

УДК 539.3

## ПЛОСКИЕ ВОЛНЫ И ФУНКЦИИ ГРИНА В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ДВИЖУЩИХСЯ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ИСТОЧНИКАХ

Калинина Т. И., Наседкин А. В.

PLANE WAVES AND GREEN'S FUNCTIONS IN PIEZOELECTRIC SPACE UNDER  
MOVING OSCILLATING SOURCES

Kalinina T. I. \*, Nasedkin A. V. \*\*

\* Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Rostov Region, Novocherkassk, 346428,  
Russia

\*\* Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia  
e-mail: kalinina-toma@yandex.ru

*Abstract.* The problems of harmonic concentrated point source motion with constant velocity in unbounded homogeneous piezoelectric (electroelastic) three-dimensional medium are considered. The properties of plane waves and their characteristic surfaces such as phase velocity, slowness and ray or group velocity are established in a moving coordinate system.

The use of the principle of limiting absorption, Fourier integral transform techniques and the properties of plane waves was enabled to obtain an explicit representation for harmonic piezoelectric Green's tensor for all behaviors of the source motion as a sum of the integrals over the surface of a unit sphere. The quasistatic and dynamic components of the Green's tensor are also extracted.

The multidimensional stationary phase method is employed to derive an asymptotic approximation at the far field. Simple formulae for the Poynting energy flux vectors for moving and stationary observers are also presented. It was noted that in far zone the wave fields are subdivided into separate spherical waves under kinematics and energy.

It is shown that motion brings some difference in the far field properties, exemplified by the modification of the wave propagation zones and the change in their number, emergence of fast and slow waves under trans- and superseismic motions and etc. It is noted that, as in other problems with trans- and superseismic moving sources, the slow waves in the piezoelectric space transfer the negative energy, measured by moving observer.

*Keywords:* piezoelectricity, fundamental solutions, moving oscillating source, plane waves, far field, group velocity, wave energy

### Введение

Основным объектом исследований данной работы являются плоские волны и функции Грина или фундаментальные решения (ФР) для однородного электроупругого (пьезоэлектрического) пространства при движущихся с постоянной скоростью пульсирующих внешних воздействиях. Хотя сами по себе функции Грина внутри бесконечного пространства представляют лишь абстрактный интерес, эти решения могут использоваться

для построения граничных интегральных уравнений и в методе граничных элементов.

Следуя [1, 2], будем придерживаться следующей терминологии. Задачу с перемещающимся с постоянной скоростью  $\mathbf{w}$  и одновременно осциллирующим с частотой  $\omega$  источником волн назовем задачей  $B$ . При  $\mathbf{w} = 0$ ,  $\omega \neq 0$  имеем задачу об установившихся колебаниях, которую будем называть задачей  $A$ . Если же источник только движется, т.е.

Калинина Тамара Ишполитовна, ассистент кафедры высшей математики Южно-Российского государственного политехнического университета (НПИ) имени М. И. Платова; e-mail: kalinina-toma@yandex.ru.

Наседкин Андрей Викторович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Южного федерального университета; e-mail: nasedkin@math.sfedu.ru.

Работа второго автора выполнена при поддержке проекта № 1105 организации проведения научных исследований в рамках базовой части задания на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности Минобрнауки России.

$\mathbf{w} \neq 0$ ,  $\omega = 0$ , то такую задачу будем именовать задачей  $B$ .

Для упругих сред задачи  $A - B$  во взаимосвязи впервые были изучены А.В. Белоконем и И.И. Воровичем в [1, 2] и других работах тех же авторов. В [3] были установлены общие энергетические принципы для задач  $B$ . В дальнейшем были исследованы основные задачи  $B$  теории упругости. Между тем, задачи  $B$  для пьезоэлектрических сред ранее были рассмотрены только в двумерной постановке [4], хотя ФР для соответствующих задач  $A$  были построены и исследованы значительно подробнее [5–8]. Отметим, что функции Грина задач электроупругости отличаются от аналогичных функций задач теории упругости из-за связанности механических и электрических полей и наличия отдельного квазистатического электрического потенциала.

### 1. Постановка задачи

Пусть  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  — неподвижная декартова система координат, отнесенная к рассматриваемой электроупругой среде;  $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$  — вектор пространственных координат;  $\tau$  — время;  $\mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}, \tau)$  — вектор перемещений;  $\varphi(\boldsymbol{\xi}, \tau)$  — электрический потенциал;  $\mathbf{c}^E$  — матрица размера  $6 \times 6$  упругих модулей  $c_{\alpha\beta}^E$ , измеренных при постоянном электрическом поле;  $\boldsymbol{\epsilon}^S$  — матрица размера  $3 \times 3$  диэлектрических проницаемостей  $\epsilon_{ij}^S$ , измеренных при постоянных деформациях;  $\mathbf{e}$  — матрица размера  $3 \times 6$  пьезомодулей  $e_{i\alpha}$  электроупругой среды в этой системе координат ( $i, j = \overline{1, 3}$ ;  $\alpha, \beta = \overline{1, 6}$ ).

Предположим, что источник колебаний является сосредоточенным и движется в пространстве с постоянной скоростью  $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ , одновременно осциллируя с частотой  $\omega$ , т.е.

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, \tau) \\ q(\boldsymbol{\xi}, \tau) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_0 \mathbf{l} \\ q_0 \end{array} \right\} \delta(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{w}\tau) e^{i\omega\tau}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{f}$  — массовая сила;  $q$  — электрический заряд;  $f_0, q_0$  — константы;  $\mathbf{l}$  — единичный направляющий вектор силы  $\mathbf{f}$ .

