

УДК 539.3

## НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ГОФРИРОВАННЫХ ОБОЛОЧЕК

Макаров С. С., Устинов Ю. А.

THE SOME RESULTS OF INVESTIGATIONS OF CORRUGATED SHELLS STABILITY

Makarov S. S. \*, Ustinov Y. A. \*\*, \*\*

\* South Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia

\*\* Southern mathematical institute of the Vladikavkaz scientific centre of the RAS,  
Vladikavkaz, 362027, Russia  
e-mail: ustinov\_rsu@mail.ru

*Abstract.* The thin revolution shell of corrugated by forming was selected as the object of the study. The new form of the equilibrium equations of revolution shells was obtained in the theory of Kirchhoff-Love's. The stability of axisymmetric equilibrium state is investigated on basis of the perturbation theory methods. At the ends of the shell is performed the hinge resistance, external and internal hydrostatic pressure is considered as the external load. A new, in this class of problems, the method based on the theory of Floquet-Lyapunov to determine the critical value of the load at which the axisymmetric stress-strain state loses stability was developed. The influence of the kind of "edge effect" on the critical values of the external load was carried out. In addition to the proposed method, the method of initial parameters to study the stability is used. The comparison of the obtained results using these two methods was conducted. Forms of stability loss for the two types of shells of revolution was constructed.

*Keywords:* shell of revolution, corrugated shell, stability of equilibrium, form of stability loss, critical load, method of Floquet-Lyapunov

В 1989 г. вышла в свет монография И. И. Воровича «Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек» [1]. По существу это была публикация докторской диссертации, которую он защитил в совете Ленинградского университета в 1958 г. Интерес к нелинейным проблемам тонкостенных конструкций у него не угасал в течении всей жизни.

Авторы настоящей работы сочли уместным предложить данную работу, в которой содержится ряд новых результатов исследования устойчивости оболочек вращения со сложным профилем меридиана.

### 1. Основные соотношения и постановка задачи

В качестве объектов исследования рассматриваются оболочки вращения толщиной  $h$ , радиус срединной поверхности которых

задан функцией осевой координаты  $z$

$$r = r(z), \quad 0 \leq z \leq L,$$

где  $L$  — длина оболочки.

Ниже все основные полевые характеристики (координаты вектора смещений, компоненты тензора деформаций, усилий и моментов) рассматриваются в гауссовой системе, связанной со срединной поверхностью оболочки как функции цилиндрических координат  $\varphi, z$ . В этом случае коэффициенты Ляме и главные кривизны гауссовых координат срединной поверхности определяются следующими формулами:

$$A_1 = r(z), \quad A_2 = \sqrt{1 + r'^2},$$

$$k_1 = \frac{1}{A_1 A_2}, \quad k_2 = \frac{r''}{A_2^3}, \quad r' = \frac{dr}{dz}.$$

Здесь индекс «1» отвечает линии кривизны  $r = \text{const}$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , индекс «2» — линии кривизны  $r = r(z)$ ,  $\varphi = \text{const}$ .

Макаров Сергей Сергеевич, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета; e-mail: makarov-sergey-rostov@mail.ru

Устинов Юрий Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Южного федерального университета, главный научн сотрудник Южного математического института Владикавказского научного центра РАН; e-mail: ustinov\_rsu@mail.ru

Работа выполнена в рамках проектной части Государственного задания (9.665.2014.К) в сфере научной деятельности.

Нелинейное поведение оболочки в предположении, что  $h \ll (1/k_1, 1/k_2, L)$ , описывается приведенными ниже соотношениями, вытекающими из гипотез Кирхгофа-Лява [1].

