j \int_0^{\infty} \left[ -(-1)^{i+j} \Psi_3^m(\alpha) 2\alpha \sigma_3 e^{-\sigma_3|z|} + (-1)^i \Psi_2^m(\alpha) (2\alpha^2 - k^2) \alpha e^{-\sigma_2|z|} - (-1)^j \Psi_1^m(\alpha) \sigma_1 \alpha e^{-\sigma_1|z|} \right] J_{m-(-1)^i}(\alpha r) \alpha \, d\alpha, \\ i = 2, 3.$$

Поле рассеяния можно компактно записать через Фурье-символы матрицы Грина  $\mathbf{K}_j^l(\alpha, z)$  [10, 13, 14]

$$\mathbf{w}^{sc,lm}(r, z) = \begin{cases} \mathbf{w}_1^{sc,lm}(r, z), & z < 0, \\ \mathbf{w}_2^{sc,lm}(r, z), & z > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{w}_1^{sc,lm}(r, z) = \int_0^{\infty} \mathbf{J}^{lm}(\alpha r) \mathbf{K}_1^l(\alpha, z) \mathbf{Q}^{lm}(\alpha) \alpha \, d\alpha,$$

$$\mathbf{w}_2^{sc,lm}(r, z) = \int_0^{\infty} \mathbf{J}^{lm}(\alpha r) \mathbf{K}_2^l(\alpha, z) \mathbf{Q}^{lm}(\alpha) \alpha \, d\alpha,$$

и преобразование Фурье

$$\mathbf{Q}^{lm}(\alpha) = \int_0^{\infty} \mathbf{J}^{lm}(\alpha r) \mathbf{q}^{lm}(r) r \, dr,$$

где

$$\mathbf{q}^{lm}(r) = \left\{ \tau_{rz}^{lm}(r, 0) + \tau_{\theta z}^{lm}(r, 0), \tau_{rz}^{lm}(r, 0) - \tau_{\theta z}^{lm}(r, 0), \tau_{zz}^{lm}(r, 0) \right\}.$$

Вектор  $\{\tau_{rz}^{lm}, \tau_{\theta z}^{lm}, \tau_{zz}^{lm}\}|_{z=0} = \{q_1, q_2, q_3\}$  из касательных и нормальных напряжений на  $z = 0$  позволяет обеспечить удовлетворение граничных условий (1.2), а диагональная

матрица  $\mathbf{J}^{lm}$  составляется из функций Бесселя  $J_m(r)$  следующим образом:

$$\mathbf{J}^{lm}(\alpha r) = \begin{pmatrix} J_{m+(-1)^l}(\alpha r) & 0 & 0 \\ 0 & J_{m-(-1)^l}(\alpha r) & 0 \\ 0 & 0 & J_m(\alpha r) \end{pmatrix}.$$

Фурье-преобразование вектора напряжений на интерфейсе

$$\mathbf{Q}^{lm}(\alpha) = \mathbf{L}^l(\alpha) \mathbf{W}^{lm}(\alpha)$$

может быть выражено через Фурье-символ  $\mathbf{W}^{lm}(\alpha)$  неизвестного скачка смещений

$$\mathbf{w}^{lm}(r) = \mathbf{w}_1^{sc,lm}(r, 0^-) - \mathbf{w}_2^{sc,lm}(r, 0^+)$$

посредством матрицы

$$\mathbf{L}^l(\alpha) = [\mathbf{K}_1^l(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2^l(\alpha, 0)]^{-1}.$$

Таким образом, для получения решения необходимо построить символ матрицы Грина для полупространств в цилиндрических координатах. Вывод Фурье-символа матрицы Грина для упругого полупространства в декартовой системе координат подробно описан в [10, 13]. В цилиндрических координатах компоненты Фурье-символа матрицы Грина  $\mathbf{K}_j^l(\alpha, z)$  имеют вид

