УДК 539.3

О СИСТЕМАХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОДОЛЬНО И ПОПЕРЕЧНО АРМИРОВАННЫХ ПЛИТ С МЕРОМОРФНЫМ СИМВОЛОМ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.

ABOUT SYSTEMS OF INTEGRAL EQUATIONS OF LOGITUDINALLY AND TRANSVERSELY REINFORCED SLABS WITH MEROMORPHIC SYMBOL

Babeshko V. A.*, Evdokimova O. V.**, Babeshko O. M.*

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The problem of the study is a stress-strain state of the elastic layer reinforced on the surface with longitudinally and transversely arranged plates of finite width.

Boundary problems for such a block structure have not previously been studied analytically due to the lack of the appropriate mathematical apparatus. In a number of works the object of study are the cases of reinforcement with longitudinally and transversely directed cylindrical armature. However, these problems have limited range of application: just as the building constructions, while the problems studied in this paper have a much wider range of applications. In particular in the study of underground structures' strength, where for secure fastening longitudinally and transversely extended supports are necessary. It is the study with the defectoscopy method of the state of inaccessible lower support according to the characteristics of the upper support fields. It is of interest to study the behavior of such a block structure with different locations of armatures and their different mechanical characteristics. The question of the wave fields excited in such constructions also has not been studied yet. The study of such problems has been made possible thanks to the development by the authors of the solution method for integral equations' systems with meromorphic symbol.

The paper presents various settings of boundary problems for block structures representing linearly deformable layer having longitudinally and transversely located surface reinforcing elements modeled by heterogeneous plates in the form of different sized strips with different mechanical properties.

Keywords: localization, stress-strain state, factorization, topology, boundary-value problems, differential equations, exterior forms

Рассматривается задача об исследовании напряженно-деформированного состояния упругого слоя, армированного по поверхности продольно и поперечными расположенными пластинами конечной ширины. Граничные задачи для подобной блочной структуры ранее не исследовались аналитически в связи с отсутствием соответствующего математического аппарата. В ряде работ объектом исследования выступают случаи армирования материалов цилиндрической арматурой, продольно-поперечно направленной [1, 2]. Однако эти задачи имеют ограниченный диапазон применения, лишь как строительные

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru

Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 13-01-12003-м, 13-01-96502, 13-01-96505, 13-01-96508, 13-01-96509, 15-01-01379, 15-08-01377), гранта Президента РФ НШ-1245.2014.1, Программы Президиума РАН № 3 и № 43.

конструкции, в то время как исследуемые в настоящей работе задачи имеет гораздо более широкие возможности использования. В частности, при исследовании прочности подземных сооружений, где приходится, для надежности крепления, использовать продольные и поперечные протяженные опоры, а также при изучении методом дефектоскопии состояния недоступной нижней опоры по данным полей верхней опоры, Представляют интерес исследования поведения такой блочной структуры при различных расположениях арматур и их механических характеристиках. Не исследован также вопрос о волновых полях, возбуждаемых в подобных конструкциях. Исследование этих задач стало возможным благодаря разработке метода и решения систем интегральных уравнений с мероморфным символом [3]. В работе приводятся различные постановки граничных задач для блочных структур, представляющих линейно деформируемый слой, имеющий поверхностные продольно-поперечно расположенные армирующие элементы, моделируемые разнотипными пластинами в форме полос разных размеров и с различными механическими свойствами.

1. Рассмотрим упругий слой толщины $2H$, на верхнюю и нижнюю границы которого действуют гармонические во времени нормальные напряжения: g_{3b} — на верхнюю границу и g_{3d} — на нижнюю границу. Введем систему координат, приняв оси x_1 и x_2 лежащими в срединной плоскости слоя параллельно границам, а ось x_3 — перпендикулярно этой плоскости. Тогда вектор перемещений $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ в слое выражается соотношением [4]

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \varepsilon_6^{-1}\mathbf{F}_2^{-\mathbf{1}}U_3(\alpha_1, \alpha_2, x_3),$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)e^{i\langle\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle}dx_1 dx_2,$$