Введем в рассмотрение подвижную систему координат  $O'x_1x_2x_3$ , движущуюся относительно неподвижной системы  $O\xi_1\xi_2\xi_3$  со скоростью источника  $\mathbf{w}$ . Время в подвижной системе координат обозначим через  $t$ , а вектор пространственных координат — через  $\mathbf{x}$ .

Эти две системы координат связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} - \mathbf{w}\tau, \quad t = \tau, \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j}, \\ j &= \overline{1, 3}, \\ \partial_\tau &= \partial_t - \mathbf{w} \nabla, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\nabla = \{\partial_1, \partial_2, \partial_3\}, \quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где запись  $\mathbf{a} \mathbf{b}$  для векторов, матриц или тензоров означает операцию скалярного или внутреннего произведения, например,  $\mathbf{w} \nabla = w_j \partial_j$ ,  $\mathbf{\Gamma} \mathbf{v} = \Gamma_{ij} v_j \mathbf{e}_i$  ( $\mathbf{e}_i$  — орты декартовой системы координат) и т.д.

Пусть при действии источника (1.1) для перемещений  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  и электрического потенциала  $\varphi(\mathbf{x}, t)$  в подвижной системе координат (1.2) существует режим установившихся колебаний:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t), \\ \varphi &= \psi(\mathbf{x}) \exp(i\omega t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Записав уравнения электроупругости [9] в подвижной системе координат (1.2) с учетом (1.3), для амплитудных функций  $\mathbf{v}$  и  $\psi$  из (1.4) будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho(i\omega - \mathbf{w} \nabla)^2 \mathbf{v} - \\ - \mathbf{\Gamma}(\nabla) \mathbf{v} - \gamma(\nabla) \psi = f_0 \mathbf{l} \delta(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\gamma^*(\nabla) \mathbf{v} - \epsilon(\nabla) \psi = -q_0 \delta(\mathbf{x}), \quad (1.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}(\nabla) &= \mathbf{L}^*(\nabla) \mathbf{c}^E \mathbf{L}(\nabla), \\ \gamma(\nabla) &= \mathbf{L}^*(\nabla) \mathbf{e}^* \nabla, \quad \epsilon(\nabla) = \nabla^* \boldsymbol{\epsilon}^S \nabla, \\ \mathbf{L}^*(\nabla) &= \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ 0 & \partial_2 & 0 & \partial_3 & 0 & \partial_1 \\ 0 & 0 & \partial_3 & \partial_2 & \partial_1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для выделения единственного решения системы (1.5), (1.6) будем использовать принцип предельного поглощения, согласно которому перейдем к  $\varepsilon$ -задаче, заменив в (1.5), (1.6)  $\mathbf{v}$  на  $\mathbf{v}_\varepsilon$ ,  $\psi$  на  $\psi_\varepsilon$ ,  $\omega$  на  $\omega_\varepsilon = \omega - i\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon \ll 1$ . По принципу предельного поглощения под решением  $\{\mathbf{v}, \psi\}$  будем понимать предел решения  $\{\mathbf{v}_\varepsilon, \psi_\varepsilon\}$  системы уравнений (1.5), (1.6) для  $\varepsilon$ -задачи при  $\varepsilon \rightarrow +0$ :

$$\mathbf{v} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{v}_\varepsilon, \quad \psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \psi_\varepsilon.$$

Отметим, что глубокий математический анализ взаимосвязи различных принципов выделения единственных решений в задачах  $A$  для неограниченных и полуограниченных сред был дан в исследованиях И. И. Воровича и В. А. Бабешко, обобщенно представленных в фундаментальной монографии [10].

## 2. Плоские волны и их основные характеристики

Плоские объемные волны являются решениями однородной системы (1.5), (1.6) вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= A_v \mathbf{p} \exp(-\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}), \\ \psi(\mathbf{x}) &= A_\psi \exp(-\boldsymbol{\alpha} \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $A_v, A_\psi$  — амплитуды,  $\mathbf{p}$  — единичный вектор поляризации ( $|\mathbf{p}| = 1$ ),  $\boldsymbol{\alpha}$  — волновой вектор ( $\boldsymbol{\alpha} = \alpha \mathbf{n}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$ ,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор волновой нормали).

Подстановка (2.1) в (1.5), (1.6) приводит к задаче на собственные значения

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{n}) \mathbf{p} = \rho \nu^2(\mathbf{n}) \mathbf{p}, \quad (2.2)$$

где

$$\nu^2(\mathbf{n}) = (c_p^B(\mathbf{n}) + w_n)^2, \quad (2.3)$$

$$w_n = \mathbf{w} \mathbf{n} = w_j n_j;$$

$\nu(\mathbf{n}) = c_p^A(\mathbf{n})$  — фазовая скорость плоских волн в задаче  $A$ ;  $c_p^B(\mathbf{n}) = \omega/\alpha$  — фазовая скорость плоских волн в задаче  $B$ ;  $\tilde{\Gamma}(\mathbf{n}) = \Gamma(\mathbf{n}) + \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{n}) \otimes \boldsymbol{\gamma}^*(\mathbf{n})/\epsilon(\mathbf{n})$  — акустический тензор Кристоффеля (модифицированный за счет пьезоэффекта).

