

УДК 539.3

## ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ УПРУГОГО ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ БАЛКИ

Ватульян А. О., Васильев Л. В.

ABOUT DETERMINATION OF PARAMETERS OF ELASTIC FIXING OF THE NON-UNIFORM BEAM

Vatulyan A. O., Vasiliev L. V.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

*Abstract.* Natural oscillations of an elastic rod with variable stiffness defined by an arbitrary positive function are considered. Natural oscillations in cases of arbitrary and constant stiffness are studied. Using the shooting method for the Cauchy problem, the differential equation of 4th order is reduced to the canonical system of differential equations, by solving the system and building a linear combination of the solutions, the algebraic system was obtained. To analyze the zeros of the system determinant, a program carrying out the construction of surface solutions is obtained. The three surface sections of solutions were analyzed. An asymptotic representation of the solutions for small and large fixing elastic parameters was constructed. Inverse problem on determination of the parameters of elastic fixing of the inhomogeneous beam was formulated. A new approach to solve this problem was proposed; based on the (priori known) asymptotic and numerical analysis in case of intermediate values of the parameters, the two methods of reconstruction of the described parameters characterizing the elastic fixing at one end of the beam at two known resonance frequencies. The influence of the impact of the input data noising on the reconstruction of the unknown parameters is estimated, the effect of deviations on the results is evaluated. The proposed methods allow restoring the parameters of the noise no more than 3 % with high accuracy.

*Keywords:* the equation of 4th order with variable coefficients, boundary conditions, natural vibrations, reconstruction, asymptotic behavior, elastic fixation

### Введение

Балочные модели наиболее часто используются при моделировании различных объектов [1], и их колебания описываются дифференциальными уравнениями 4-го порядка. При этом оценка упругости опор конструкции важна как для различных технических приложений, например, при проектировании трубопроводов, строительных конструкций, так в биомеханике при диагностике элементов биомеханической системы кость – фиксатор для реальной оценки ее деформативности. Среди методов, позволяющих оценить характеристики упругих систем, следует отметить акустические. В [2, 3] изложены теоретические основы низкочастотных акустических методов контроля.

Задача определения параметров упругих систем по данным акустического зондирования относится к обратным задачам, которым присуща некорректность в той или иной форме [4, 5].

Ряд обратных задач по идентификации граничных условий, возникающих при изучении колебаний балок и трубопроводов с постоянной жесткостью на упругих опорах, были исследованы в работах [6–9], где определялись коэффициенты упругости, входящие в граничные условия, по некоторому набору резонансных частот. При этом анализ задач производился для оператора с постоянными коэффициентами, что позволяло составлять частотное уравнение, содержащее искомые параметры, в явном виде и анализировать возникающие алгебраические проблемы.

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Васильев Леонид Викторович, студент Института математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета; e-mail: leninid@mail.ru

В настоящей работе изучена задача о реконструкции граничных параметров для консольно закрепленного на одном конце и упруго опертого на другом стержня с переменной жесткостью. Исследование проведено на основе сочетания асимптотического и численного подхода.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим собственные колебания упругого стержня длины  $l$  с переменной жесткостью. Уравнение колебаний в безразмерных переменных имеет вид [1]

$$(D(x)y''(x))'' - k^4y(x) = 0, \quad (1.1)$$

где

$$k^4 = \frac{\rho\omega^2 Fl^2}{D_0}.$$

Здесь  $y(x)$  — безразмерный прогиб,  $x \in [0, 1]$  — безразмерная координата,  $EJ = D_0D(x)$  — жесткость,  $D_0$  — характерная жесткость балки, например, её максимальное значение,  $D(x)$  — безразмерная функция, характеризующая изменение жесткости вдоль оси,  $F$  — площадь поперечного сечения балки,  $l$  — длина балки.

Будем рассматривать свободные колебания консольно закрепленной на конце  $x = 0$  балки, на конце  $x = 1$  имеется упругое закрепление, характеризующееся безразмерными положительными параметрами  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Граничные условия имеют вид [6]

$$\begin{cases} y(0) = 0; \\ y'(0) = 0; \\ [D(x)y''(x, k) + \beta_1y'(x, k)]|_{x=1} = 0; \\ [(D(x)y''(x, k))' - \beta_2y(x, k)]|_{x=1} = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

### 2. Исследование колебаний в случае произвольной жесткости

Рассмотрим случай произвольной положительной функции  $D(x)$ , которая может быть как непрерывной, так и иметь конечное число разрывов первого рода. Изучим влияние параметров упругого закрепления на резонансные характеристики балки. Решение краевой задачи (1.1), (1.2) будем строить методом пристрелки [10], для чего сведем дифференциальное уравнение 4-го порядка