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2 f(x_1, x_2), \tag{1}$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu},$$

$$f(x_1, x_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\langle\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\rangle}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$f(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}F(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$U(x_3) = B_+(x_3)G_{3b} + B_-(x_3)G_{3d},$$

$$G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_{53b}\mathbf{F}_2 g_{3b},$$

$$G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_{53d}\mathbf{F}_2 g_{3d},$$

$$B_\pm = \pm k_2^\pm, \quad k_j^\pm = K_j^- \pm K_j^+,$$

$$\Delta^+ = 4(\gamma^2 t_2 - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 t_1),$$

$$\Delta^- = 4(\gamma^2 t_{2-} - \lambda^2\sigma_1\sigma_2 t_{1-}),$$

$$K_2^+ = \frac{\sigma_1}{\Delta^+}\left[\gamma s_1(x_3) - \lambda^2 s_2(x_3)\right],$$

$$K_2^- = \frac{\sigma_1}{\Delta^-}\left[\gamma s_{1-}(x_3) - \lambda^2 s_{2-}(x_3)\right],$$

$$s_j(z) = \frac{\operatorname{sh}\sigma_j x_3}{\operatorname{ch}\sigma_j H}, \quad c_j(z) = \frac{\operatorname{ch}\sigma_j x_3}{\operatorname{ch}\sigma_j H},$$

$$s_{j-}(z) = \frac{\operatorname{ch}\sigma_j x_3}{\operatorname{sh}\sigma_j H}, \quad c_{j-}(z) = \frac{\operatorname{sh}\sigma_j x_3}{\operatorname{sh}\sigma_j H},$$

$$t_j = \operatorname{th}\sigma_j H, \quad t_{j-} = \operatorname{cth}\sigma_j H,$$

$$\sigma^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \Omega = \frac{\rho\omega^2 H^2}{\mu},$$

$$\gamma = \sigma^2 - \frac{\Omega^2}{2}, \quad \sigma_2^2 = \sigma^2 - \Omega^2,$$

$$\sigma_1^2 = \sigma^2 - \varepsilon\Omega^2, \quad \varepsilon = \frac{1-2\nu}{2-2\nu},$$

$$U(H) = U_{3b}(H), \quad U(-H) + U_{3d}(-H),$$

$$B_+(H)G_{3b} + B_-(H)G_{3d} = U_{3b}(H),$$

$$B_+(-H)G_{3b} + B_-(-H)G_{3d} = U_{3d}(-H).$$

В качестве армирующих элементов примем пластины Кирхгофа.

Учитывая большой набор различных вариантов как размеров и механических свойств армирующих элементов, так и условий контакта их со слоем, ограничимся в настоящей работе случаем вертикальных воздействий на армирующие элементы и контактом пластин со слоем без трения. Обозначим пластины индексом b на верхней границе и d- на нижней. Пусть двумерные области контакта армирующих элементов на верхней границе обозначены Ω_b^+, а на нижней — Ω_d^-. Примем, что армирующие элементы направлены вдоль оси x_1 на верхней границе слоя и вдоль оси x_2 — на нижней. Тогда уравнение пластины Кирхгофа при условии контакта без трения имеет вид

$$\left[\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right) - \varepsilon_{43b}\right]u_{3b} = \\ = \varepsilon_{53b}(q_{3b} - t_{3b}), \tag{2}$$

$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1-\nu_b^2)12\mathrm{H}^4}{E_b h_b^3},$$

$$\varepsilon_{43b} = \omega^2 \rho_b \frac{(1-\nu_b^2)12\mathrm{H}^4}{E_b h_b^2}.$$

Для пластин на верхней границе слоя имеем обозначения с индексом b

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43}\right)u_{3b} + + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (3)$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \equiv \left[(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43}\right]U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F_2}u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2}g_{3b}, \quad T_{3b} = \mathbf{F_2}t_{3b},$$

$$M_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right) = f_{3b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2-\nu_b)\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2}\right) = = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H\partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1-\nu_b^2)}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1-\nu)H}{\mu}.$$