Как хорошо известно [9], в задаче  $A$  для любого направления  $\mathbf{n}$  существуют три плоские волны с фазовыми скоростями  $\nu_j(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n})$ ;  $c_{pj}^A(\mathbf{n}) > 0$ ;  $j = \overline{1, 3}$  и с векторами поляризации (собственными векторами)  $\mathbf{p}_j$ , которые можно выбрать ортонормированными. В задаче  $B$ , как видно из (2.3), для прямых ( $c_{pj}^B > 0$ ) плоских волн при фиксированных  $\mathbf{n}$  и  $j \in \{1, 2, 3\}$  возможны три различные ситуации:

$$\begin{aligned} (c_{pj}^A(\mathbf{n}) > w_n) \wedge (c_{pj}^A(\mathbf{n}) \geq -w_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow c_{pj}^B(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} c_{pj}^A(\mathbf{n}) < -w_n \Rightarrow \\ \Rightarrow c_{pj}^{Bk}(\mathbf{n}) = (-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n; \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$k = 0, 1,$$

$$c_{pj}^A(\mathbf{n}) \leq w_n \Rightarrow \emptyset. \quad (2.6)$$

Таким образом, в условиях (2.4) имеем одну волну, в условиях (2.5) — две ( $k = 0$  — быстрая,  $k = 1$  — медленная), а в условиях (2.6) прямые плоские волны отсутствуют. Векторы поляризации  $\mathbf{p}_j$  плоских волн задач  $A$  и  $B$  идентичны, за исключением случая (2.6), причем при (2.5) быстрая и медленная волны имеют один и тот же вектор поляризации. Случаи (2.4), (2.5) можно обозначить единым образом:  $c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = (-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n$ , ( $k = 0$ )  $\vee$  ( $k = 0, 1$ ), т.е. для (2.4)  $c_{pj}^B = c_{pj}^{B(0)}$ .

Если для  $\forall \mathbf{n}, \forall j \in \{1, 2, 3\}$  выполняется условие (2.4), то режим движения источника назовем досейсмическим, в противном случае — транс- или сверхсейсмическим.

Введем векторы фазовых скоростей  $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}$  и обратных скоростей (векторы рефракции или медленностей)  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$  по формулам:

$$\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}) = c_{pj}^{B(k)} \mathbf{n} = (-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n \mathbf{n}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{L}_j^{B(k)} = \mathbf{n}/c_{pj}^{B(k)}, \quad (2.8)$$

где  $\mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n}) = c_{pj}^A(\mathbf{n}) \mathbf{n}$ .

Дисперсионное уравнение задачи  $B$  для плоских волн (1.4), (2.1) имеет вид ( $\Omega(\boldsymbol{\alpha}) = \omega + \mathbf{w} \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{E}$  — единичная матрица):

$$D_B(\boldsymbol{\alpha}, \omega) = \det [\tilde{\Gamma}(\boldsymbol{\alpha}) - \rho \Omega^2(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{E}] = 0. \quad (2.9)$$

Решение уравнения (2.9) можно представить в виде набора гиперповерхностей

$$\omega = \omega_j^{B(k)}(\boldsymbol{\alpha}) = \alpha c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}); \quad (2.10)$$

$$j = \overline{1, 3}.$$

По (2.10) вектор групповой скорости  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = \mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n})$  находится следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{gj}^{B(k)} &= \frac{\partial \omega_j^{B(k)}(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \\ &= \mathbf{c}_{pj}^{B(k)} + (\mathbf{E} - \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}^*) \frac{\partial c_{pj}^{B(k)}}{\partial \mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

или, с учетом (2.7), в виде

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = (-1)^k \mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n}) - \mathbf{w}, \quad (2.12)$$

где  $\mathbf{c}_{gj}^A(\mathbf{n})$  — вектор групповой скорости задачи  $A$ .

Как можно показать, для плоских волн задачи  $B$  имеют место следующие важные соотношения (известные для задач  $A$  [9] и  $B$  [11] для упругих сред)

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} \mathbf{n} = c_{pj}^{B(k)}, \quad \mathbf{c}_{gj}^{B(k)} \mathbf{L}_j^{B(k)} = 1, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{n} d\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} = 0, \quad \mathbf{c}_{gj}^{B(k)} d\mathbf{L}_j^{B(k)} = 0, \quad (2.14)$$

причем в (2.13), (2.14) суммирование по повторяющимся индексам  $j$  и  $k$  нет.

Используя (2.13), (2.14), можно установить свойства поверхностей фазовых скоростей  $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n})$ , поверхностей рефракции (обратных скоростей или медленностей)  $\mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n})$  и волновых поверхностей (поверхностей групповых или лучевых скоростей)  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n})$ . Все эти поверхности в задачах  $B$  при  $\mathbf{w} \neq 0$ , вообще говоря, не имеют центральной симметрии  $\mathbf{n} \leftrightarrow (-\mathbf{n})$ , у них также не сохраняется и симметрия, связанная с кристаллографической структурой. Поверхности фазовых и групповых скоростей ( $\mathbf{c}_{pj}^{B(k)}$  и  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ ) ограничены при любых  $\mathbf{w}$ . Но поверхности рефракции  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$  в зависимости от режима движения источника, т.е. значения скорости  $w = |\mathbf{w}|$ , могут быть как ограниченными, так и неограниченными. Режим движения источника логично назвать сверхсейсмическим (сверхзвуковым), если в  $\mathbb{R}^3$  существуют направления  $\mathbf{n}$ , вдоль которых нет точек поверхностей рефракции, и все поверхности рефракции неограничены. Если же хотя бы одна поверхность рефракции ограничена, но есть и неограниченные поверхности рефракции, такой режим движения будем считать транссейсмическим (трансзвуковым).