(1.1) к канонической системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} y'_1 = y_2; \\ y'_2 = \frac{y_3}{D(x)}; \\ y'_3 = y_4; \\ y'_4 = k^4y_1 \end{cases} \quad (2.1)$$

со следующими граничными условиями:

$$\begin{cases} y_1(0, k) = 0; \\ y_2(0, k) = 0; \\ y_3(1, k) + \beta_1y_2(1, k) = 0; \\ y_4(1, k) - \beta_2y_1(1, k) = 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для системы (2.1) построим решение двух вспомогательных задач Коши. Для вектор-функции  $y^1(x) = \{y_m^1\}$  сформулируем следующие начальные условия:

$$y_1^1(0, k) = 0, \quad y_2^1(0, k) = 0,$$

$$y_3^1(0, k) = 0, \quad y_4^1(0, k) = 1,$$

а для вектор-функции  $y^2(x) = \{y_m^2\}$  начальные условия примут вид

$$y_1^2(0, k) = 0, \quad y_2^2(0, k) = 0,$$

$$y_3^2(0, k) = 1, \quad y_4^2(0, k) = 0.$$

Решение исходной задачи (2.1)–(2.2) будем искать в виде линейной комбинации  $y = y^1c_1 + y^2c_2$ , причем  $c_1$  и  $c_2$  определяются из решения алгебраической системы, вида

$$\begin{cases} y_3^1(1, k)c_1 + y_3^2(1, k)c_2 + \\ + \beta_2(y_2^1(1, k)c_1 + y_2^2(1, k)c_2) = 0; \\ y_4^1(1, k)c_1 + y_4^2(1, k)c_2 - \\ - \beta_1(y_1^1(1, k)c_1 + y_1^2(1, k)c_2) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Отметим, что определитель этой системы имеет следующую структуру:

$$d(\beta_1, \beta_2, k) = a_0(k) + a_1(k)\beta_1 + a_2(k)\beta_2 + a_3(k)\beta_1\beta_2, \quad (2.4)$$

где

$$a_0 = y_2^1(1, k)y_4^2(1, k) - y_3^2(1, k)y_4^1(1, k),$$

$$a_1 = y_1^1(1, k)y_3^2(1, k) - y_3^2(1, k)y_3^1(1, k),$$

$$a_2 = y_2^1(1, k)y_4^2(1, k) - y_2^2(1, k)y_4^1(1, k),$$

$$a_3 = y_1^1(1, k)y_2^2(1, k) - y_1^2(1, k)y_2^1(1, k).$$

Нули уравнения  $d(\beta_1, \beta_2, k) = 0$  при фиксированных значениях параметров  $\beta_1$ ,