Компоненты тензора деформаций срединной поверхности и тензора изменения кривизн определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= e_{11} + \frac{1}{2}\theta_1^2, & \varepsilon_{22} &= e_{22} + \frac{1}{2}\theta_2^2, \\ \varepsilon_{12} &= e_{12} + \frac{1}{2}\theta_1\theta_2, \\ \kappa_{11} &= \frac{1}{A_1} \left( \partial_\varphi \theta_1 + \frac{1}{A_2} \partial_z A_1 \theta_2 \right), \\ \kappa_{22} &= \frac{1}{A_2} \left( \partial_z \theta_2 + \frac{1}{A_1} \partial_\varphi A_2 \theta_1 \right), \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{A_2}{A_1} \partial_\varphi \frac{\theta_2}{A_2} + \frac{A_1}{A_2} \partial_z \frac{\theta_1}{A_1} \right), \\ e_{11} &= \frac{1}{A_1} \left( \partial_\varphi u_1 + \frac{1}{A_2} \partial_z A_1 u_2 \right) + k_1 u_3, \\ e_{22} &= \frac{1}{A_2} \left( \partial_z u_1 + \frac{1}{A_1} \partial_\varphi A_2 u_1 \right) + k_2 u_3, \\ e_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{A_2}{A_1} \partial_\varphi \frac{u_2}{A_2} + \frac{A_1}{A_2} \partial_z \frac{u_1}{A_1} \right), \\ \theta_1 &= -\frac{1}{A_1} \partial_\varphi u_3 + k_1 u_1, & \theta_2 &= -\frac{1}{A_2} \partial_z u_3 + k_2 u_2.\end{aligned}$$

Здесь  $\partial_\varphi, \partial_z$  — частные производные по переменным  $\varphi$  и  $z$  соответственно.

В силу гипотез Кирхгофа-Лява закон Гука для усилий и моментов имеет вид

$$\begin{aligned}T_{11} &= B(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \\ M_{11} &= D(\kappa_{11} + \nu\kappa_{22}), \\ T_{22} &= B(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11}), \\ M_{22} &= D(\kappa_{22} + \nu\kappa_{11}), \\ T_{12} &= B(1-\nu)\varepsilon_{12}, & M_{12} &= D(1-\nu)\kappa_{12}, \\ B &= \frac{Eh}{1-\nu^2}, & D &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}.\end{aligned}$$

Равновесное состояние оболочки описывается уравнениями

$$\begin{aligned}-\partial_\varphi(A_2 T_{11}) - \frac{1}{A_1} \partial_z(A_1^2 T_{12}) + \partial_\varphi A_2 T_{22} - \\ - k_1 A_1 A_2 Q_1^* - q_1 A_1 A_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\partial_z(A_1 T_{22}) - \frac{1}{A_2} \partial_\varphi(A_2^2 T_{12}) + \partial_z A_1 T_{11} - \\ - k_2 A_1 A_2 Q_2^* - q_2 A_1 A_2 = 0,\end{aligned}\quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}-\partial_\varphi(A_2 Q_1^*) - \partial_z(A_1 Q_2^*) + A_1 A_2 (k_1 T_{11} + \\ + k_2 T_{22}) - q_3 A_1 A_2 = 0,\end{aligned}$$

где  $Q_1^*, Q_2^*$  — полные поперечные силы, определяемые следующими выражениями:

$$Q_1^* = Q_1 - T_{11}\theta_1 - T_{12}\theta_2,$$

$$Q_2^* = Q_2 - T_{22}\theta_2 - T_{12}\theta_1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_\varphi(A_2 M_{11}) - \partial_\varphi A_2 M_{22} + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_1} \partial_z(A_1^2 M_{12}) \right),$$

$$Q_2 = \frac{1}{A_1 A_2} \left( \partial_z(A_1 M_{22}) - \partial_z A_1 M_{11} + \right. \\ \left. + \frac{1}{A_2} \partial_\varphi(A_2^2 M_{12}) \right).$$

Исследования проводились для условий шарнирного опирания торцов

$$\begin{aligned}u_1|_{z=0,L} = 0, & \quad u_2|_{z=0,L} = 0, \\ u_3|_{z=0,L} = 0, & \quad M_{22}|_{z=0,L} = 0.\end{aligned}\quad (1.2)$$

## 2. Осесимметричная задача

В случае осесимметричной задачи  $u_1 = 0$  и все полевые характеристики не зависят от  $\varphi$ . При этих условиях уравнения равновесия (1.1) и граничные условия (1.2) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}\partial_z(A_1 T_{22}) - \partial_z A_1 T_{11} + \\ + k_2 A_1 A_2 Q_2^* + q_2 A_1 A_2 = 0,\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\partial_z(A_1 Q_2^*) - A_1 A_2 (k_1 T_{11} + k_2 T_{22}) + \\ + q_3 A_1 A_2 = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}u_2|_{z=0,L} = 0, & \quad u_3|_{z=0,L} = 0, \\ M_{22}|_{z=0,L} = 0.\end{aligned}\quad (2.2)$$

Для построения решений краевой задачи (2.1)–(2.2), уравнения равновесия сводятся к эквивалентной системе обыкновенных

