УДК 539.3

О ТОПОЛОГИЧЕСКОМ МЕТОДЕ В ПРОБЛЕМЕ РАСПОЗНАВАНИЯ ТИПОВ И ОСОБЕННОСТЕЙ СКРЫТЫХ ДЕФЕКТОВ В МАТЕРИАЛАХ С ПОКРЫТИЯМИ

Евдокимова О. В.

ABOUT TOPOLOGICAL METHOD IN THE PROBLEM OF RECOGNIZING TYPES AND CHARACTERISTICS OF HIDDEN DEFECTS IN MATERIALS WITH COVERS

Evdokimova O. V.
Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. The possibility of the existence of defects, including not visually observed in the covers of materials is investigated. The shores of covers defects can be subject to different conditions of interaction – contact without friction, partial clutch, lacks only the individual components of stresses or displacements and others. The boundary value problem was reduced to functional equations transformed to pseudo differential equations applying the topological method. The factorization of the matrix-functions were made and the exterior forms were used to calculate the Lere residue. The solving of the Wiener and Hopf equations were performed and the estimation of the solutions were received. The recognition question of types of such defects is considered by research method of some spectral properties of boundary solutions.

Keywords: localization, stress-strain state, factorization, topology, boundary-value problems, differential equations, exterior forms

1. Развивается метод исследования скрытых дефектов в покрытиях, опирающийся на топологический подход [1, 2]. Приводится анализ дефектов на примере исследования напряженно-деформированного состояния блочной структуры, состоящей из двумерных горизонтально расположенных разнотипных блоков, контактирующих по границам между собой. Блочная структура расположена на поверхности трехмерной линейно-деформируемой подложки. Рассматриваемые блочные структуры, находятся под вертикальным гармоническим внешним воздействием. Это свойственно не только нанопокрытиям, поверхностным упрочнениям материалов, но также строению литосферных плит, исследование напряженно-деформированного состояния которых служит целям получения информации о сейсмичности территорий. Топологический подход позволяет однотипно рассматривать тела с покрытиями, как имеющими дефекты, так и не подверженными разрушению. Показано, что даже в скалярном случае лишь вертикальных воздействий существует большое разнообразие его дефектов, а не только трещин или полостей, предшествующих разрушению [3]. Последнее демонстрируется на примере блочной структуры, состоящей из двух разнотипных контактирующих полуплоскостей на трехмерной деформируемой подложке. Предложенный подход позволяет одном и тем же способом исследовать их и сопоставлять с бездефектным случаем.

2. Не вдаваясь в детали топологического решения граничных задач и факторизационных подходов, изложенных в [1, 2, 4–9], приведем определяющие уравнения для блочной структуры, состоящей из двумерных фрагментов покрытия на трехмерной подложке, сохранив обозначения работ [1, 2]. Уравнение Кирхгофа для некоторого блока b покрытия, $b = 1, 2, \ldots, B$, занимающего область Ω_b с границей $\partial\Omega_b$, при вертикальных гармонических воздействиях напряжением t_{3b} имеет

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 13-01-12003-м, 13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 13-01-96509, 15-01-01379, 15-08-01377), гранта Президента РФ НШ-1245.2014.1, Программ Президиума РАН № 3 и № 43.

вид

$$\mathbf{R}_b\left(\partial x_1, \partial x_2\right) u_{3b} - \varepsilon_{5b} g_{3b} = \varepsilon_{5b} t_{3b}, \qquad (1)$$

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = (\varepsilon_{3b}(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{4b})U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F_2} u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2} g_{3b}, \quad b = 1, 2, \ldots, B.$$

Здесь u_{3b} — амплитуда вертикальных перемещений пластины

$$\varepsilon_{1b} = 0{,}5(1-\nu_b), \quad \varepsilon_{2b} = 0{,}5(1+\nu_b),$$
$$\varepsilon_{3b}\frac{h_b^2}{12}, \quad \varepsilon_{4b} = \omega^2\rho_b\frac{1-\nu_b^2}{E_b}, \qquad (2)$$
$$\varepsilon_{5b} = \frac{1-\nu_b^2}{E_b h_b},$$

Для пластин приняты следующие обозначения: ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга, h — толщина, ρ — плотность, ω — частота колебаний, g_{3b}, t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно.