Здесь M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 o x_2$; h_b и h_d — толщины пластин, ω — частота колебания блочной структуры, ρ_b — плотность материала пластины, E_b — модуль Юнга материала пластины, ν_b — коэффициент Пуассона. Здесь приняты обозначения из [5]. $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Аналогичный вид имеют граничные условия на нижнем основании слоя. Применяя методы работ [6–8] к блочной структуре, состоящей из слоя и пластин Кирхгофа, лежащих на верхней и нижней границах слоя, получаем функциональные уравнения граничной задачи, которые можно представить в виде [5]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \left((\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}\right)U_{3b} = = -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{53b}\mathbf{F}_2(g_{3b} + t_{3b}), \quad (4)$$

$$b = 1{,}2, \ldots, B_b.$$

И аналогично для нижнего основания

$$R_d(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3d} \equiv ((\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43d})U_{3d} = = -\int\limits_{\partial\Omega_d} \omega_d + \varepsilon_{53d}\mathbf{F}_2(g_{3d} + t_{3d}), \quad (5)$$

$$d = 1{,}2, \ldots, B_d.$$

Внешняя форма для пластин на верхнем основании имеет вид

$$\omega_b = = \varepsilon_{3b} e^{i\langle\alpha,x\rangle}\left\{-\left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right]dx_1 + + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b}\right]dx_2\right\}. \quad (6)$$

Для прямолинейной границы она принимает выражение

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\left\{-\left[i\alpha_1 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} - - (\alpha_2^2 + \nu_b\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right]u_{3b}\right]\right\}dx_1, \quad (7)$$

На нижнем основании пластины внешние формы для перпендикулярно расположенной пластины будут иметь в принятой системе координат выражение

$$\omega_d = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\left\{-\left[\frac{\partial^3 u_{3d}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3d}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3d}}{\partial x_1} + \right.\right.$$

$$+ i\alpha_1^3 u_{3d} + 2\frac{\partial^3 u_{3d}}{\partial x_2^2 \partial x_1} - 2i\alpha_1 \frac{\partial^2 u_{3d}}{\partial x_2^2}\Bigg] dx_2 + \\ + \left[\frac{\partial^3 u_{3d}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3d}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3d}}{\partial x_2} + i\alpha_2^3 u_{3d}\right] dx_1 \Bigg\}. \qquad (8)$$

Для прямолинейной границы она принимает выражение

$$\omega_d = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[i\alpha_2 M_d D_d^{-1} - Q_d D_d^{-1} - \\ - (\alpha_1^2 + \nu_d \alpha_2^2)\frac{\partial u_{3d}}{\partial x_1} + \\ + i\alpha_1 \left[\, \alpha_1^2 + (2-\nu_d)\, \alpha_2^2\right] u_{3d}\Bigg]\Bigg\} dx_2. \qquad (9)$$

2. Приведем выражения для псевдодифференциальных уравнений на правой стороне пластины с большей координатой второй оси.

Обозначим принадлежащие этой стороне пластины выражения индексом r, а левой, с меньшей координатой x_2, — индексом λ. Пусть пластина занимает область Ω_b $(|x_1| \leqslant \infty,\ c_{b1} \leqslant x_2 \leqslant c_{b2})$. Тогда имеем