Отметим, что поверхности рефракции  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$  могут существенно отличаться от соответствующих поверхностей для задачи  $A$ , их может быть различное число от 3 до 6 (или от 2 до 6, если считать кратные значения скоростей за одно значение). В то же время по (2.12) волновые поверхности  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$  для задачи  $B$  получаются простым переносом волновых поверхностей задачи  $A$  на вектор  $(-\mathbf{w})$  и их всегда столько же, сколько и для задачи  $A$ . При этом при транс- и сверхсейсмических режимах движения две части  $\mathbf{c}_{gj}^{B0}$  и

$\mathbf{c}_{gj}^{B1}$  фактически образуют одну замкнутую поверхность. В то же время при таких режимах в случае (2.5) для фиксированных  $\mathbf{n}$  и  $j$  имеем две плоские волны (быструю и медленную) с обратными скоростями, принадлежащими двум разным поверхностям рефракции. Зоны существования быстрых и медленных волн (2.5) ограничены асимптотическими поверхностями  $\mathbf{c}_{pj}^A(\mathbf{n}) = \pm w_n \mathbf{n}$ .

Несмотря на многочисленные отличия характеристических поверхностей плоских объемных волн в задачах  $A$  и  $B$ , имеются и общие свойства, следующие из (2.2), (2.13), (2.14). Так, классификация квазипродольных и квазипоперечных волн для задач  $A$  и  $B$  сохраняется, так как векторы поляризации  $\mathbf{p}_j$  из (2.2) не зависят от  $\mathbf{w}$ .

Поверхности фазовых скоростей  $\mathbf{c}_p$  и обратных скоростей  $\mathbf{L}$  связаны друг с другом операцией инверсии относительно единичной сферы  $|\mathbf{n}| = 1$  с центром инверсии в начале координат ( $\mathbf{c}_p || \mathbf{L}$ ;  $\mathbf{c}_p \mathbf{L} = 1$ ).

Вектор групповой скорости  $\mathbf{c}_g$  по (2.13), (2.14) в каждой точке поверхности рефракции  $\mathbf{L}$  ортогонален к касательной плоскости ( $\mathbf{c}_g d\mathbf{L} = 0$ ). Обратное, волновой вектор  $\mathbf{n}$  плоской волны, групповая скорость которой равна  $\mathbf{c}_g(\mathbf{n})$ , ортогонален к касательной плоскости в соответствующей точке волновой поверхности ( $\mathbf{n} d\mathbf{c}_g = 0$ ).

Связь между поверхностями фазовых  $\mathbf{c}_p$  и групповых  $\mathbf{c}_g$  скоростей следует из формул  $\mathbf{c}_g \mathbf{n} = c_p$ ;  $\mathbf{c}_p = c_p \mathbf{n}$ , и также одинакова для задач  $A$  и  $B$ . Именно [9] поверхность фазовых скоростей  $\mathbf{c}_p$  есть подера волновой поверхности  $\mathbf{c}_g$ , т.е. геометрическое место ортогональных проекций центра  $O$  на касательные к волновой поверхности  $\mathbf{c}_g$  плоскости. Наоборот, волновая поверхность  $\mathbf{c}_g$  является огибающей семейства плоскостей, проведенных через конец вектора фазовой скорости  $\mathbf{c}_p$  перпендикулярно этому вектору.

### 3. Функции Грина или фундаментальные решения

Применив трехмерное преобразование Фурье по  $x_1, x_2, x_3$  для  $\varepsilon$ -задачи, принцип предельного поглощения и методы контурного интегрирования при вычислении обратного преобразования Фурье, после ряда преобразований, аналогичных [5, 11], можно получить следующие интегральные представления для амплитуд  $\mathbf{v}$  и  $\psi$  функций Грина задачи  $B$  для электроупругого пространства

( $\sum'$  означает наличие или отсутствие суммирования по  $k$  в зависимости от режима движения)

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_d + \mathbf{v}_0, \quad \psi = \psi_d + \psi_0 + \psi_s, \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} &= \\ &= \frac{i\omega}{8\pi^2\rho} \sum_{j=1}^3 \sum_k' (-1)^{k+1} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{I}_{jk}^v \\ I_{jk}^\psi \end{Bmatrix} &= \\ &= \iint_{\substack{|\mathbf{n}|=1, \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \geq 0}} R_{jk} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} e^{-i\omega \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{x}} dS, \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$R_{jk} = \frac{H[(-1)^k c_{pj}^A(\mathbf{n}) - w_n]}{c_{pj}^A(\mathbf{n})(c_{pj}^{B(k)}(\mathbf{n}))^2}, \quad (3.4)$$

$$\mathbf{F}_j^v = \mathbf{P}_j(\mathbf{n}) \left( f_0 \mathbf{1} + q_0 \frac{\gamma(\mathbf{n})}{\epsilon(\mathbf{n})} \right), \quad (3.5)$$

$$F_j^\psi = \frac{\gamma^*(\mathbf{n}) \mathbf{F}_j^v}{\epsilon(\mathbf{n})}, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{P}_j(\mathbf{n}) = \mathbf{p}_j(\mathbf{n}) \otimes \mathbf{p}_j^*(\mathbf{n}), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_s \\ \psi_s \end{Bmatrix} &= \\ &= \frac{1}{8\pi^2\rho R} \sum_{j=1}^3 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\nu_j^2(\mathbf{n}) - w_n^2} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v \\ F_j^\psi \end{Bmatrix} d\theta', \quad (3.8) \end{aligned}$$

$$\psi_s = \frac{q_0}{8\pi^2 R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta'}{\epsilon(\mathbf{n})}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{Q}^* \mathbf{n}'. \quad (3.9)$$

Здесь  $\mathbf{e}'_k$  — ортогональный базис, согласованный с направлением  $\mathbf{x}$  следующим образом:  $|\mathbf{e}'_1| = |\mathbf{e}'_2| = 1$ ;  $\mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2 = \mathbf{x}/R$ ;  $R = |\mathbf{x}|$ ;  $\mathbf{Q}$  — ортогональная матрица перехода из исходной системы координат в повернутую:  $\mathbf{n}' = \mathbf{Q} \mathbf{n}$ .