дифференциальных уравнений. С этой целью вводится вектор  $\mathbf{Y} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_6\}$  с безразмерными компонентами

$$Y_1 = \frac{u_2}{h}, \quad Y_2 = \frac{u_3}{h}, \quad Y_3 = \theta_2, \quad Y_4 = \frac{T_{22}}{B},$$

$$Y_5 = \frac{hM_{22}}{D}, \quad Y_6 = \frac{Q_2^*}{B}.$$

С учетом введенных обозначений эквивалентная система имеет вид

$$\frac{dY_1}{dx} = -\nu SY_1 - A_2([k_2 + \nu k_1]Y_2 - Y_4) - \frac{1}{2}A_2Y_3^2,$$

$$\frac{dY_2}{dx} = A_2(k_2Y_1 - Y_3),$$

$$\frac{dY_3}{dx} = -\nu SY_3 + A_2Y_5,$$

$$\frac{dY_4}{dx} = (1 - \nu)S \left[ (1 + \nu) \left( \frac{S}{A_2}Y_1 + k_1Y_2 \right) - Y_4 \right] - A_2k_2Y_6 - A_2p_2, \quad (2.3)$$

$$\frac{dY_5}{dx} = (1 - \nu)S \left( \frac{1 + \nu}{A_2}SY_3 - Y_5 \right) + 12A_2Y_6 + 12A_2Y_3Y_4,$$

$$\frac{dY_6}{dx} = (1 - \nu^2)k_1(SY_1 + A_2k_1Y_2) + A_2(k_2 + \nu k_1)Y_4 - SY_6 - A_2p_3$$

с граничными условиями

$$Y_1|_{x=0, L_x} = Y_2|_{x=0, L_x} = Y_3|_{x=0, L_x} = Y_5|_{x=0, L_x} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь  $x = z/h$ ,  $L_x = L/h$ ,  $S = A_1^{-1}dA_1/dx$ ,  $p_i = (1 - \nu^2)q_i/E$ ,  $A_1$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  — безразмерные величины.

**Замечание.** Если в качестве основной переменной, определяемой в процессе интегрирования, выбрать, как это часто делается,  $Y_6 = Q_2/B$ , а не  $Y_6 = Q_2^*/B$ , то некоторые элементы матрицы правых частей будут содержать производные от кривизн  $k_1$ ,  $k_2$ , что при численном интегрировании системы может привести к значительным погрешностям. С таким явлением пришлось столкнуться авторам работы [2], где пришлось использовать сплайновую аппроксимацию срединной поверхности.

### 3. Линеаризованная задача

Устойчивость осесимметричного напряженно-деформированного состояния исследуется на основе теории возмущений в классе неосесимметричных форм. Для этого решение отыскивается в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \eta \mathbf{u}^1, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{u}^0 = \{0, u_2^0(z), u_3^0(z)\}$  — решение осесимметричной задачи;  $\mathbf{u}^1 = \{u_1^1, u_2^1, u_3^1\}$ ,  $u_i^1 = u_i^1(\varphi, z)$ ,  $i = (1, 3)$ ;  $\eta$  — малый параметр. Подставляя выражение (3.1) в соотношения (1.1) и пренебрегая слагаемыми  $O(\eta^2)$  и вводя вектор с безразмерными компонентами:  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, \dots, v_8\}$

$$v_1 = \frac{u_1^1}{h}, \quad v_2 = \frac{u_2^1}{h}, \quad v_3 = \frac{u_3^1}{h}, \quad v_4 = \theta_2^1,$$

$$v_5 = \frac{T_{12}^1}{B}, \quad v_6 = \frac{T_{22}^1}{B}, \quad v_7 = \frac{hM_{22}^1}{D}, \quad v_8 = \frac{Q_2^{*1}}{B},$$

уравнения равновесия (1.1) можно свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{L}_1 \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \varphi}, \mathbf{y}_0, \mathbf{p} \right) \mathbf{v}, \quad (3.2)$$

где  $\mathbf{L}_1$  — линейный матричный оператор,  $\mathbf{y}_0$  — решение осесимметричной задачи (2.3).

Решение системы (3.2) отыскивается в классе периодических по  $\varphi$  функций следующего вида:

$$v_i(\varphi, x) = v_i(x) \cos(n\varphi + \psi),$$

где  $\psi = \pi/2$ ,  $i = 2, 3, 4, 6, 7, 8$ ;  $\psi = 0$ ,  $i = 1, 5$ .