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_{br}} \Bigg\{ i\alpha_{21-} D_b^{-1} M_{br} - D_b^{-1} Q_{br} - \\ - (\alpha_{21-}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3br}}{\partial x_2^r} + \\ + i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3br}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}} \Bigg\{ i\alpha_{21-} D_b^{-1} M_{b\lambda} - D_b^{-1} Q_{b\lambda} - \\ - (\alpha_{21-}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b\lambda}}{\partial x_2^\lambda} + \\ + i\alpha_{21-}\left[\alpha_{21-}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3b\lambda}\Bigg\} \times \\ \times e^{i(\alpha_1 x_1 - \alpha_{21-} c)} dx_1 + \\ + \varepsilon_{53b} e^{-i\alpha_{21-} c_2}\big[G_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21-}) - \\ - T_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21-})\big]\Bigg\rangle = 0; \qquad (10)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_{br}} \Bigg\{ i\alpha_{22-} D_b^{-1} M_{br} - D_b^{-1} Q_{br} - \\ - (\alpha_{22-}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3br}}{\partial x_2^r} + \\ + i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3br}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}} \Bigg\{ i\alpha_{22-} D_b^{-1} M_{b\lambda} - D_b^{-1} Q_{b\lambda} - \\ - (\alpha_{22-}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b\lambda}}{\partial x_2^\lambda} + \\ + i\alpha_{22-}\left[\alpha_{22-}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3b\lambda}\Bigg\} \times \\ \times e^{i(\alpha_1 x_1 - \alpha_{22-} c_b)} dx_1 + \\ + \varepsilon_{53b} e^{-i\alpha_{22-} c_{2b}}\big[G_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21-}) - \\ - T_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21-})\big]\Bigg\rangle = 0,$$

$$c_b = c_{2b} - c_{1b}.$$

На левом берегу пластины псевдодифференциальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}} \Bigg\{ i\alpha_{21+} D_b^{-1} M_{b\lambda} - D_b^{-1} Q_{b\lambda} - \\ - (\alpha_{21+}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3b\lambda}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_{br}} \Bigg\{ i\alpha_{21+} D_b^{-1} M_{br} - D_b^{-1} Q_{br} - \\ - (\alpha_{21+}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3br}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{21+}\left[\alpha_{21+}^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3br}\Bigg\} \times \\ \times e^{i(\alpha_1^r x_1^r + \alpha_{22+} c_b)} dx_1^r + \\ + \varepsilon_{53b} e^{i\alpha_{22+} c_{1b}}\big[G_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21+}) - \\ - T_{3b}(\alpha_1, \alpha_{21+})\big]\Bigg\rangle = 0, \qquad (11)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_{b\lambda}} \Bigg\{ i\alpha_{22+} D_b^{-1} M_{b\lambda} - D_b^{-1} Q_{b\lambda} - \\ - (\alpha_{22+}^2 + \nu_b \alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b\lambda}}{\partial x_2} +$$

$$+i\alpha_{22+}\left[\alpha_{22+}^2+(2-\nu_b)\alpha_1^2\right]u_{3b\lambda}\Big\}e^{i\alpha_1 x_1}dx_1+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_{br}}\Big\{i\alpha_{22+}D_b^{-1}M_{br}-D_b^{-1}Q_{br}-$$

$$-(\alpha_{22+}^2+\nu_b\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3br}}{\partial x_2}+$$

$$+i\alpha_{22+}\left[\alpha_{22+}^2+(2-\nu_b)\alpha_1^2\right]u_{3br}\Big\}\times$$

$$\times e^{i(\alpha_1^r x_1^r+\alpha_{22+}c_b)}dx_1^r+$$

$$+\varepsilon_{53b}e^{i\alpha_{22+}c_{1b}}\big[G_{3b}(\alpha_1,\alpha_{22+})-$$

$$-T_{3b}(\alpha_1,\alpha_{22+})\big]\Big\rangle=0.$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{-1}$ — обратный оператор к одномерному преобразованию Фурье.

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{21-}=-i\sqrt{(\alpha_1)^2-\sqrt{\varepsilon_{b43}}},$$

$$\alpha_{22-}=-i\sqrt{(\alpha_1)^2+\sqrt{\varepsilon_{b43}}},$$

$$\alpha_{21+}=i\sqrt{(\alpha_1)^2-\sqrt{\varepsilon_{b43}}},$$

$$\alpha_{22+}=i\sqrt{(\alpha_1)^2+\sqrt{\varepsilon_{b43}}}$$

Аналогичные уравнения строятся на нижнем основании. Назовем правой стороной пластин на нижнем основании те стороны, на которых x_1 имеет большее значение в области Ω_d ($|x_2|\leqslant\infty$, $c_{d1}\leqslant x_2\leqslant c_{d2}$). С учетом того, что пластины бесконечно простираются вдоль оси ox_2, псевдодифференциальные уравнения принимают вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{dr}}\Big\{i\alpha_{11-}D_d^{-1}M_{dr}-D_d^{-1}Q_{dr}-$$