Формулы (3.1)–(3.9) определяют ФР трехмерных динамических задач теории

электроупругости при подвижных осциллирующих источниках и пригодны для различных режимов движения.

В полученных выражениях для амплитуд  $\{\mathbf{v}, \psi\}$ , как и в [4, 5], содержатся динамические составляющие  $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$ , статические —  $\{\mathbf{v}_0, \psi_0\}$  и несвязанный квазиэлектростатический потенциал  $\psi_s$ .

#### 4. Кинематика и энергетика дальнего поля

Поскольку построенные выражения для динамических составляющих  $\{\mathbf{v}_d, \psi_d\}$  по структуре идентичны соответствующим составляющим ФР для пространственных задач теории упругости [11], то полученные в [11] по методу стационарной фазы асимптотики дальних полей и их анализ с учетом необходимых изменений будут справедливы и для пространственных задач электроупругости. Результирующие формулы для дальнего поля  $\omega R \gg 1$  ( $R = |\mathbf{x}|$ ) при простых стационарных точках можно представить в виде

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_d \\ \psi_d \end{Bmatrix} \approx \sum_{j=1}^3 \sum_k' \sum_{m=1}^{N_j^{(k)}} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \psi_{jm}^{(k)} \end{Bmatrix}, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}_{jm}^{(k)} \\ \psi_{jm}^{(k)} \end{Bmatrix} &\approx \\ &\approx \frac{i}{4\pi\rho R} G_{jm}^{(k)} \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_j^v(\mathbf{n}_{jm}^{(k)}) \\ F_j^\psi(\mathbf{n}_{jm}^{(k)}) \end{Bmatrix} e^\eta, \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\eta = -i \left( \frac{\omega R}{|c_{gjm}^{B(k)}|} + \frac{\pi}{4} \sigma_{jm}^{B(k)} \right),$$

$$G_{jm}^{(k)} = -\frac{\omega}{\Omega(\boldsymbol{\alpha}_{jm}^{(k)}) |c_{gjm}^{B(k)}| \sqrt{|k_{pjm}^{B(k)}|}}, \quad (4.3)$$

где  $|c_{gjm}^{B(k)}| = |c_{gj}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|$  — модуль вектора групповой скорости;  $\sigma_{jm}^{B(k)} = \text{sign } k_{1jm}^{B(k)} + \text{sign } k_{2jm}^{B(k)}$  — сигнатура;  $k_{pjm}^{B(k)}$ ,  $k_{1jm}^{B(k)}$ ,  $k_{2jm}^{B(k)}$  — соответственно, полная и главные кривизны поверхности рефракции  $\mathbf{L}_{jm}^{B(k)} = \mathbf{L}_j^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$  в стационарных точках  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$ ;  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$  — стационарные точки, определяемые из условий

$$\mathbf{c}_{gj}^{B(k)} |\mathbf{x} \mathbf{L}_j^{B(k)}| = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \mathbf{L}_j^{B(k)} \geq 0 \quad (4.4)$$

на поверхности рефракции  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ ;  $N_j^{(k)}$  — количество стационарных точек.

Для заданного направления  $\mathbf{x}$  стационарные точки находятся по (4.4) как такие точки  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$  на поверхности рефракции  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ , для которых вектор групповой скорости  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$ , направленный по нормали к  $\mathbf{L}_j^{B(k)}$ , параллелен  $\mathbf{x}$ , вектор волновой нормали  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$  образует с вектором  $\mathbf{c}_{gj}^{B(k)}$  острый угол.

Как видно из (4.1)–(4.3), в пьезоэлектрической среде в дальней зоне поля перемещений и электрического потенциала разделяются по кинематике на отдельные сферические волны (4.2), (4.3) ( $j = 1, 2, 3$ ).

В силу условий (4.4), в сферической системе координат  $(R, \tilde{\varphi}, \theta)$ , связанной с исходной системой координат  $Ox_1x_2x_3$ , компоненты вектора групповой скорости в стационарных точках  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}$  имеют вид:  $c_{gjmR}^{B(k)} = |c_{gjm}^{B(k)}|$ ;  $c_{gjm\tilde{\varphi}}^{B(k)} = 0$ ;  $c_{gjm\theta}^{B(k)} = 0$ . Таким образом, сферические волны (4.2), (4.3) в дальней зоне удовлетворяют всем условиям, наложенным в [3] на сферические акустоэлектрические волны общего типа, следовательно, для волн (4.2), (4.3) справедливы энергетические соотношения для сферических волн и теорема вириала из [3]. Вектор групповой скорости  $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}$  является здесь скоростью переноса средней за период колебаний энергии, как для неподвижного, так и для подвижного наблюдателя. Как следует из [3], для средних за период колебаний потоков энергий  $\langle E^{\xi x} \rangle$  и  $\langle E^x \rangle$  в подвижной системе координат для неподвижного и подвижного наблюдателей, соответственно, и для радиальной компоненты вектора переноса энергии  $\langle J_R^{\xi x(x)} \rangle$  справедливы формулы

$$\begin{aligned} \langle E^{\xi x} \rangle &= \frac{1}{2} \Omega^2(\boldsymbol{\alpha}) \rho \mathbf{v} \mathbf{v}^*, \\ \langle E^x \rangle &= \frac{1}{2} \omega \Omega(\boldsymbol{\alpha}) \rho \mathbf{v} \mathbf{v}^*, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\langle J_R^{\xi x(x)} \rangle = c_{gR}^B \langle E^{\xi x(x)} \rangle. \quad (4.6)$$