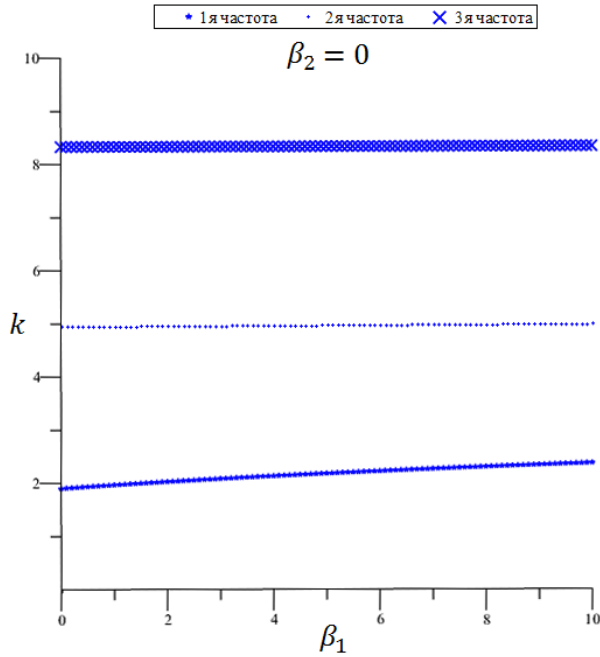


Рис. 1

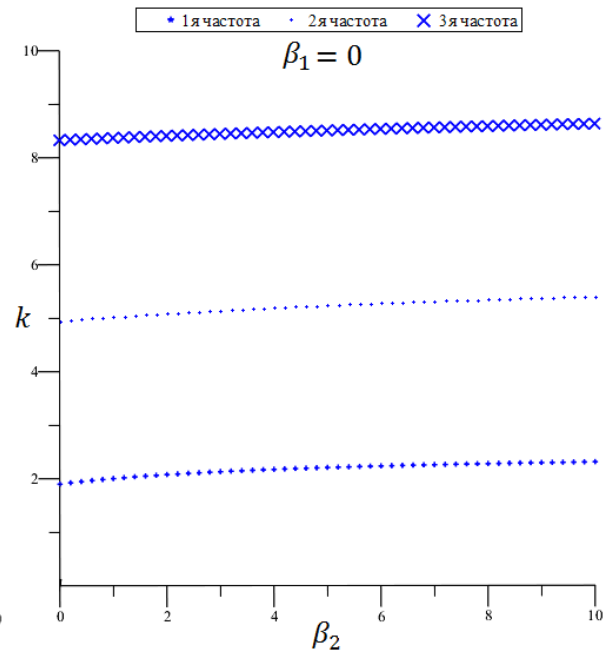


Рис. 2

$\beta_2$  определяют резонансные значения для неоднородной балки. Для анализа нулей этого уравнения составлена программа, осуществляющая построение поверхностей  $k_n = k_n(\beta_1, \beta_2)$ ,  $n \in N$ . Изучим эти поверхности методом сечений. На рис. 1–3 представлены сечения этой поверхности для функций жесткости вида  $D(x) = 1 + x^2$  и  $D(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ . Сечения представляют собой монотонно возрастающие функции, имеющие вид участков гипербол.

В большинстве прикладных задач имеется априорная информация о том, малы или велики параметры  $\beta_1, \beta_2$ . В таких ситуациях можно использовать регулярные разложения по этим параметрам или обратным им величинам для нахождения резонансных значений. Рассмотрим два случая.

1) *малые значения*  $\beta_1, \beta_2$ . Представим резонансные значения при малых  $\beta_1$  и  $\beta_2$  в виде

$$k = k_0 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2, \quad (2.5)$$

где  $k_0$  — корни порождающего уравнения  $a_0(k) = 0$ , которое является частотным уравнением задачи со свободным краем. Корни его могут быть легко найдены (для постоянной жесткости они известны). Тогда значения коэффициентов в разложении (2.5) легко

строятся по следующим формулам:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\frac{a_1(k_0)}{a'_0(k_0)}; \\ \alpha_2 = -\frac{a_2(k_0)}{a'_0(k_0)}. \end{cases} \quad (2.6)$$

2) *большие значения*  $\beta_1, \beta_2$ . В этом случае имеем следующее разложение

$$k = k_1 + \frac{\gamma_1}{\beta_1} + \frac{\gamma_2}{\beta_2}, \quad (2.7)$$

где  $k_1$  — корни порождающего уравнения  $a_3(k) = 0$ , которое является частотным уравнением задачи с жестко зашпеленным краем. Корни этого уравнения также могут быть найдены численно (для постоянной жесткости они известны), а для  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  имеем следующие формулы:

$$\begin{cases} \gamma_1 = -\frac{a_2(k_1)}{a'_3(k_1)}; \\ \gamma_2 = -\frac{a_1(k_1)}{a'_3(k_1)}. \end{cases} \quad (2.8)$$

### 3. Случай постоянной жесткости

В частном случае, когда  $D(x) = 1$ , частотное уравнение (2.4) и все функции, входящие в него имеют явный вид

$$\begin{aligned} a_0(k) &= k^5(2 \cos(k) \cosh(k) + 2), \\ a_1(k) &= -2 \cos(k) \sinh(k)k^2 + 2 \cosh(k) \sin(k)k^2, \end{aligned}$$

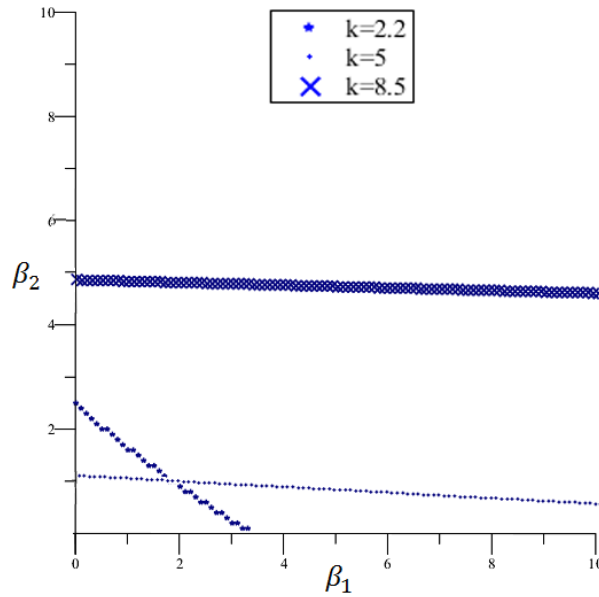


Рис. 3

$$\begin{aligned} a_2(k) &= 2 \cos(k) \sinh(k)k^4 + 2 \cosh(k) \sin(k)k^4, \\ a_3(k) &= -2 \cos(k) \cosh(k)k + 2, \end{aligned}$$