$$-(\alpha_{11-}^2+\nu_d\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3dr}}{\partial x_1^r}+$$

$$+i\alpha_{11-}\left[\alpha_{11-}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3dr}\Big\}e^{i\alpha_1 x_1)}dx_1+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_{d\lambda}}\Big\{i\alpha_{11-}D_d^{-1}M_{d\lambda}-D_d^{-1}Q_{d\lambda}-$$

$$-(\alpha_{11-}^2+\nu_d\alpha_2^2)\frac{\partial u_{3d\lambda}}{\partial x_1^\lambda}+$$

$$+i\alpha_{11-}\left[\alpha_{11-}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3d\lambda}\Big\}\times$$

$$\times e^{i(\alpha_2 x_2-\alpha_{11-}c_d)}dx_2+$$

$$+\varepsilon_{53d}e^{-i\alpha_{11-}c_{d2}}\big[G_{3d}(\alpha_{11-},\alpha_2)-$$

$$-T_{3d}(\alpha_{11-},\alpha_2)\big]\Big\rangle=0, \quad (12)$$

$$c_d=c_{d2}-c_{d1};$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{dr}}\Big\{i\alpha_{12-}D_d^{-1}M_{dr}-D_d^{-1}Q_{dr}-$$

$$-(\alpha_{12-}^2+\nu_d\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3dr}}{\partial x_1^r}+$$

$$+i\alpha_{12-}\left[\alpha_{12-}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3dr}\Big\}e^{i\alpha_1 x_1)}dx_1+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_{d\lambda}}\Big\{i\alpha_{12-}D_d^{-1}M_{d\lambda}-D_d^{-1}Q_{d\lambda}-$$

$$-(\alpha_{12-}^2+\nu_d\alpha_2^2)\frac{\partial u_{3d\lambda}}{\partial x_1^\lambda}+$$

$$+i\alpha_{12-}\left[\alpha_{12-}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3d\lambda}\Big\}\times$$

$$\times e^{i(\alpha_2 x_2-\alpha_{12-}c_d)}dx_2+$$

$$+\varepsilon_{53d}e^{-i\alpha_{12-}c_{d2}}\big[G_{3d}(\alpha_{12-},\alpha_2)-$$

$$-T_{3d}(\alpha_{12-},\alpha_2)\big]\Big\rangle=0.$$

На левом берегу пластины псевдодифференциальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Big\langle-\int\limits_{\partial\Omega_{d\lambda}}\Big\{i\alpha_{11+}D_d^{-1}M_{d\lambda}-D_d^{-1}Q_{d\lambda}-$$

$$-(\alpha_{11+}^2+\nu_d\alpha_2^2)\frac{\partial u_{3d\lambda}}{\partial x_1^\lambda}+$$

$$+i\alpha_{11+}\left[\alpha_{11+}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3d\lambda}\Big\}e^{i\alpha_2 x_2}dx_2+$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega_{dr}}\Big\{i\alpha_{11+}D_d^{-1}M_{dr}-D_d^{-1}Q_{dr}-$$

$$-(\alpha_{11+}^2+\nu_d\alpha_2^2)\frac{\partial u_{3dr}}{\partial x_1}+$$

$$+i\alpha_{11+}\left[\alpha_{11+}^2+(2-\nu_d)\alpha_2^2\right]u_{3dr}\Big\}\times$$