Подставляя (4.5), (4.6) в (4.2), (4.3), получаем выражения для радиальных компонент потоков энергии отдельных сфериче-

ских волн в дальней зоне

$$\begin{aligned} \langle J_{jmR}^{x(k)} \rangle &= \frac{\omega}{\Omega(\alpha_{jm1}^{(k)})} \langle J_{jmR}^{\xi x(k)} \rangle = \\ &= (-1)^k \frac{c_{pjm}^{B(k)}}{c_{pjm}^A} \langle J_{jmR}^{\xi x(k)} \rangle, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\langle J_{jmR}^{\xi x} \rangle = \frac{\omega^2 |\mathbf{F}_j^v(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})|^2}{32\pi^2 \rho R^2 |c_{gjm}^{B(k)}| |k_{pjm}^{B(k)}|}. \quad (4.8)$$

При сверхсейсмических режимах движения в (4.7)  $\Omega(\alpha_{jm1}^{(k)}) < 0$  при  $k = 1$ , поэтому  $\langle J_{jmR}^{x(1)} \rangle < 0$ , т.е. медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем. Как отмечалось ранее [3, 4, 11], это свойство обычно для медленных волн задач  $B$  при сверхсейсмических режимах движения.

Важно отметить, что количество волн  $\{\mathbf{v}_{jm}^{(k)}, \psi_{jm}^{(k)}\}$  в дальней зоне определяется числом стационарных точек  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$ . Как отмечалось выше, в стационарных точках  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$  вектор групповой скорости  $\mathbf{c}_{gjm}^{B(k)}(\mathbf{n}_{jm}^{(k)})$  направлен вдоль вектора  $\mathbf{x}$ . Поэтому число волн для выбранного направления  $\mathbf{x}$  определяется как число пересечений луча  $O\mathbf{x}$  с поверхностями групповых скоростей. В зависимости от режима движения число волн может существенно меняться, причем при транс- и сверхсейсмических режимах существуют зоны распространения быстрых и медленных волн, ограниченные коническими поверхностями.

На рис. 1–3 приведены характерные картинки сечений поверхностей групповых скоростей плоскостью  $Ox_1x_3$  рабочей декартовой системы координат  $Ox_1x_2x_3$ . Отдельные выбранные направления  $\mathbf{x}$  на рис. 1–3 снабжены стрелками и помечены цифрами в кружочках, которые обозначают число волн для этих направлений, т.е. число точек пересечений кривых  $\mathbf{c}_{gj}^{(\dots)}$  с направлениями  $\mathbf{x}$ . Эти точки пересечений выделены на рисунках, как «жирные» точки. Модули жесткости рассмотренных материалов были взяты из [9], а пьезоэффект не учитывался.

Обычный для задачи  $A$  случай иллюстрирует рис. 1а, когда для любого направления имеется три распространяющиеся волны (с учетом возможной кратности). Для более