В локальной системе координат $x_1x_2x_3$ с плоскостью x_1x_2, совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3, направленной по нормали к пластине, осью ox_1, направленной по касательной к границе, осью ox_2 — по нормали к границе, граничные условия могут быть заданы любыми двумя из представленных ниже четырех соотношений, а именно:
в виде вертикального перемещения на границе

$$u_{3b} = f_1(\partial\Omega_b); \qquad (3)$$

поворота срединной плоскости вокруг оси x_1,

$$\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} = f_2(\partial\Omega_b); \qquad (4)$$

момента изгиба на границе

$$M = -D\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) = f_3(\partial\Omega_b),$$
$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}; \qquad (5)$$

перерезывающей силы на границе

$$Q = -D\left(\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_2^3} + (2-\nu)\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_1^2\partial x_2}\right) = = f_4(\partial\Omega_b). \qquad (6)$$

Соотношения между напряжениями на поверхности слоистой среды g_{kb}, $k = 1, 2, 3$ и перемещениями u_k, $k = 1, 2, 3$ имеют вид (2), где

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3)G(\alpha_1, \alpha_2)\times \times e^{-i\langle\alpha, x\rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \qquad (7)$$

$$\langle\alpha, x\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,$$

$$K(\alpha_1, \alpha_2, 0) = O(A^{-1}),$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty.$$

Здесь $K\left(\alpha_1, \alpha_2, x_3\right)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k, в частности, мероморфная. Примеры функций $K(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ для различных типов упругих сред приведены в [10–14].

3. Для рассматриваемого случая в [1, 2] построены функциональные уравнения граничной задачи для каждого блока, причем вопрос взаимодействия блоков не изучался.

Для исследования взаимодействия блоков ограничимся структурой, состоящей из двух разнотипных полубесконечных пластин Кирхгофа, контактирующих по координатной оси x_1. Тогда, отправляясь от функциональных уравнений для пластин, имеющих в общем случае вид [1, 2]

$$R_b(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})U_{3b} \equiv \equiv (\varepsilon_{3b}(\alpha_{1b}^2+\alpha_{2b}^2)^2 - \varepsilon_{4b})U_{3b} = = -\int_{\partial\Omega_b}\omega_b + \varepsilon_{5b}\mathbf{F}_2(g_{3b}+t_{3b}), \qquad (8)$$

$$b = 1{,}2, \ldots, B,$$

$$\omega_b = \varepsilon_{3b}e^{i\langle\alpha, x\rangle}\Bigg\{-\left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + \right. \left. + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2} - 2i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right]dx_1 + + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b}\right]dx_2\Bigg\},$$

в частном случае для прямолинейной границы дефекта, где индекс λ указывает на левый берег, r — на правый берег получим форму

$$\omega_b = \varepsilon_{3b} e^{i\langle\alpha,x\rangle} \Big\{ -\Big[i\alpha_2 M D^{-1} - Q D^{-1} - \\ - (\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2) \frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2^r} + \\ + i\alpha_2 \left[\alpha_2^2 + (2-\nu)\alpha_1^2\right] u_{3b} \Big] \Big\} dx_1, \quad b = \lambda, r.$$

На левом берегу имеем псевдодифференциальные уравнениия вида

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \Big\langle - \int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \Big\{ i\alpha_{21-} D_\lambda^{-1} M_\lambda - D_\lambda^{-1} Q_\lambda - \\ - (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2^\lambda} + \\ + i\alpha_{21-} \left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1^\lambda x_1^\lambda} dx_1^\lambda + \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2 (g_{3\lambda} + t_{3\lambda}) \Big\rangle = 0, \quad (9)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{21-}, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \Big\langle - \int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}} \Big\{ i\alpha_{22-} D_\lambda^{-1} M_\lambda - D_\lambda^{-1} Q_\lambda - \\ - (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2^\lambda} + \\ + i\alpha_{22-} \left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda} \Big\} \times \\ \times e^{i\alpha_1^\lambda x_1^\lambda} dx_1^\lambda + \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2 (g_{3\lambda} + t_{3\lambda}) \Big\rangle = 0, \quad (10)$$

$$\alpha_2 = \alpha_{22-}, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_{b\lambda}.$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{-1}$ — обратный оператор к одномерному преобразованию Фурье. Осуществив замену λ на r и α_{mn-} на α_{mn+} получим псевдодифференциальные уравнения на правом берегу разлома.