В итоге получаем линейное уравнение

$$\frac{d\mathbf{v}}{dx} = \mathbf{H}(n, \mathbf{y}_0, \mathbf{p}) \mathbf{v}. \quad (3.3)$$

Правая часть этого уравнения символизирует то, что элементы матрицы  $\mathbf{H}$  параметрически зависят от  $n$  и решения осесимметричной задачи  $\mathbf{y}_0$ .

Граничные условия, отвечающие (1.2), в принятых обозначениях имеют вид

$$x = 0 : v_i = 0, i = 1, 2, 3, 7; \quad (3.4)$$

$$x = L_x : v_i = 0, i = 1, 2, 3, 7. \quad (3.5)$$

#### 4. О методах исследования устойчивости

Исследование устойчивости осесимметричного решения проводилось двумя методами.

Первый — метод начальных параметров, который, как известно [2, 3], состоит в построении четырех фундаментальных решений задач Коши для  $0 \leq x \leq L_x$ .

Второй — опирается на метод Флоке–Ляпунова (МФЛ) для обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [4, 5].

В предположении, что все коэффициенты матрицы  $\mathbf{H}$  уравнения (3.3) являются периодическими функциями переменной  $x$ , алгоритм определения критических значений нагрузки состоит из следующих этапов:

1) Для целочисленных значений параметра  $n$  осуществляется построение матрицианта, которое состоит в численном интегрировании следующих восьми задач Коши

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dx} = \mathbf{H}(\mathbf{y}_0, \mathbf{p})\mathbf{v}_i, \quad \mathbf{v}_i(0) = \mathbf{v}_i^0.$$

Здесь  $\mathbf{v}_i^0 = \{\delta_{i1}, \delta_{i2}, \dots, \delta_{i8}\}$ , где  $\delta_{ik}$ , ( $i, k = 1, \dots, 8$ ) — символ Кронекера. Таким образом, в результате интегрирования получается восемь вектор-функций  $\mathbf{v}_i = \{v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{i8}\}$ .

2) Из элементов  $v_{ik} = v_{ik}(x)$  формируется матрициант

$$\mathbf{M}(x) = \begin{pmatrix} v_{11} & \dots & v_{18} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{81} & \dots & v_{88} \end{pmatrix}$$

и на его основе матрица монодромии  $\mathbf{A} = \mathbf{M}(L_0)$ , где  $L_0 = L_x/m$  — безразмерная длина периода.

3) Рассмотрим множество векторов вида

$$\mathbf{v}(x) = C_1\mathbf{v}_4 + C_2\mathbf{v}_5 + C_3\mathbf{v}_6 + C_4\mathbf{v}_8. \quad (4.1)$$

Здесь  $C_i$  — произвольные постоянные. Заметим, что каждый вектор из множества (4.1) удовлетворяет уравнению (3.3) и граничному условию (3.4).

По известному свойству матрицианта при  $x = L_x$  имеем

$$\mathbf{v}(L_x) = \mathbf{B}\mathbf{v}(L_0),$$

где  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^m$ .

Необходимо потребовать, чтобы вектор  $\mathbf{v}(L_x)$  множества (4.1) удовлетворял граничному условию (3.5). Тогда получится система

$$\begin{aligned} b_{41}C_1 + b_{42}C_2 + b_{43}C_3 + b_{47}C_4 &= 0, \\ b_{51}C_1 + b_{52}C_2 + b_{53}C_3 + b_{57}C_4 &= 0, \\ b_{61}C_1 + b_{62}C_2 + b_{63}C_3 + b_{67}C_4 &= 0, \\ b_{81}C_1 + b_{82}C_2 + b_{83}C_3 + b_{87}C_4 &= 0. \end{aligned}$$

Критическое значение параметра  $p$ , при котором исходная форма теряет устойчивость, определяется из условия обращения в ноль детерминанта этой системы.