$$\times e^{i(\alpha_2 x_2+\alpha_{11+}c_d)}dx_2+$$

$$+ \varepsilon_{53d} e^{i\alpha_{11+}c_{d1}} \left[G_{3d}(\alpha_{11+}, \alpha_2) - \right.$$
$$\left. \left. - T_{3d}(\alpha_{11+}, \alpha_2) \right] \right\rangle = 0; \quad (13)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1) \left\langle - \int\limits_{\partial\Omega_{d\lambda}} \left\{ i\alpha_{12+} D_d^{-1} M_{d\lambda} - D_d^{-1} Q_{d\lambda} - \right. \right.$$
$$- (\alpha_{12+}^2 + \nu_d \alpha_2^2) \frac{\partial u_{3d\lambda}}{\partial x_1^\lambda} +$$
$$\left. + i\alpha_{12+} \left[\alpha_{12+}^2 + (2 - \nu_d)\alpha_2^2 \right] u_{3d\lambda} \right\} e^{i\alpha_2 x_2} dx_2 +$$
$$+ \int\limits_{\partial\Omega_{dr}} \left\{ i\alpha_{12+} D_d^{-1} M_{dr} - D_d^{-1} Q_{dr} - \right.$$
$$- (\alpha_{12+}^2 + \nu_d \alpha_2^2) \frac{\partial u_{3dr}}{\partial x_1} +$$
$$\left. + i\alpha_{12+} \left[\alpha_{12+}^2 + (2 - \nu_d)\alpha_2^2 \right] u_{3dr} \right\} \times$$
$$\times e^{i(\alpha_2 x_2 + \alpha_{12+} c_d)} dx_2 +$$
$$+ \varepsilon_{53d} e^{i\alpha_{12+}c_{d1}} \left[G_{3d}(\alpha_{12+}, \alpha_2) - \right.$$
$$\left. \left. - T_{3d}(\alpha_{12+}, \alpha_2) \right] \right\rangle = 0.$$

Здесь $\mathbf{F}_1^{-1}$ — обратный оператор к одномерному преобразованию Фурье.

В подынтегральных функциях принято

$$\alpha_{11-} = -i\sqrt{(\alpha_2)^2 - \sqrt{\varepsilon_{d43}}},$$

$$\alpha_{12-} = -i\sqrt{(\alpha_2)^2 + \sqrt{\varepsilon_{d43}}},$$

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{(\alpha_1)^2 - \sqrt{\varepsilon_{b43}}},$$

$$\alpha_{12+} = i\sqrt{(\alpha_1)^2 + \sqrt{\varepsilon_{d43}}}.$$

Для каждой из пластин, расположенных на верхней или нижней границе слоя должны быть заданы граничные условия, по два на каждой границе.

Внеся эти граничные условия в псевдодифференциальные уравнения и решив их относительно незаданных двух граничных условий, получим полный набор граничных условий на каждой границе. После этого полученные функции вносятся в правые части функциональных уравнений (4), (5). Их них могут быть представлены решения для пластин в следующем виде:

$$U_{3b} = -R_b^{-1}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b}) \times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{53b} \mathbf{F}_2 (g_{3b} + t_{3b}) \right],$$
$$b = 1, 2, \ldots, B_b,$$
$$U_{3d} = -R_d^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_d} \omega_d + \varepsilon_{53d} \mathbf{F}_2 (g_{3d} + t_{3d}) \right],$$
$$d = 1, 2, \ldots, B_d.$$

3. Рассмотрим эти соотношения совместно с уравнением для упругого слоя, которое для случая вертикальных воздействий пластин на слой имеет вид (2).

Последнее можно переписать следующим образом:

$$B_+(H) G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) + B_-(H) G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) =$$
$$= -R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b + \varepsilon_{53b} (G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) - T_{3b}(\alpha_1, \alpha_2)) \right] +$$
$$+ \sum_{b=1}^{B_b+1} U_{3b}(H), \quad b = 1, 2, \ldots, B_b,$$

$$B_+(-H) G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) + B_-(-H) G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) =$$
$$= -R_d^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_d} \omega_d + \varepsilon_{53d} (G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) - T_{3d}(\alpha_1, \alpha_2)) \right] +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d+1} U_{3d}(-H), \quad d = 1, 2, \ldots, B_d.$$