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{21-} = -i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 - \sqrt{\varepsilon_{4\lambda}/\varepsilon_{3\lambda}}},$$

$$\alpha_{22-} = -i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 + \sqrt{\varepsilon_{4\lambda}/\varepsilon_{3\lambda}}},$$

$$\alpha_{21+} = i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 - \sqrt{\varepsilon_{4r}/\varepsilon_{3r}}},$$

$$\alpha_{22+} = i\sqrt{(\alpha_1^r)^2 + \sqrt{\varepsilon_{4r}/\varepsilon_{3r}}}.$$

Введем следующую систему обозначений

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_\mathbf{r} = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_\mathbf{r} = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1) g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) g,$$

$$y_{1\lambda} = D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$

$$y_{1r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r,$$

$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$

$$z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_\mathbf{r} = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(g_\lambda + t_\lambda),$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{5\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22-})(g_\lambda + t_\lambda),$$

$$k_{1r} = \varepsilon_{5r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(g_r + t_r),$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{5r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22+})(g_r + t_r).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде матричной системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\lambda \mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0, \\ \mathbf{A}_r \mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_\lambda = \begin{pmatrix} a_{11\lambda} & a_{12\lambda} \\ a_{21\lambda} & a_{22\lambda} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_\lambda = \begin{pmatrix} b_{11\lambda} & b_{12\lambda} \\ b_{21\lambda} & b_{22\lambda} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_r = \begin{pmatrix} a_{11r} & a_{12r} \\ a_{21r} & a_{22r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_r = \begin{pmatrix} b_{11r} & b_{12r} \\ b_{21r} & b_{22r} \end{pmatrix}.$$

$$a_{11\lambda} = -i\alpha_{21-}, \quad a_{12\lambda} = 1,$$

$$a_{21\lambda} = -i\alpha_{22-}, \quad a_{22\lambda} = 1,$$

$$b_{11\lambda} = (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2),$$

$$b_{12\lambda} = -i\alpha_{21-} \left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$b_{21\lambda} = (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2),$$

$$b_{22\lambda} = -i\alpha_{22-} \left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right],$$

$$a_{11r} = -i\alpha_{21+}, \quad a_{12r} = 1,$$

$$a_{21r} = i\alpha_{22+}, \quad a_{22r} = 1,$$
$$b_{11r} = (\alpha_{21+}^2 + \nu_r\alpha_1^2),$$
$$b_{12r} = -i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right],$$
$$b_{21r} = (\alpha_{22+}^2 + \nu_r\alpha_1^2),$$
$$b_{22r} = -i\alpha_{22+}\left[\,\alpha_{22+}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\,\right].$$

Достоинство топологического метода решения граничных задач состоит в том, что он охватывает все естественные виды граничных условий, которые могут быть сформулированы на дефектах, трещинах или разломах, и независимо от типа нагружения покрытий позволяет однотипно исследовать граничную задачу. Рассматривая псевдодифференциальные уравнения, можно видеть, что для случая только вертикальных воздействий на покрытие существует множество соотношений между напряжениями и перемещениями, действующими на берега трещины, характеризующих дефект — потенциальную возможность разрушения целостности покрытия. Некоторые из типов разрушений могут оказаться безопасными для эксплуатации изделия с покрытием, в то время как другие могут оказаться недопустимыми. Для выявления состояния покрытия с трещинами необходим детальный анализ решений граничной задачи.

Рассмотрим несколько примеров треснувших покрытий. При отсутствии дефекта напряжения и перемещения берегов трещины обязаны совпадать.