что позволяет получить простые явные формулы для резонансных значений, которые в последующем могут быть использованы для процедуры реконструкции. Тогда, опираясь на данные из [1], из (2.5) имеем соотношения

$$\begin{aligned} k_{01} &= 0,1517\beta_1 + 0,2874\beta_2 + 1,8751, \\ k_{02} &= 0,0097\beta_1 + 0,22095\beta_2 + 4,6941, \\ k_{03} &= 0,0021\beta_1 + 0,1271\beta_2 + 7,8548. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В табл. 1 представлено сравнение численного и асимптотического значений резонансных величин при малых значениях параметров, которое свидетельствует достаточно высокой точности приближенных формул.

В случае больших значений параметров для первых трех резонансных значений получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} k_{11} &= -102,1627 \frac{1}{\beta_1} - 4,7300 \frac{1}{\beta_2} + 4,7300, \\ k_{12} &= -485,0865 \frac{1}{\beta_1} - \\ &\quad - 7,8532 \frac{1}{\beta_2} + 7,8532, \\ k_{13} &= -1329,3360 \frac{1}{\beta_1} - 10,9956 \frac{1}{\beta_2} + 10,9956. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В табл. 2 представлено сравнение численного и асимптотического резонансных значений при больших величинах параметров, свидетельствующее о достаточно высокой точности приближенных формул.

#### 4. Реконструкция параметров в граничных условиях

Рассмотрим обратную задачу о нахождении коэффициентов  $\beta_1$  и  $\beta_2$  по известным резонансным частотам. Исследуем два варианта реконструкции.

1) По асимптотике, известной априори, при условии, что  $\beta_1$  и  $\beta_2$  — малы или велики, зная два резонансных значения, определим  $\beta_1$  и  $\beta_2$  из линейной алгебраической системы, опираясь либо на формулы (3.1), либо на формулы (3.2). В табл. 3 представлены результаты реконструкции параметров упругого закрепления.

2) В случае промежуточных значений параметров необходимо следовать общей схеме реконструкции параметров по двум известным резонансным значениям. Подставим поочередно известные резонансные значения в определитель (2.4) и его приравняем к нулю, получаем нелинейную систему уравнений

$$\begin{cases} a_0(k_1) + a_1(k_1)\beta_1 + a_2(k_1)\beta_2 + \\ \quad + a_3(k_1)\beta_1\beta_2 = 0, \\ a_0(k_2) + a_1(k_2)\beta_1 + a_2(k_2)\beta_2 + \\ \quad + a_3(k_2)\beta_1\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Таблица 1

Резонансное значение	$\beta_1$	$\beta_2$	Численное значение	Значение, полученное по (3.1)	Погрешность, %
$k_{01}$	0,1	0,2	1,9093	1,9478	2
$k_{02}$	0,1	0,2	4,737	4,7393	0,05
$k_{03}$	0,1	0,2	7,8797	7,8804	0,01
$k_{01}$	0,3	0,02	1,8956	1,9264	1,62
$k_{02}$	0,3	0,02	4,6995	4,7014	0,04
$k_{03}$	0,3	0,02	7,8575	7,858	0,006

Таблица 2

Резонансное значение	$\beta_1$	$\beta_2$	Численное значение	Значение, полученное по (3.2)	Погрешность, %
$k_{11}$	300	250	4,3639	4,3705	0,15
$k_{12}$	300	250	6,4148	6,2048	3,2
$k_{11}$	600	550	4,5455	4,5511	0,12
$k_{12}$	600	550	6,9450	7,0304	1,22

Решая её, получим два набора восстановленных  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , один из которых не удовлетворяет условиям задачи ( $\beta_1 > 0$ ,  $\beta_2 > 0$ ) (табл. 4).