Собрав в каждом соотношении подобные члены, полученные выражения можно представить в виде

$$\sum_{b=1}^{B_b} \left[B_+(H) + \varepsilon_{53b} R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \right] \times$$
$$\times G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{d=1}^{B_d} B_-(H) G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= -R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} T_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) \right] + \sum_{b=1}^{B_b+1} U_{3b}(H),$$
$$b = 1, 2, \dots, B_b,$$

$$\sum_{d=1}^{B_d} \left[B_-(-H) + \varepsilon_{53d} R_d^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \right] \times$$
$$\times (G_{3d}(\alpha_1, \alpha_2) + \sum_{b=1}^{B_b} B_+(-H) G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) =$$

$$= -R_d^{-1}(-i\alpha_{1b}, -i\alpha_{2b})\times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_d} \omega_d - \varepsilon_{53d} T_{3d}(\alpha_1, \alpha_2)) \right] +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d+1} U_{3d}(-H),$$
$$d = 1, 2, \dots, B_d,$$

$$\left[B_+(H) + \varepsilon_{53b} R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \right] =$$
$$= K_{11b}(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$B_-(H) = K_{12d}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\left[B_-(-H) + \varepsilon_{53d} R_d^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \right] =$$
$$= K_{22d}(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$B_+(-H) = K_{21b}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$- R_b^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} T_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) \right] +$$
$$+ \sum_{b=1}^{B_b+1} U_{3b}(H) = F_{1m}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$- R_d^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)\times$$
$$\times \left[\int\limits_{\partial\Omega_d} \omega_d - \varepsilon_{53d} T_{3d}(\alpha_1, \alpha_2)) \right] +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d+1} U_{3d}(-H) = F_{2n}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\sum_{b=1}^{B_b} \iint\limits_{\Omega_b} k_{11b}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\times$$
$$\times g_{3b}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d} \iint\limits_{\Omega_d} k_{12d}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\times$$
$$\times g_{3d}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_{1m}(x_1, x_2),$$

$$|x_1| \leqslant \infty, \quad c_{(m-1)b} \leqslant x_2 \leqslant c_{mb}, \quad 1 \leqslant m \leqslant B_b,$$

$$\sum_{b=1}^{B_b} \iint\limits_{\Omega_b} k_{21b}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\times$$
$$\times g_{3b}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d} \iint\limits_{\Omega_d} k_{22d}(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2)\times$$
$$\times g_{3d}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f_{2n}(x_1, x_2),$$

$$|x_2| \leqslant \infty, \quad c_{(n-1)b} \leqslant x_1 \leqslant c_{nb}, \quad 1 \leqslant n \leqslant B_d.$$

Заметим, что в полученной системе интегральных уравнений внедиагональные члены имеют ядра, содержащие убывающие экспоненты, в отличии от диагональных. Поэтому для построения приближенных решений можно применить метод последовательных приближений, взяв за начальный оператор диагональный. Для получения решения в этом случае можно применить методы, разработанные в [9]

$$k_{mn}(x_1, x_2) =$$
$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2)} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$g_{3b}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_2) G_{3b}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$f_{ls}(x_1, x_2) = \mathbf{P}_m \mathbf{F}_2^{-1}(x_1, x_2) F_{ls}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{P}_m = \begin{cases} 1, & x_1, x_2 \in \Omega_m, \\ 0, & x_1, x_2 \notin \Omega_m. \end{cases}$$