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix},$$

$$k_{11} = k_{22} = \frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) - N_j(\alpha, z)],$$

$$k_{12} = k_{21} = -\frac{1}{2} [M_j(\alpha, z) + N_j(\alpha, z)],$$

$$k_{13} = -k_{23} = (-1)^l \alpha P_j(\alpha, z),$$

$$-k_{31} = k_{32} = \frac{(-1)^l}{2} \alpha S_j(\alpha, z),$$

$$k_{33} = R_j(\alpha, z).$$

Множитель  $(-1)^l$  возникает из-за разнонаправленности нормалей к поверхностям полупространств, здесь векторы  $\{P_j(\alpha, z), 0, R_j(\alpha, z)\}$  и  $\{M_j(\alpha, z), 0, S_j(\alpha, z)\}$  — фундаментальные решения для полупространств в плоском случае, и соответственно  $\{0, N_j(\alpha, z), 0\}$  — в антиплоском, [10]

$$\begin{aligned} M_j(\alpha, z) &= \\ &= (-1)^{j+1} \frac{\sigma_{1,j}}{\Delta_j} \left[ \eta_j e^{-\sigma_{1,j}|z|} - 2\alpha^2 e^{-\sigma_{3,j}|z|} \right], \end{aligned}$$

$$S_j(\alpha, z) = \frac{1}{\Delta_j} \left[ \eta_j e^{-\sigma_{3,j}|z|} - 2\sigma_{1,j} \sigma_{3,j} e^{-\sigma_{1,j}|z|} \right],$$

$$P_j(\alpha, z) = \frac{1}{\Delta_j} \left[ 2\sigma_{1,j} \sigma_{3,j} e^{-\sigma_{3,j}|z|} - \eta_j e^{-\sigma_{1,j}|z|} \right],$$

$$\begin{aligned} R_j(\alpha, z) &= \\ &= (-1)^j \frac{\sigma_{1,j}}{\Delta_j} \left[ -\eta_j e^{-\sigma_{1,j}|z|} + 2\alpha^2 e^{-\sigma_{3,j}|z|} \right], \end{aligned}$$

$$N_j(\alpha, z) = \frac{(-1)^j}{\mu_j \sigma_{1,j}} e^{-\sigma_{1,j}|z|},$$

$$\eta_j = 2\alpha^2 - k_j^2,$$

$$\Delta_j = \mu_j [(2\alpha^2 - k_{2,j}^2)^2 - 4\alpha^2 \sigma_{1,j} \sigma_{3,j}].$$

### 3. Вывод системы интегральных уравнений

Подстановка интегрального представления (2.3) для  $\boldsymbol{\tau}^{sc}$  в граничные условия (1.3) приводит к системе интегральных уравнений

$$\int_0^\infty \mathbf{J}^{lm}(\alpha r) \mathbf{L}^l(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{lm}(\alpha) \alpha d\alpha = -\boldsymbol{\tau}^{in}. \quad (3.1)$$

Компоненты скачка смещений

$$\mathbf{w}^{lm}(r) = \{w_k^{lm}\}_{k=1}^3$$

отыскиваются в виде разложения по присоединенным полиномам Лежандра  $P_m^n(x)$  [9]

$$\Delta w_k^{lm}(r, \theta) = \sum_{t=0}^\infty \beta_{kt}^{lm} \psi_{kt}^m(r) \chi^{lm}(\theta), \quad (3.2)$$

где

$$\psi_{1t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+2}^{m+1} \sqrt{1-r^2/a^2}}{P_{m+2t+2}^{m+2}(0)},$$

$$\psi_{2t}^m(r) = \frac{P_{m+2t}^{m-1} \sqrt{1-r^2/a^2}}{P_{m+2t}^m(0)},$$

$$\psi_{3t}^m(r) = \frac{P_{m+2t+1}^m \sqrt{1-r^2/a^2}}{P_{m+2t+1}^{m+1}(0)}.$$

Преобразование Ханкеля от данных базисных функций выражается через функции Бесселя следующим образом:

$$\begin{aligned}
\Psi_{1t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \psi_{1t}^m(r) J_{m+1}(\alpha r) r dr = \\
&= (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+5/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}, \\
\Psi_{2t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \psi_{2t}^m(r) J_{m-1}(\alpha r) r dr = \\
&= (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+1/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}, \\
\Psi_{3t}^m(\alpha a) &= \int_0^a \psi_{3t}^m(r) J_m(\alpha r) r dr = \\
&= (-1)^t \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \frac{J_{m+2t+3/2}(\alpha a)}{\alpha^{3/2}}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Для решения системы интегральных уравнений (3.1) необходимо построить матрицу  $\mathbf{L}^l(\alpha)$ . Для этого сначала записывается разность между Фурье-символами матриц Грина двух полупространств