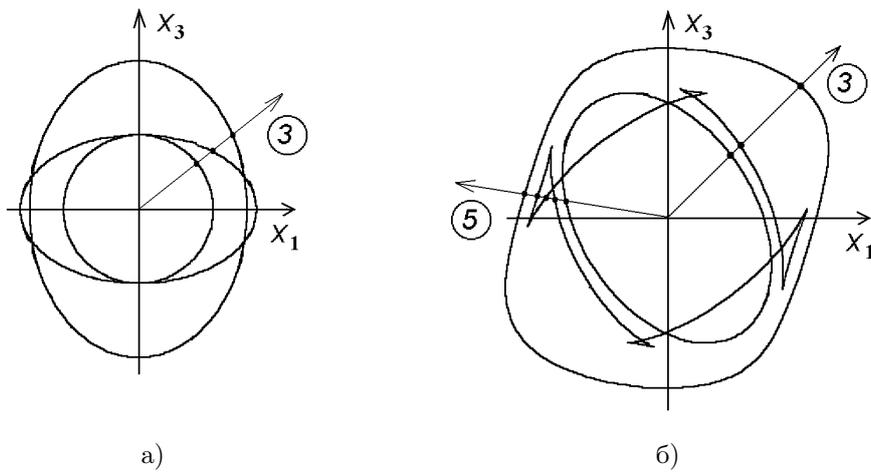


Рис. 1. Задача А: а — парателлуриг, б —  $\alpha$ -кварц,  $\beta = 90^\circ$

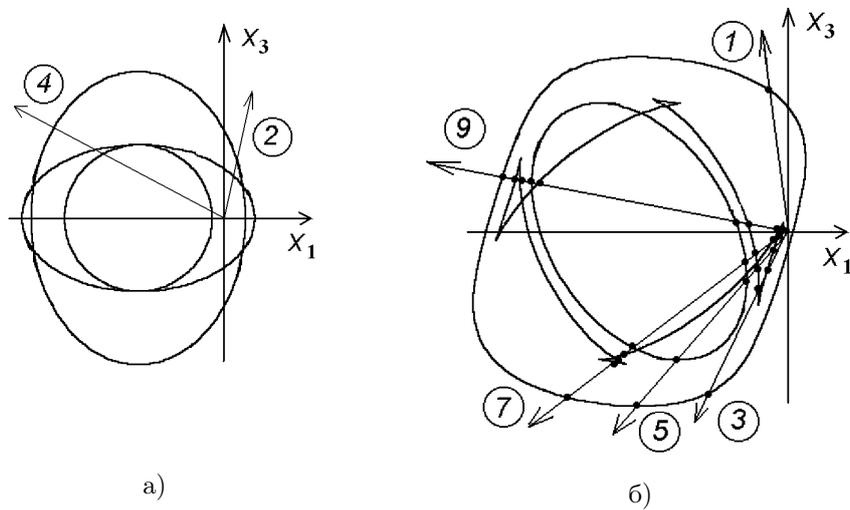


Рис. 2. Задача В, транссейсмический режим движения:  
а — парателлуриг, б —  $\alpha$ -кварц,  $\beta = 90^\circ$

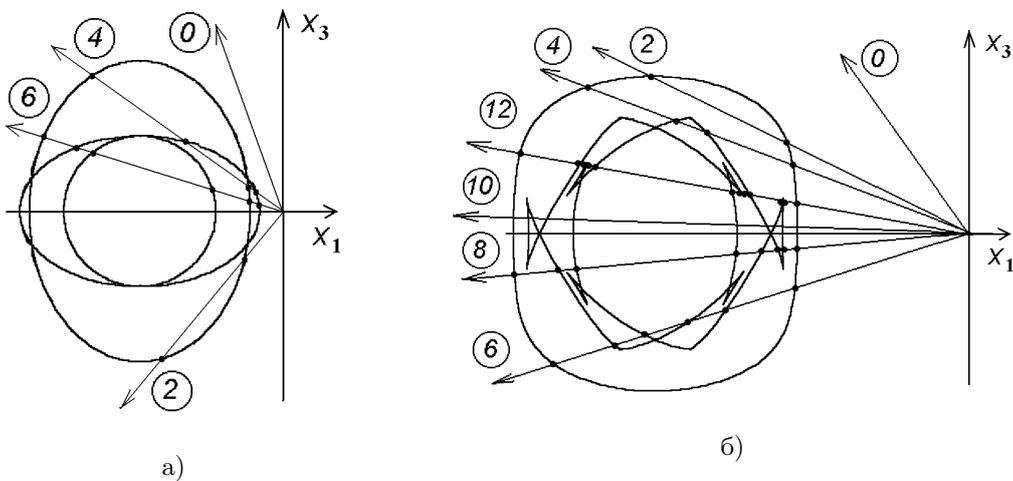


Рис. 3. Задача В, сверхсейсмический режим движения  
а — парателлуриг, б —  $\alpha$ -кварц

сложного материала (рис. 1б,  $\alpha$ -кварц, рабочая декартова система координат  $Ox_1x_2x_3$  повернута вокруг оси  $Ox_3$  на угол  $\beta$  относительно кристаллографической системы координат  $O\tilde{x}_1\tilde{x}_2x_3$ ) в зависимости от направления имеются зоны с тремя и с пятью волнами. Аналогичные ситуации имеют место и в задачах  $B$  при досейсмических режимах движения.

Однако при транс- и сверхсейсмических режимах движения число волн может существенно меняться. Так, на рис. 2 показаны транссейсмические режимы движения, в которых имеются зоны с 2, 4 числом волн на рис. 2а и с 1, 3, 5, 7 и 9 числом волн на рис. 2б. Заметим, что четность и нечетность волн здесь зависит от положения начала координат. Если, как на рис. 2а, лишь одна из трех поверхностей групповых скоростей располагается за началом координат  $O$ , то число волн четное. Если же таких поверхностей две, как на рис. 2б, то число волн нечетное. Для рис. 3 имеет место сверхсейсмический режим движения, при простых поверхностях групповых скоростей имеются зоны с 0, 2, 4 и 6 числом волн, а для более сложных поверхностях число волн в различных зонах может принимать любые четные значения от 0 до 12.

Наконец, отметим, что волновые поля в дальней зоне имеют специфические особенности в окрестности направлений  $\mathbf{n}_{jm}^{(k)}(\mathbf{x})$ , для которых  $k_{pjm}^{(k)} \approx 0$ , для близко расположенных и для кратных стационарных точек. Для таких направлений, как и в задаче  $A$  [12], требуются иные, нежели (4.2), (4.3), формы асимптотических разложений.

### Заключение

Как показано, для вычислений характеристик плоских волн, функций Грина (ФР), кинематики и энергетики дальнего поля сферических волн для трехмерных задач  $B$  электроупругости может быть использована техника, применяемая для аналогичных задач теории упругости. При этом для ФР в задачах электроупругости движение источника вносит дополнительную анизотропию в кинематические и энергетические картины волновых полей. Так, появляется дополнительная анизотропия, обнаруживаются зоны с различным числом распространяющихся волн, быстрые и медленные волны

и т.д. При этом, как и в других задачах с подвижными источниками, при транссейсмическом и сверхсейсмическом движениях медленные волны переносят отрицательную энергию, измеренную подвижным наблюдателем.