**Замечание.** Анализ элементов матрицы  $\mathbf{H}$  показал, что некоторые из них — квазипериодические, поскольку периодичность этих элементов нарушается в окрестности торцов оболочки (своеобразный краевой эффект). Поэтому для контроля точности описанного выше метода, основанного на использовании МФЛ, была проведена серия численных экспериментов для оболочек с различным количеством гофров в которых сравнивались результаты расчетов, получаемых на основе интегрирования краевой задачи (3.3)–(3.5) двумя описанными методами, а также модифицированным МФЛ, учитывающим «краевой эффект». Сравнительный анализ элементов соответствующих матриц показал, что при выбранных параметрах, соответствующие элементы отличаются менее чем на 0,01%. Это указывает на то, что «краевой эффект» мало влияет на критические значения давления. Также было проведено исследование влияния «краевого эффекта» на критические значения давления при изменении толщины оболочки ( $0,01 \leq h/R \leq 0,04$ ). На основе проведенного анализа можно заключить, что для выбранных оболочек при уменьшении их толщины влияние «краевого эффекта» на критические значения уменьшается. Заметим, что предлагаемый метод легко обобщается на оболочки, у которых длина не кратна периоду структуры.

#### 5. Некоторые результаты исследований

В качестве объекта исследования была выбрана оболочка вращения, радиус средней поверхности которой задавался следующим выражением:

$$r(x) = R_0 + H_0 \sin^2 \left( \frac{\pi m x}{L_x} \right), \quad (5.1)$$

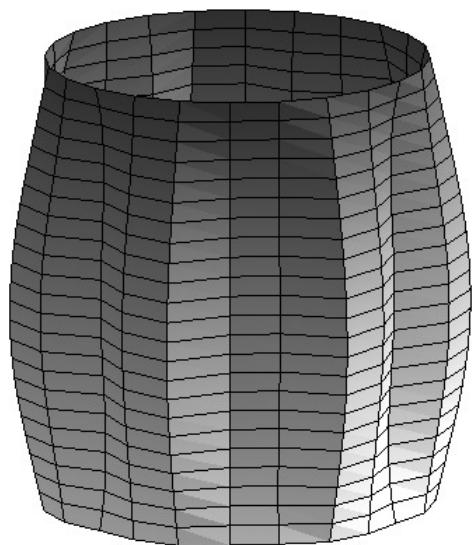


Рис. 1. Форма потери устойчивости оболочки  $r(x) = R_0 + H_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)$  под внутренним гидростатическим давлением  $q^* = 2,85 \cdot 10^6$  Па для  $n = 7$  в условиях шарнирного опирания торцов (вид сбоку)

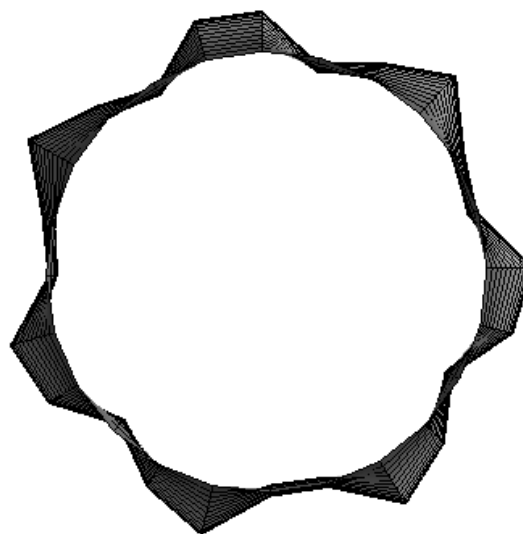


Рис. 2. Форма потери устойчивости оболочки  $r(x) = R_0 + H_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{L_x}\right)$  под внутренним гидростатическим давлением  $q^* = 2,85 \cdot 10^6$  Па для  $n = 7$  в условиях шарнирного опирания торцов (вид сверху)

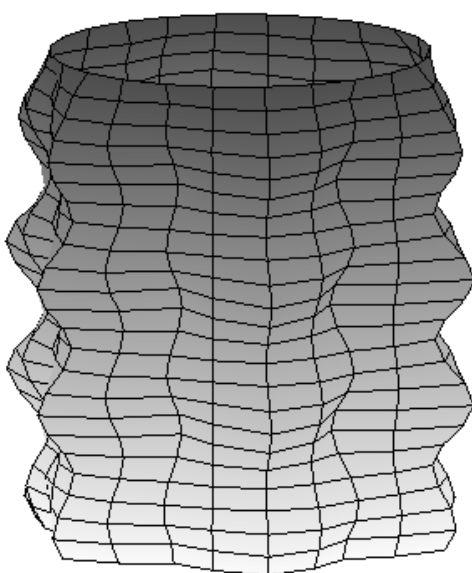


Рис. 3. Форма потери устойчивости оболочки  $r(x) = R_0 + H_0 \sin^2\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right)$  под внешним гидростатическим давлением  $q^* = 4,4 \cdot 10^3$  Па для  $n = 6$  в условиях шарнирного опирания торцов (вид сбоку)