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_1^1(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2^1(\alpha, 0) &= \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(a-b) & -\frac{1}{2}(a+b) & (-1)^l c \\ -\frac{1}{2}(a+b) & \frac{1}{2}(a-b) & (-1)^{l+1} c \\ \frac{(-1)^{l+1} c}{2} & \frac{(-1)^l c}{2} & d \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

где

$$a = M_1 - M_2 = -\frac{\sigma_{11} k_1^2}{\Delta_1} - \frac{\sigma_{12} k_2^2}{\Delta_2},$$

$$b = N_1 - N_2 = -\frac{\mu_1 \sigma_{11} + \mu_2 \sigma_{12}}{\mu_1 \mu_2 \sigma_{11} \sigma_{12}},$$

$$\begin{aligned}
c = S_1 - S_2 &= -(P_1 - P_2) = \\
&= \alpha \left( -\frac{\sigma_{11} \sigma_{31} - \alpha^2 + k_1^2/2}{\Delta_1/2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_{12} \sigma_{32} - \alpha^2 + k_2^2/2}{\Delta_2/2} \right),
\end{aligned}$$

$$d = R_1 - R_2 = -\frac{\sigma_{31} k_1^2}{\Delta_1} - \frac{\sigma_{32} k_2^2}{\Delta_2}.$$

Тогда обратная матрица имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}^l(\alpha) &= [\mathbf{K}_1^l(\alpha, 0) - \mathbf{K}_2^l(\alpha, 0)]^{-1} = \\
&= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & 2n_{13} \\ n_{12} & n_{11} & -2n_{13} \\ -n_{13} & n_{13} & n_{33} \end{pmatrix}. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Здесь  $D = bc^2 - abd$ , а

$$n_{11} = \frac{1}{2}(a-b)d - \frac{1}{2}c^2,$$

$$n_{12} = \frac{1}{2}(a+b)d - \frac{1}{2}c^2,$$

$$n_{13} = (-1)^l bc, \quad n_{33} = -ab.$$

#### 4. Асимптотическое решение

Рассмотрим плоскую волну, падающую из полупространства  $z < 0$  под нормальным углом к интерфейсу. Эта волна частично отражается при прохождении через границу раздела сред и частично рассеивается на трещине. Тип падающей волны можно обозначить индексом  $s$ : при  $s = 1$  — продольная (P-волна), а при  $s = 2$  — поперечная (S-волна). Поле перемещений в отсутствие трещины выражается через коэффициенты прохождения  $T_s^-$  и отражения  $R_s^-$  и имеет вид [12]

$$\mathbf{u}_s^{in} = \begin{cases} \mathbf{p}_s (e^{ik_{1s}z} + R_s^- e^{-ik_{1s}z}), & z < 0, \\ \mathbf{p}_s T_s^- e^{ik_{2s}z}, & z > 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$\boldsymbol{\tau}_s^{in} = \begin{cases} ic_{1s} k_{1s} \mathbf{p}_s (e^{ik_{1s}z} - R_s^- e^{-ik_{1s}z}), & z < 0, \\ ic_{2s} k_{2s} \mathbf{p}_s T_s^- e^{ik_{2s}z}, & z > 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где коэффициенты прохождения и отражения выражаются через волновые числа и модули упругости ( $c_{js} = \lambda_j + 2\mu_{js}$ ,  $c_{js} = \mu_{js}$ )