Рассмотрим тот случай, когда дефект представляет свободные от напряжений края трещины, то есть $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y}_r = 0$. Тогда из системы (11) находим

$$\mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda, \quad \mathbf{Z}_r = -\mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r. \tag{12}$$

Рассмотрим случай, когда берега дефекта жестко закреплены, не могут смещаться, то есть $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r = 0$. Тогда имеем решение в форме

$$\mathbf{Y}_\lambda = -\mathbf{A}_\lambda^{-\mathbf{1}}\mathbf{K}_\lambda, \quad \mathbf{Y_r} = -\mathbf{A_r^{-1}}\mathbf{K_r} \tag{13}$$

Рассмотрим случай, когда $\mathbf{Z}_\lambda = \mathbf{Z}_r$, и $y_{1\lambda} = y_{1r} = 0$. Тогда, решение дается соотношениями

$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = -\mathbf{C}_{\lambda r}^{-1}(\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{K}_r),$$
$$\mathbf{C}_\lambda = \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda, \quad \mathbf{C}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\mathbf{A}_r,$$

$$\mathbf{C}_{\lambda r} = \begin{pmatrix} c_{12\lambda} & -c_{12r} \\ c_{22\lambda} & -c_{22r} \end{pmatrix}, \tag{14}$$
$$\mathbf{Y}_{\lambda r} = \{y_{2\lambda}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Y}_\lambda = \{0, y_{2\lambda}\},$$
$$\mathbf{Y}_r = \{0, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = -\mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{A}_\lambda\mathbf{Y}_\lambda - \mathbf{B}_\lambda^{-1}\mathbf{K}_\lambda.$$

Этот случай можно отнести к категории наличия скрытого дефекта, не наблюдаемого визуально, поскольку перемещения и углы поворота пластин на дефекте непрерывны. Тем не менее имеет место нарушение связности для компоненты напряжений, что свидетельствует о присутствии дефекта. Подобные примеры различных типов дефектов, трещин или разломов можно продолжить.

Таким образом, из приведенных примеров видно, что топологический метод для данного типа граничных задач удобен и однотипно позволяет исследовать задачи как с дефектами всех типов, так и при их отсутствии.

Выписав все псевдодифференциальные уравнения для каждого участка границы и для каждого блока, внеся в них соответствующие граничные условия и решив извлеченные из псевдодифференциальных уравнений интегральные уравнения, получим из (8) представление решений в каждом блоке (полуплоскости) в виде

$$u_{3\lambda} = \mathbf{F}_2^{-1}\left[R_\lambda(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda) \right\rangle, \tag{15}$$

$$u_{3r} = \mathbf{F}_2^{-1}\left[R_r(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r} \omega_r + \varepsilon_{5r}\mathbf{F}_2(g_r + t_r) \right\rangle.$$

3. Представим соотношение (7), при $x_3 = 0$ в виде

$$\mathbf{P}_\lambda u_3(x_1, x_2{,}0) + \mathbf{P}_r u_3(x_1, x_2{,}0) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}K(\alpha_1, \alpha_2{,}0) \times \\ \times \left[G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) + G_r(\alpha_1, \alpha_2)\right], \tag{16}$$
$$G_\lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_\lambda g(x_1, x_2),$$
$$G_r(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2\mathbf{P}_r g(x_1, x_2).$$

Здесь $\mathbf{P}_\lambda$, $\mathbf{P}_r$ — проекторы на левую и правую полуплоскости, являющиеся носителями соответствующих плит. Внося соотношения

(15) в левые части (16) и применив преобразования Фурье, получим соотношения вида

$$
\begin{gathered}
[R_\lambda(-i\alpha_1,-i\alpha_2)]^{-1}\times\\
\times\left\langle-\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda+\varepsilon_{5\lambda}(G_\lambda+T_\lambda)\right\rangle+\\
+[R_r(-i\alpha_1,-i\alpha_2)]^{-1}\times\\
\times\left\langle-\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r+\varepsilon_{5r}(G_r+T_r)\right\rangle-\\
-K(\alpha_1,\alpha_2,0)\left[G_\lambda(\alpha_1,\alpha_2)+G_r(\alpha_1,\alpha_2)\right]=0,
\end{gathered}
$$

$$
T_\lambda=\mathbf{F}_2t_\lambda(x_1,x_2),\quad T_r=\mathbf{F}_2t_r(x_1,x_2).
$$