### Литература

1. Белоконов А. В. Колебания упругой неоднородной полосы, вызванные движущимися нагрузками // ПММ. 1982. Т. 46, № 2. С. 296–302.
2. Белоконов А. В., Ворович И. И. О некоторых закономерностях образования волновых полей в анизотропном слое при пульсирующей движущейся нагрузке // Мех. и научн.-техн. прогресс. Т. 3. М., 1988. С. 215–222.
3. Белоконов А. В., Наседкин А. В. Энергетика волн, генерируемых подвижными источниками // Акуст. Ж. 1993. Т. 39, № 3. С. 421–427.
4. Калинина Т. И., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в двумерных задачах электроупругости при движущихся осциллирующих источниках // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. Науки. 2014. № 6 (184). С. 16–23.
5. Белоконов А. В., Наседкин А. В. Фундаментальные решения в задачах электроупругости при установившихся колебаниях // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естеств. Науки. 2001. Спецвыпуск. С. 23–25.
6. Khutoryansky N. M., Sosa H. Dynamic representation formulas and fundamental solutions for piezoelectricity // Int. J. Solids Struct. 1995. V. 32. P. 3307–3325. doi: 10.1016/0020-7683(94)00308-J
7. Norris A. N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // Proc. Roy. Soc. London. A. 1994. V. 447, No. 1929. P. 175–188. doi: 10.1098/rspa.1994.0134
8. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // Eng. Anal. Bound. Elem. 2005. V. 29. P. 454–465. doi: 10.1016/j.enganabound.2005.01.006
9. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука, 1982. 424 с.
10. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. Наседкин А. В. Волновое поле движущегося гармонического источника в анизотропной упругой среде // Труды XXVIII Летней Школы «Актуальные проблемы механики», г. С.-Петербург (Репино), 1-10 июня 2000.

/ Под ред. Индейцева Д.А. СПб.: ИПМаш РАН, 2001. Т. 2. С. 66–79.

12. Hanyga A. Point source in anisotropic elastic medium // *Gerlands Beitr. Geophysik. Leipzig*. 1984. V. 93, No. 6. P. 463–479.

### References

1. Belokon A.V. Oscillations of an elastic inhomogeneous strip caused by moving loads. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics (PMM)*, 1982, vol. 46, no. 2, pp. 225–230. doi: 10.1016/0021-8928(82)90142-3
2. Belokon A.V., Vorovich I.I. O nekotorykh zakonomernostyakh obrazovaniya volnovykh poley v anizotropnom sloe pri pulsiruyushey dvizhusheysya nagruzke [About some regularities of generation of wave fields in anisotropic layer under moving pulsating load]. *Mekhanika i nauchno-tehnicheskiiy progress* [Mechanics and scientific and technical progress], 1988, vol. 3, pp. 215–222. [In Russian]
3. Belokon A.V., Nasedkin A.V. Energetika voln, generiruemyykh podvizhnyimi istochnikami [Energy characteristics of wave generated by moving sources]. *Akusticheskiiy Zhurnal* [Russian Physical Acoustics], 1993, vol. 39, no. 1, pp. 421–427. [In Russian]
4. Kalinina T.I., Nasedkin A.V. Fundamentalnyye resheniya v dvumernykh zadachakh elektrouprugosti pri dvizhuschihsya ostsilliruyuschiykh istochnikakh [Fundamental solutions in two-dimensional electroelastic problems under moving oscillating sources]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye Nauki* [Russian Izvestiya, North-Caucas. Region. Ser. Natural Sciences], 2014, no. 6 (184), pp. 16–23. [In Russian]
5. Belokon A.V., Nasedkin A.V. Fundamentalnyye resheniya v zadachakh jelektrouprugosti pri ustanovivshihsya kolebaniyakh [The fundamental solutions for harmonic problems of electroelas-
6. Khutoryansky N.M., Sosa H. Dynamic representation formulas and fundamental solutions for piezoelectricity. *Int. J. Solids Struct.*, 1995, vol. 32, pp. 3307–3325. doi: 10.1016/0020-7683(94)00308-J
7. Norris A.N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids. *Proc. Roy. Soc. London. A*, 1994, vol. 447, no. 1929, pp. 175–188. doi: 10.1098/rspa.1994.0134
8. Wang C.-Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D Dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2005, vol. 29, pp. 454–465. doi: 10.1016/j.enganabound.2005.01.006
9. Dieulesaint E., Royer D. *Ondes elastiques dans les solides. Application au traitement du signal*. Paris: Masson, 1974, 407 p.
10. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical areas]. Moscow, Nauka, 1979, 320 p. [In Russian]
11. Nasedkin A.V. Volnovoe pole dvizhushegosya garmonicheskogo istochnika v anizotropnoy uprugoy srede [Wave field of moving harmonic source in anisotropic elastic medium]. *Trudy XXVIII Letney Shkoly "Aktualnyye problemy mehaniki"*, [Proc. XXVIII Summer School "Actual Problems in Mechanics", Russia, St.Petersburg (Repino), June 1-10, 2000 / Ed. D.A. Indeitsev, St.Petersburg, IPME RAS, 2001, vol. 2, pp. 66–79. [In Russian]
12. Hanyga A. Point source in anisotropic elastic medium // *Gerlands Beitr. Geophysik. Leipzig*, 1984, vol. 93, no. 6, pp. 463–479.

Статья поступила 21 мая 2015 г.

© Калинина Т. И., Наседкин А. В., 2015