$$T_s^- = \frac{2c_{1s} k_{1s}}{c_{1s} k_{1s} + c_{2s} k_{2s}},$$

$$R_s^- = \frac{c_{1s} k_{1s} - c_{2s} k_{2s}}{c_{1s} k_{1s} + c_{2s} k_{2s}}.$$

Вектор  $\mathbf{p}_s$  для P-волны  $\mathbf{p}_1 = \{0, 0, 1\}$ , а для SV-волны  $\mathbf{p}_2 = \{\cos \theta, \sin \theta, 0\}$  зависит от угла поляризации  $\theta$ . С учётом представления (4.2) интегральное уравнение (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \mathbf{J}^{lm}(\alpha r) \mathbf{L}^l(\alpha) \Delta \mathbf{W}^{lm}(\alpha) \alpha d\alpha &= \\
&= -ic_{1s} k_{1s} \tilde{\mathbf{w}}_s^{lm} (1 - R_s^-). \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Здесь

$$\tilde{\mathbf{w}}_1^{lm} = \begin{cases} \{0, 0, 1\}, & l = 1, m = 0, \\ \{0, 0, 0\}, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_2^{lm} = \begin{cases} \{1, 1, 0\}, & l = 1, m = 1, \\ \{-1, 1, 0\}, & l = 2, m = 1, \\ \{0, 0, 0\}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При выводе асимптотического решения необходимо использовать предположение о малости характерного размера круговой трещины относительно длин волн, падающих на дефект [11]. Тогда для радикалов (2.2) можно использовать следующие асимптотики [13]:

$$\sigma_{1j} = \sigma_{1j} = \frac{1}{2\alpha} (2\alpha^2 - k_j^2) + o(k_j^4),$$

$$\sigma_{3j} = \frac{1}{2\alpha} (2\alpha^2 - h_j^2) + o(h_j^4).$$

Подставляя эти асимптотические выражения в матрицу  $\mathbf{L}^l(\alpha)$ , можно построить следующую асимптотику для ядра интегрального уравнения  $\mathbf{L}^l(\alpha)$  в пространстве Фурье-образов:

$$\Delta_1 = 2\mu_1\alpha^2(h_1^2 - k_1^2) + o(k_1^4),$$

$$\Delta_2 = 2\mu_2\alpha^2(h_2^2 - k_2^2) + o(k_2^4),$$

$$a \approx -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{k_1^2}{2\mu_1(h_1^2 - k_1^2)} - \frac{k_2^2}{2\mu_2(h_2^2 - k_2^2)} \right) = \frac{1}{\alpha} m_1,$$

$$b \approx -\frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = -\frac{1}{\alpha} m_2,$$

$$c \approx \frac{1}{\alpha} \left( \frac{h_1^2}{2\mu_1(h_1^2 - k_1^2)} - \frac{h_2^2}{2\mu_2(h_2^2 - k_2^2)} \right) = \frac{1}{\alpha} m_3,$$

$$d \approx \frac{1}{\alpha} m_1,$$

где

$$m_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\mu_1(\lambda_1 + \mu_1)} + \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\mu_2(\lambda_2 + \mu_2)} \right),$$

$$m_2 = \left( \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right),$$

$$m_3 = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda_1 + \mu_1} - \frac{1}{\lambda_2 + \mu_2} \right).$$

Тогда асимптотическое представление матрицы записывается в виде

$$\mathbf{L}^l(\alpha) \approx \alpha \mathbf{L}_{as},$$

где

$$\mathbf{L}_{as} = \frac{1}{2(m_1^2 - m_3^2)m_2} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \xi_{13} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \xi_{23} \\ \xi_{31} & \xi_{32} & \xi_{33} \end{pmatrix}.$$

$$\xi_{11} = \xi_{22} = m_1^2 + m_1 m_2 - m_3^2,$$

$$\xi_{12} = \xi_{21} = m_1^2 - m_1 m_2 - m_3^2,$$

$$\xi_{13} = -2\xi_{31} = -\xi_{23} = 2\xi_{32} = (-1)^l 2m_2 m_3,$$

$$\xi_{33} = 2m_1 m_2.$$

После применения к интегральному уравнению (4.3) схемы Бубнова–Галеркина с учётом обозначений (3.3) получается система уравнений, решением которой являются коэффициенты разложения (3.2)