Функции $G_\lambda(\alpha_1,\alpha_2)$, $G_r(\alpha_1,\alpha_2)$ как преобразования Фурье функций с носителями в полуплоскостях — регулярные функции параметра α_2 при фиксированном α_1 в левой и правой полуплоскостях соответственно. В связи с этим можно ввести обозначения

$$
G_\lambda(\alpha_1,\alpha_2)=G_-(\alpha_1,\alpha_2),
$$

$$
G_r(\alpha_1,\alpha_2)=G_+(\alpha_1,\alpha_2).
$$

Внося эти обозначения в предыдущее соотношение, приходим к матричному функциональному уравнению Винера–Хопфа следующего вида:

$$
\mathbf{M}\mathbf{G}_+=\mathbf{G}_-+\mathbf{V},
$$

$$
\begin{gathered}
\mathbf{M}=\mathbf{K}_1^{-1}\mathbf{K}_2,\\
\mathbf{K}_2=\varepsilon_{5r}\mathbf{R}_r^{-1}-\mathbf{K},\\
\mathbf{K}_1=\mathbf{K}-\varepsilon_{5\lambda}\mathbf{R}_\lambda^{-1},
\end{gathered}\tag{17}
$$

$$
\mathbf{V}=\mathbf{K}_1^{-1}\left(\mathbf{R}_\lambda^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\omega_\lambda+\mathbf{R}_r^{-1}\int\limits_{\partial\Omega_r}\omega_r-\right.\\
\left.-\varepsilon_\lambda\mathbf{R}_\lambda^{-1}\mathbf{T}_\lambda-\varepsilon_r\mathbf{R}_r^{-1}\mathbf{T}_r\right).
$$

Последнее эквивалентно системе интегральных уравненияй Винера–Хопфа

$$
\begin{gathered}
\int\limits_0^\infty\mathbf{m}(x-\xi)\mathbf{g}(\xi)d\xi=\mathbf{v}^+(x),\\
\mathbf{m}(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{M}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,\\
\mathbf{v}^+(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{V}(\alpha)e^{-i\alpha x}d\alpha,\\
x\geqslant 0.
\end{gathered}\tag{18}
$$

Способы построения его точных или приближенных решений для разричных свойств символа $\mathbf{M}(\alpha)$ можно найти в работах [10–15].

Учитывая, что при $\alpha_2\to\pm\infty$ имеет место соотношение $M\to\mathrm{const}$, а факторизация матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha)$ выполнима, решение может быть записано в форме

$$
\begin{gathered}
G_+=M_+^{-1}\left\{M_-^{-1}V\right\}^+,\\
G_-=-M_-\left\{M_-^{-1}V\right\}^-,\\
M=M_+M_-,\\
M_-^{-1}V=\left\{M_-^{-1}V\right\}^++\left\{M_-^{-1}V\right\}^-.
\end{gathered}
$$

Здесь приняты обозначения работы [11].

Построенные таким образом решения обладают следующей структурой:

$$
\begin{aligned}
G_+(\alpha_1,\alpha_2)=C_{1+}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})+\\
+C_{2+}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})+\\
+C_{3+}(\alpha_1,\alpha_2),
\end{aligned}\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
G_-(\alpha_1,\alpha_2)=C_{1-}(\alpha_1,\alpha_2)G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})+\\
+C_{2-}(\alpha_1,\alpha_2)G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})+C_{3-}(\alpha_1,\alpha_2).
\end{aligned}
$$

Здесь функции $C_{n+}(\alpha_1,\alpha_2)$, $C_{n-}(\alpha_1,\alpha_2)$, $n=1,2,3$, являются известными, а $G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})$, $G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})$ требуется определить. Для их определения положим в первом уравнении $\alpha_2=\alpha_{2+}$, а во втором — $\alpha_2=\alpha_{2-}$. Получаем алгебраическую систему для определения неизвестных $G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})$, $G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})$

$$
\begin{aligned}
G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})=C_{1+}(\alpha_1,\alpha_{2+})G_+(\alpha_1,\alpha_{2+})+\\
+C_{2+}(\alpha_1,\alpha_{2+})G_-(\alpha_1,\alpha_{2-})+C_{3+}(\alpha_1,\alpha_{2+}),
\end{aligned}
$$

$$G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) = C_{1-}(\alpha_1,\alpha_{2-})G_+(\alpha_1,\alpha_{2+}) + \\ + C_{2-}(\alpha_1,\alpha_{2-})G_-(\alpha_1,\alpha_{2-}) + C_{3-}(\alpha_1,\alpha_{2-}),$$

из которой легко находятся искомые функции.