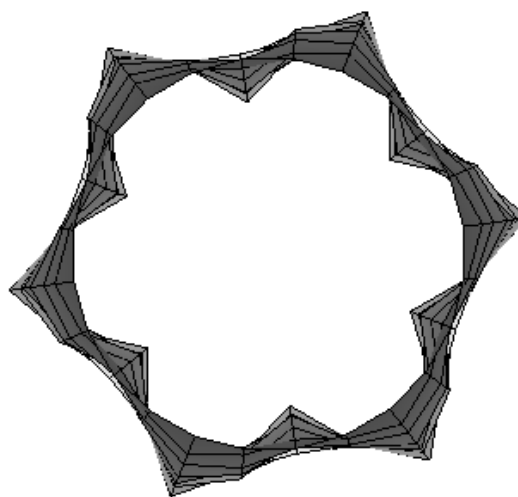


Рис. 4. Форма потери устойчивости оболочки  $r(x) = R_0 + H_0 \sin^2\left(\frac{4\pi x}{L_x}\right)$  под внешним гидростатическим давлением  $q^* = 4,4 \cdot 10^3$  Па для  $n = 6$  в условиях шарнирного опирания торцов (вид сверху)

где  $R_0$  — безразмерный радиус срединной поверхности оболочки на торцах,  $H_0$  — безразмерный амплитудный параметр недеформированной поверхности оболочки,  $m$  — натуральное число, отвечающее за количество периодов,  $L_x$  — безразмерная длина оболочки.

Для проведения расчётов фиксировались следующие параметры

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}, \quad \nu = 0,3, \quad h = 0,001 \text{ м},$$

$$R_0 = R/h = 50, \quad H_0 = H/h = 5,$$

$$L_x = L/h = 100.$$

В результате проведенных исследований установлено, что исследуемая оболочка (5.1) при  $m = 1$  в условиях шарнирного опирания торцов имеет следующие значения критической нагрузки:

- При внешнем гидростатическом давлении величина критической нагрузки  $q^* = 4,4 \cdot 10^5$  Па достигается при  $n = 7$ .
- При внутреннем гидростатическом давлении потеря устойчивости происходит при  $q^* = 2,85 \cdot 10^6$  Па,  $n = 7$ . На рис. 1–2 представлена форма потери устойчивости для этого случая.

Для гофрированной оболочки (5.1) при  $m = 4$  имеем:

- При внешнем гидростатическом давлении:  $q^* = 4,4 \cdot 10^3$  Па,  $n = 6$ . На рис. 3–4 представлена форма потери устойчивости оболочки в этом случае.
- При внутреннем гидростатическом давлении:  $q^* = 6,6 \cdot 10^3$  Па,  $n = 6$ .

### Заключение

Исследована устойчивость оболочек вращения под действием гидростатического давления, как внешнего, так и внутреннего в условиях шарнирного опирания торцов. Были исследованы два типа оболочек: «выпуклая» оболочка, и гофрированная оболочка с 4-мя гофрами. Предложен новый метод исследования устойчивости оболочек с периодической структурой срединной поверхно-

сти. Данный метод позволил оценить влияние «краевого эффекта» на значения критической нагрузки.

### Литература

1. Ворович И. И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.
2. Гетман И. П., Карякин М. И., Устинов Ю. А. Анализ нелинейного поведения круглых мембран с произвольным профилем по радиусу // ПММ. 2010. Т. 74. Вып. 6. С. 917–927.
3. Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. М.: Машиностроение, 1976. 278 с.
4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
5. Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М.: Наука ГРФМЛ, 1972. 718 с.

### References

1. Vorovich I. I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii plogikh obolochek* [Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 373 p.
2. Getman I. P., Karyakin M. I., Ustinov Y. A. Analiz nelineynogo povedeniya kruglykh membran s proizvol'nym profilem po radiusu [Analysis of the non-linear behaviour of circular membranes with an arbitrary radial profile]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics], 2010, vol. 74, no. 6, pp. 917–927.
3. Valishvili N. V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETsVM* [Methods of calculation revolution shells on EDCM]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 278 p.
4. Demidovich B. P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on mathematical stability theory]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p.
5. Jakubovich V. A., Starjinskii V. M. *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koefitsientami i ikh prilozheniya* [Linear differential equations with periodic coefficients and their applications]. Moscow, Nauka GRFML Publ., 1972, 718 p.