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{t=0}^{\infty} \beta_{kt}^{lm} \int_0^{\infty} l_{ik}(\alpha) \Psi_{kt}^m(\alpha a) \Psi_{jt'}^m(\alpha a) \alpha d\alpha =$$

$$= -f_s \tilde{w}_{is}^{lm} \int_0^a \psi_{jt'}^m(r) r dr, \quad (4.4)$$

где

$$f_s = i c_{1s} k_{1s} (1 - R_s^-), \quad i = 1, 2, 3,$$

а нижний индекс  $j$  принимает значения  $j = 2, 1, 3$ , если  $l = 1$  или  $j = 1, 2, 3$  если  $l = 2$ .

Чтобы записать асимптотическое решение системы интегральных уравнений, удобно ввести

$$Y_{kt,jt'}^m = \int_0^{\infty} \Psi_{kt}^m(\alpha a) \Psi_{jt'}^m(\alpha a) \alpha d\alpha.$$

Вычисление данных интегралов с использованием формул (3.3) производится согласно формуле [15]

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at) J_{\nu}(at) \frac{dt}{t} = \frac{2 \sin(\pi/2(\nu - \mu))}{\pi (\nu^2 - \mu^2)}$$

при условии  $t = t'$ , которое необходимо для существования нетривиальных решений системы (4.4)

$$\begin{aligned} Y_{1t,1t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 5}, \\ Y_{2t,2t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 1}, \\ Y_{3t,3t}^m &= \frac{\pi a}{2} \frac{1}{4t + 2m + 3}, \\ Y_{1t,3t}^m &= \frac{a}{4t + 2m + 4}, \\ Y_{2t,3t}^m &= \frac{a}{4t + 2m + 2}, \quad Y_{1t,2t}^m = 0. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} \psi_{3t}(r) r dr = 0 \text{ при } t \neq 0,$$

то для падающей Р-волны получается система линейных алгебраических уравнений относительно  $\beta_{i0}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \beta_{10} &= -\frac{5n_{13}}{2\pi n_{12}} \beta_{30}, \quad \beta_{20} = \frac{n_{13}}{\pi n_{12}} \beta_{30}, \\ \beta_{30} &= \frac{af_1}{3g_3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} g_3 &= -\frac{1}{m_1^2 - m_3^2} \times \\ &\times \left( \frac{9m_2 m_3^2}{8\pi(m_2^2 + m_1 m_2 - m_3^2)} - \frac{\pi}{6} m_1 \right). \end{aligned}$$

Таким образом, можно получить асимптотику для скачка смещения на круговой интерфейсной трещине по формуле (3.2) в окончательном виде

$$\Delta w_k^{10}(r, \theta) = \frac{f_1 a}{g_3} \psi_{30}^0(r). \quad (4.5)$$

### Заключение

В данной работе изложена схема решения задачи о рассеянии упругих волн на интерфейсной трещине между двумя разнородными полупространствами на основе метода граничных интегральных уравнений и интегрального подхода. Данная схема может

быть обобщена на случай слоистых композитов с интерфейсными отслоениями и внутренними трещинами. В случае малых размеров трещины получено явное выражение для скачка смещений на круговой интерфейсной трещине, а именно, построена асимптотика для случая падающей под углом  $90^\circ$  к интерфейсу продольной Р-волны. Выведенное асимптотическое решение даёт возможность строить решения для распределения интерфейсных трещин в трёхмерном случае, используя подход [11] и получать оценки для пружинных граничных условий [4].

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук М.В. Голубу и канд. физ.-мат. наук А.А. Еремину за ряд ценных замечаний.