Внесение найденных решений в соотношения (12)–(14) с последующим использованием соотношений (19), (16) дает возможность полностью определить напряженно-деформированное состояние покрытия с любым из рассматриваемых дефектов или без них.

Предложенный топологический метод исследования граничных задач для тел с покрытиями позволяет для случая вертикальных гармонических воздействий однотипно исследовать все естественные случаи подобных дефектов.

Для распознавания типов скрытых дефектов, не поддающихся выявлению методами поверхностной дефектоскопии, а также рентгеноскопическими методами ввиду их вертикального положения, и исследования их возможного поведения при нагрузках предлагается метод горизонтального зондирования, состоящий в анализе спектра как проходящих через зону дефекта сигналов, так и отраженных от нее. С этой целью рассмотрим граничную задачу в предположении, что на поверхность подложки в точке x_{10}, x_{20}, $x_{20} < 0$ действует сосредоточенный гармонический источник с заданной амплитудой вида $A\delta(x_1 - x_{10}, x_2 - x_{20})e^{-i\omega t}$. Тогда из соотношений (15)

$$u_{3\lambda}(x_1,x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}\left[R_\lambda(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda)\right\rangle,$$

получим представление

$$u_{3\lambda}(x_1,x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\omega) = \left[R_\lambda(-i\alpha_1,-i\alpha_2)\right]^{-1} \times \\ \times \left\langle -\int_{\partial\Omega_\lambda} \omega_\lambda + \varepsilon_{5\lambda}\mathbf{F}_2(g_\lambda + t_\lambda)\right\rangle.$$

Для оценки функции $u_{3\lambda}(x_1,x_2)$ в разных зонах произведем факторизацию функции $T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)$ по параметру α_2 в виде суммы. В результате имеем

$$T(\alpha_1,\alpha_2,\omega) = \\ = \{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^+ + \{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^-,$$

$$\{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^+ = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{T(\alpha_1,\xi,\omega)}{(\xi-\alpha_2)}d\xi,$$

$$\operatorname{Im}\alpha_2 > 0,$$

$$\{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^- = \\ = T(\alpha_1,\alpha_2,\omega) - \{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^+,$$

Здесь приняты обозначения работы [11]. Таким образом, получаются следующие представления решений в различных зонах на поверхности покрытий

$$u_{3\lambda}(x_1,x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}\{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^-,$$

$$-\infty < x_2 < x_{20},$$

$$u_{3\lambda}(x_1,x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}\{T(\alpha_1,\alpha_2,\omega)\}^+,$$

$$x_{20} < x_2 < 0.$$

Аналогичным образом строятся представления смещения поверхности правой полуплоскости покрытия. Выбирая различные значения частоты ω источника, получаем спектральные функции поверхностей покрытий в каждой зоне. Таким образом, топологический подход значительно упрощает анализ поведения проходящих и отраженных сигналов через зону дефекта.

Рассматривая в зоне дефекта различные условия контакта берегов, для каждого случая получаем свой паспорт спектральной функции, что позволяет распознавать состояние дефекта и ожидаемое его поведение.

Литература

1. *Бабешко В. А., Ритцер Д., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г.* К теории прогноза сейсмичности на основе механической концепции, топологический подход // ДАН. 2013. Т. 450. № 2. С. 166-170.
2. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Федоренко А. Г., Шестопалов В. Л.* К проблеме покрытий с трещинами в сейсмологии и наноматериалах // МТТ. 2013. № 5. С. 39–45.