В работе также был произведен анализ влияния зашумления на результаты реконструкции. Результаты вычислительных экспериментов показали, что зашумление входных данных для резонансных частот порядка  $10^{-4}$  дает погрешность в определяемых параметрах упругого опирания величины порядка  $10^{-3}$ . Если зашумление входных данных более 3 %, происходит катастрофическая потеря точности.

### Заключение

Изучены собственные колебания балок переменной жесткости с жестким закреплением на одном краю и упругим закреплением, характеризующимся двумя параметрами, на другом. Проведен асимптотический анализ задачи, позволивший получить аналитические зависимости резонансных частот в зависимости от параметров упругости. Сформулирована обратная задача по нахождению параметров упругости опоры при известных двух резонансных частотах. Обсуждены различные аспекты изучаемой задачи, в том числе ее единственность, представлен новый способ решения. Оценено влияние зашумления исходных данных на результат восстановления.

### Литература

1. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем. М., Машиностроение, 1970. 736 с.
2. Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971. 224 с.
3. Глаголевский Б. А., Москаленко И. Б. Низкочастотные акустические методы контроля в машиностроении Л.: Машиностроение, 1977. 203 с.
4. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. М: Наука, 1980. 286 с.
5. Ватulyян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
6. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикл. математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
7. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий и её приложения. М.: Физматлит, 2009. 272 с.
8. Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies // Inverse Probl. Sci. Engng. 2004. Vol. 12. No. 4. P. 393–408.
9. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. № 1. С. 139–147.
10. Калиткин Н. Н. Численные методы. Изд. 2. БХВ-Петербург, 2011. 586 с.

Таблица 3

Исходные		Заданные резонансы	Восстановленные		Погрешность, %
$\beta_1$	$\beta_2$		$\beta_1$	$\beta_2$	
0,01	0,02	1,8823 4,6986	0,0096	0,0199	4 0,01
0,06	0,02	1,89 4,6991	0,0585	0,02	2,5 0
0,06	0,1	1,9107 4,7162	0,0493	0,0978	18 2

Таблица 4

Исходные		Заданные резонансные значения		Восстановленные параметры	
$\beta_1$	$\beta_2$	$k_1$	$k_2$	$\beta_1$	$\beta_2$
0,2	0,4	1,9918	4,7758	0,2003	0,4000
55	2	3,4612	5,3865	55,0001	2,0000
500	200	4,4985	6,8033	499,9743	200,4591
1500	100	4,6186	7,4329	1500,0072	99,9976

## References

1. Philippov A. P. *Kolebaniya deformiruemых sistem* [Fluctuations deformable systems]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1970, 736 p. (In Russian)
2. Pavlov B. V. *Akusticheskaya diagnostika mexanizmov* [Acoustic diagnostics mechanisms]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1971, 224 p. (In Russian)
3. Glagolevskij B. A., Moskalenko I. B. *Nizkочастотные акустические методы контроля в машиностроении* [Low-frequency acoustic methods of control in mechanical engineering]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1977, 203 p. (In Russian)
4. Lavrentev M. M., Romanov V. G., Shishatskij S. P. *Nekorrektnye zadachi matematicheskoy fiziki i analiza* [Ill-posed problems of mathematical physics and analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980, 286 p. (In Russian)
5. Vatulyan A. O. *Obratnye zadachi v mexanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse Problems in Solid Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 223 p. (In Russian)
6. Axatov I. Sh., Akhtyamov A. M. *Opreделение vida zakrepleniya sterzhnya po sobstvennym chastotam ego izgibnyx kolebanij* [Determining the type fastening rod using natural frequencies of its flexural vibrations]. *Prikladnaya matematika i mexanika* [Applied Mathematics and Mechanics], Tver, 2001, vol. 65, no. 2, pp. 290–298. (In Russian)
7. Akhtyamov A. M. *Teoriya identifikacii kraevyx uslovij i eyo prilozheniya* [Theory of identification of boundary conditions and its applications]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 272 p. (In Russian)
8. Akhtyamov A. M., Mouftakhov A. V. Identification of boundary conditions using natural frequencies. *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2004, vol. 12, no. 4, pp. 393–408.
9. Akhtyamov A. M., Safina G. F. *Opreделение vibrozashhitnogo zakrepleniya truboprovoda* [Determination of the piping vibration protection]. In *Prikladnaya mexanika i texnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2008, no. 1, pp. 139–147. (In Russian)
10. Kalitkin N. N. *Chislennye metody. Izd. 2* [Numerical methods. Vol. 2]. BHV-Petersburg Publ., 2011, 586 p. (In Russian)

Статья поступила 15 августа 2015 г.

© Ватульян А. О., Васильев Л. В., 2015