### Литература

1. *Ватulyян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М: Физматлит, 2007. 224 с.
2. *Boström A.* Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation // Applied Mechanics Reviews. 2003. No. 56. P. 383–405.
3. *Achenbach J. D.* Effects of crack geometry and material behavior on scattering by cracks. Center for Quality Engineering and Failure Prevention Northwestern University, Technical Progress Report, 1989. 20 p.
4. *Baik J. M., Thompson R. B.* Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model // Journal of Nondestructive Evaluation. 1984. No. 4. P. 177–196.
5. *Boström A., Wickham G. R.* On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks // Journal of Nondestructive Evaluation. 1991. No. 10. P. 139–149.
6. *Rokhlin S. I., Wang Y. J.* Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with an interface between two solids // Journal of the Acoustical Society of America. 1991. No. 89. P. 503–515.
7. *Boström A., Golub M.* Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 2009. No. 62. P. 39–52.
8. *Golub M. V.* Propagation of elastic waves in layered composites with microdefect concentration zones and their simulation with spring boundary conditions // Acoustical Physics. 2010. Vol. 56. Iss. 6. P. 848–855.
9. *Krenk S., Schmidt H.* Elastic wave scattering by a circular crack // Philosophical Transactions

- of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1982. no. 308. P. 167–198.
10. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
  11. Golub M. V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic wave // *Wave Motion*. 2011. Vol. 48. No. 2. P. 105–115.
  12. Гринченко В. Г., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.
  13. Глушкова Н. В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости: дисс. д-ра ... физ.-мат. наук. Краснодар, 2000. 220 с.
  14. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Ехлаков А. В. Математическая модель ультразвуковой дефектоскопии пространственных трещин // *Прикладная математика и механика*. 2002. № 66. С. 147–156.
  15. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. М: Из-во иностранной литературы, 1949. 798 с.
  7. Boström A., Golub M. Elastic SH wave propagation in a layered anisotropic plate with interface damage modelled by spring boundary conditions. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2009, no. 62, pp. 39–52.
  8. Golub M. V. Propagation of elastic waves in layered composites with microdefect concentration zones and their simulation with spring boundary conditions. *Acoustical Physics*, 2010, vol. 56, iss. 6, pp. 848–855.
  9. Krenk S., Schmidt H. Elastic Wave Scattering by a Circular Crack. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 1982, no. 308, pp. 167–198.
  10. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Zinchenko Zh. F. *Dinamica neodnorodnykh lineynno-uprugikh sred* [Dynamics heterogeneous linearly elastic medium]. Moscow, Nauka Publ., 1989. 344 p. (In Russian)
  11. Golub M. V., Boström A. Interface damage modelled by spring boundary conditions for in-plane elastic wave. *Wave Motion*, 2011, vol. 48, iss. 2, pp. 105–115.
  12. Grinchenko V. G. Meleshko V. V. *Harmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic oscillation and wave in elastic solid]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1981. 284 c. (In Russian)
  13. Glushkova N. V. *Opredelenie i uchet singulyarnykh sostavlyayushchih v zadachah teorii uprugosti. Dis. doc. fiz.-mat. nauk.* [The determination and the consideration of singular components for theory of elasticity. Phis.-math. sci. cand. diss.]. Krasnodar, 2000. 220 p. (In Russian)
  14. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Ekhlakov A. V. *Matematicheskaya model ultrazvukovoy defectoskopii prostranstvennykh treschin* [The mathematical model ultrasonic non-destructive testing nonplanar cracks]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2002, no. 66, pp. 141–149. (In Russian)
  15. Watson G. N. *Teoriya besselevykh funkciy* [A treatise on the theory Bessel functions]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1949. 798 p. (In Russian)

### References

1. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems of mechanics of deformable solid body]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007. 224 p. (In Russian)
2. Boström A. Review of hypersingular integral equation method for crack scattering and application to modeling of ultrasonic nondestructive evaluation. *Applied Mechanics Reviews*, 2003, no. 56, pp. 383–405.
3. Achenbach J. D. Effects of crack geometry and material behavior on scattering by cracks. *Center for Quality Engineering and Failure Prevention Northwestern University*, Technical Progress Report, 1989, 20 p.
4. Baik J. M., Thompson R. B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces: a quasi-static model. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 1984, no. 4, pp. 177–196.
5. Boström A., Wickham G. R. On the boundary conditions for ultrasonic transmission by partially closed cracks. *Journal of Nondestructive Evaluation*, 1991, no. 10, pp. 139–149.
6. Rokhlin S. I., Wang Y. J. Analysis of boundary conditions for elastic wave interaction with