3. *Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р.* К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей трещин // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 6. С. 767–770.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 163–167.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
7. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об автоморфизме и псевдодифференциальных уравнениях в методе блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 438. № 5. С. 623–625.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М, Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
10. *Бабешко В. А. Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.
11. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М., Наука, 1979. 320 с.
12. *Бабешко В. А.* О системах интегральных уравнений динамических контактных задач // Доклады АН СССР. 1975. Т. 220. № 6. С. 1293–1296.
13. *Бабешко В. А.* Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. Вып. 3. С. 505–512.
14. *Бабешко В. А.* Факторизация одного класса матриц-функций и ее приложения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 223. № 5. С. 1094–1097.
15. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.

References

1. Babeshko V. A., Rittser D., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Fedorenko A. G. K teorii prognoza seysmichnosti na osnove mekhanicheskoy kontseptsii, topologicheskiy podkhod [The theory of prediction of seismicity based on mechanical concepts, topological approach]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2013, vol. 450, no. 2, pp. 166–170. (In Russian)
2. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Fedorenko A. G., Shestopalov V. L. K probleme pokrytiy s treshchinami v seysmologii i nanomaterialakh [To the problem of coatings with cracks in seismology and nanomaterials]. Mekhanika tverdogo tela [Rigid body mechanics], 2013, no. 5, pp. 39–45. (In Russian)
3. Babeshko V. A., Pavlova A. V., Ratner S. V., Vil'yams R. K resheniyu zadachi o vibratsii uprugogo tela, soderzhashchego sistemu vnutrennikh polostey treshchin [To solve the problem of vibration of an elastic body containing internal cavities cracks]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2002, vol. 382, no. 5, pp. 625–628. (In Russian)
4. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii v kraevykh zadachakh v neogranichennykh oblastyakh [Method of factorization in boundary value problems in unbounded domains]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2003, vol. 392, no. 6, pp. 767–770. (In Russian)
5. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matritsfunktsiy [Formula some factorization of meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)
6. Babeshko V. A., Babeshko O. M. Metod faktorizatsii resheniya nekotorykh kraevykh zadach [Method of factorization of the solution of some boundary value problems]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2003, vol. 389, no. 2, pp. 184–188. (In Russian)
7. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. Ob avtomorfizme i psevdodifferentsial'nykh uravneniyakh v metode blochnogo elementa [About the automorphism and pseudo-differential equations in method block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2011, vol. 438, no. 5, pp. 623–625. (In Russian)
8. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. K probleme issledovaniya materialov s pokrytiyami [The problem of research of materials with coatings]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 1, pp. 49–52. (In Russian)
9. Babeshko V. A., Babeshko O. M, Evdokimova O. V. K probleme otsenki sostoyaniya materialov s pokrytiyami [The problem of assessing the condition of coated materials]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2006, vol. 409, no. 4, pp. 481–485. (In Russian)
10. Babeshko V. A. Belyankova T. I., Kalinchuk

V. V. Metod fiktivnogo pogloshcheniya v zadachakh teorii uprugosti dlya neodnorodnogo poluprostranstva [The method of fictitious absorption in the problems of elasticity theory for nonhomogeneous half-space]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2002, vol. 66, iss. 2, pp. 276–284. (In Russian)

11. Vorovich I. I., Babeshko V. A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)
12. Babeshko V. A. O sistemakh integral'nykh uravneniy dinamicheskikh kontaktnykh zadach [About the systems of integral equations of dynamic contact problems]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 220, no. 6, pp. 1293–1296. (In Russian)
13. Babeshko V. A. Staticheskie i dinamicheskie kontaktnye zadachi so stsepleniem [Static and dynamic contact problems with adhesion]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1975, vol. 39, iss. 3, pp. 505–512. (In Russian)
14. Babeshko V. A. Faktorizatsiya odnogo klassa matrits-funktsiy i ee prilozheniya [Factorization of a class of matrix functions and its applications]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1975, vol. 223, no. 5, pp. 1094–1097. (In Russian)
15. Babeshko V. A., Evdokimova O. V., Babeshko O. M. *Ob odnoy faktorizatsionnoy zadache Gil'berta–Vinera i metode blochnogo elementa* [About one factorization problem of Hilbert–Wiener method and block element]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (In Russian)

Статья поступила 31 мая 2015 г.