Допустим, арматура представляет собой перекрестно лежащие полосы пластин Кирхгофа, расположенные одинаково на верхней и нижней границе слоя. Тогда, складывая и вычитая уравнения, получим следующую систему интегральных уравнений

$$\sum_{b=1}^{B_b} \iint\limits_{\Omega_b} \big[k_{11b}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)+$$
$$+ k_{21b}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\big] g_{3b}(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 +$$
$$+ \sum_{d=1}^{B_d} \iint\limits_{\Omega_d} \big[k_{22d}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)+$$
$$+ k_{12d}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\big] g_{3d}(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$
$$= f_{1m}(x_1,x_2) + f_{2n}(x_1,x_2),$$

$$\sum_{b=1}^{B_b} \iint\limits_{\Omega_b} \big[k_{11b}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)-$$
$$- k_{21b}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\big] g_{3b}(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 -$$

$$- \sum_{d=1}^{B_d} \iint\limits_{\Omega_d} \big[k_{22d}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)-$$
$$- k_{12d}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)\big] g_{3d}(\xi_1,\xi_2) d\xi_1 d\xi_2 =$$
$$= f_{1m}(x_1,x_2) - f_{2n}(x_1,x_2),$$

$$|x_1| \leqslant \infty, \quad c_{(m-1)b} \leqslant x_2 \leqslant c_{mb}, \quad 1 \leqslant m \leqslant B_b,$$
$$|x_2| \leqslant \infty, \quad c_{(n-1)b} \leqslant x_1 \leqslant c_{nb}, \quad 1 \leqslant n \leqslant B_d.$$

Здесь предполагается, что в случае общих зон, пластины налагаются друг на друга. В результате получили систему уравнений с мероморфной матрицей-символом ядра. Исследование полученных интегральных уравнений с мероморфной матрицей-символом можно производить, используя метод работы [3].

Литература

1. *Гузь А.Н., Шульга Н.А. и др.* Механика композитов. Т. 2. Динамика и устойчивость материалов. Киев: Наукова Думка, 1993. 432 с.
2. *Гузь А.Н., Хорошун и др.* Механика композитов. Т. 3. Статистическая механика и эффективные свойства материалов. Киев: Наукова Думка, 1993. 392 с.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.
4. *Ворович И.И.,Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О разнотипных покрытиях с дефектами в статических задачах сейсмологии и наноматериалах // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 41–45.
6. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449. № 4. С. 657–660.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений // ДАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 163–167.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах в приложениях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 1. С. 95–103.
9. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

References

1. Guz' A.N., Shul'ga N.A., etc. *Mekhanika kompozitov. T. 2. Dinamika i ustoychivost' materialov* [The mechanics of composites. Vol. 2. Trends and resistance of materials]. Kiev: Naukova Dumka Pibl., 1993, 432 p. (In Russian)
2. Guz' A.N., Shul'ga N.A., etc. *Mekhanika kompozitov. T. 3. Statisticheskaya mekhanika i effektivnye svoystva materialov* [The mechanics of composites. Vol. 3. Statistical mechanics and the effective properties of materials]. Kiev: Naukova Dumka Pibl., 1993, 392 p. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob odnoy faktorizatsionnoy zadache Gil'berta–Vinera i metode blochnogo elementa. *Doklady Akademii Nauk* [Rep. of the RAS], 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (In Russian)
4. Vorovich I.I.,Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh.* Moscow, Nauka Publ., 1999, 246 p. (In Russian)
5. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O raznotipnykh pokrytiyakh s defektami v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialakh [About the different types of coatings with defects in the static problems of seismology and nanomaterials]. *Doklady Akademii Nauk* [Rep. of the RAS], 2014, vol. 459, no. 6, pp. 41–45. (In Russian)
6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskiy metod resheniya granichnykh zadach i blochnye elementy [Topological

method for solving boundary value problems and block elements]. *Doklady Akademii Nauk* [Rep. of the RAS], 2013, vol. 449, no. 4, pp. 657–660. (In Russian)

7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Blochnye elementy i analiticheskie resheniya granichnykh zadach dlya sistem differentsial'nykh uravneniy [Block elements and analytical solutions of boundary value problems for systems of differential equations]. *Doklady Akademii Nauk* [Rep. of the RAS], 2014, vol. 454, no. 2, pp. 163–167. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O blochnykh elementakh v prilozheniyakh [About a block element in applications]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical mesomechanics], 2012, vol. 15, no. 1, pp. 95–103. (In Russian)
9. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p. (In Russian)

Статья поступила 10 сентября 2015 г.