

УДК 539.3, 534-18

РЕКОНСТРУКЦИЯ ПОЛЯ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ
В НЕОДНОРОДНОЙ ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ

Дударев В. В., Ляпин А. А., Святко Ю. А.

RECONSTRUCTION OF RESIDUAL STRESS FIELD FOR INHOMOGENEOUS
POROELASTIC MEDIADudarev V. V.^{*}, Lyapin A. A.^{**}, Svyatko Yu. A.^{**}^{*} Southern mathematical Institute of Vladikavkaz Science Center of RAS, Vladikavkaz, 362027, Russia^{**} Southern federal university, Rostov-on-Don, 344090, Russia
e-mail: lyapin@sfsu.ru

Abstract. Poroelastic structures are widespread in many fields of technology, medicine and biology. Accounting for the presence of a porous skeleton and pore fluid makes it possible to describe the dynamic behavior of the environment more accurately.

The presented article deals with the vibrations of inhomogeneous poroelastic media taking into account the initial stress field and the method of reconstruction for such field based on some data on the dynamic behavior of the structure.

Initial or residual stresses make considerable contribution to the mechanical capacity of the bodies, and affect on the dynamic behavior. The presence of initial or residual stresses in mechanical structures significantly changes the stress-strain state for such systems and without taking into account this factor, results of simulation may greatly differ from the actual data.

There are many methods for determining the initial stress fields, including the X-ray methods, techniques of scratching and drilling, as well as the method of acoustic sensing, that belongs to the nondestructive testing methods and requires a special attention. We considered the problem of reconstruction of the initial stress field for an inhomogeneous poroelastic column, which is based on acoustic sensing method.

The equations for the longitudinal oscillations of poroelastic inhomogeneous body in the presence of initial stress field are formulated. The influence of the level of initial stress and Biot modulus on the dynamic behavior of medium is studied. A series of numerical experiments on the reconstruction of various distribution laws for initial stress field are performed.

Keywords: poroelasticity, initial stress, reconstruction of inhomogeneous characteristics, vibration

Введение

Поведение некоторых биологических структур и современных технических изделий описываются в рамках моделей пороупругого материала. При этом предварительные напряжения (ПН), создаваемые в объекте скрытыми воздействиями различной природы, могут как играть важную функциональную роль, например в костной ткани, так и оказывать негативное воздействие. Одним

из наиболее востребованных неразрушающих методов диагностики ПН в настоящее время является метод акустического зондирования [1].

Применение балочной модели позволяет исследовать основные свойства среды и выявлять важные аспекты динамических процессов, протекающих в теле. Например, в работе [6] в рамках теории Био и модели балки Тимошенко рассмотрен динамический отклик

Дударев Владимир Владимирович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного математического института Владикавказского научного центра РАН; e-mail: dudarev_vv@mail.ru

Ляпин Александр Александрович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: lyapin@sfsu.ru

Святко Юлия Александровна, аспирант кафедры теории упругости института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: yuliannasvyatko@mail.ru

Работа выполнена при поддержке государственного задания Минобрнауки России (9.665.2014/К) и РФФИ (14-01-31453 мол_а, 13-01-00196).

пороупругой балки, находящейся под действием точечной нагрузки.

Вопросам восстановления различных параметров пороупругих сред посвящено много работ. В [7] представлен метод для определения упругих свойств пороупругого материала на основе статического эксперимента. Подход основан на измерениях всего поля смещений среды в конечном числе точек на поверхности сжатого образца. В работе [8] описана процедура восстановления структуры двухфазной пористой среды на основе вероятностного подхода с учетом плотности распределения и функции корреляции искомых величин. Случайное распределение пор смоделировано дискретным нормированным полем, которое принимает значение 1 в порах и значение 0 для упругой фазы. Метод протестирован путем формирования большого числа пористых образцов с учетом разных вариантов распределения пористости и функции корреляции. Этот подход имеет важное значение для анализа строительных материалов, где несущая способность существенно зависит от распределения пор. В качестве примера такого материала можно упомянуть пористый бетон, имеющий высокий коэффициент пористости и различное распределение кластеров пор, что сильно влияет на физические свойства. В работе [9] с использованием вероятностного подхода рассматривается восстановление функции распределения пористости бетона с различным распределением пустот. В статье [10] представлен подход к получению структурных характеристик сложного пористого материала, основанный на данных микрорентгеновских томограмм.

Необходимо отметить, что наличие предварительных или остаточных напряжений в механических структурах существенно изменяет их напряжённо-деформированное состояние, поэтому без учета таких напряжений результаты моделирования могут значительно отличаться от реальных данных. В случае искусственных объектов и для биологических тел ПН могут возникать по причине каких-либо внешних или внутренних воздействий. Эти и другие факторы, связанные с наличием и распределением полей ПН, требуют разработки методик их определения и оценки.

Некоторые фундаментальные аспекты для решения обратных коэффициентных задач детально описаны в работах Ватулья-

на А.О. [3], [5], где на основе методов линеаризации и применения слабой постановки изучены методики построения интегральных соотношений для определения неизвестных добавок к искомым коэффициентам.

1. Прямая задача

На основе общих уравнений движения пороупругого континуума, описанных в работе М.А. Био [12], уравнения установившихся продольных колебаний для неоднородной пороупругой одномерной среды после отделения временного множителя могут быть выписаны в виде

$$\begin{aligned} [E(x)\varepsilon(x, \omega) - a(x)p(x, \omega)]' + \\ + \rho\omega^2 v(x, \omega) = 0, \quad (1.1) \\ - (k(x)p'(x, \omega))' + i\omega \frac{\phi(x)^2}{R} p(x, \omega) + \\ + i\omega a(x)v'(x, \omega) = 0, \end{aligned}$$

где $E(x)$ — модуль Юнга, $v(x, \omega)$ — функция смещения, $\varepsilon(x, \omega)$ — компонента тензора деформации, ρ — плотность материала, ω — частота колебаний, $a(x)$ — модуль Био, $k(x)$ — коэффициент проницаемости среды, $p(x, \omega)$ — функция порового давления, $\phi(x)$ — характеристика пористости среды, R — гидростатическая константа. Штрихом обозначена производная по x .

В уравнениях (1.1) нет учета влияния полей ПН. Для вывода постановки задачи с учетом неоднородного поля ПН представим функцию смещения в виде суммы компоненты смещения u_0 , характеризующего предварительное напряженное состояние (ПНС), и компоненты u , описывающей текущее состояние

$$v(x, \omega) = u_0(x, \omega) + u(x, \omega).$$

Тогда выражение для $\varepsilon(x, \omega)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, \omega) &= v'(x, \omega) + \frac{1}{2}v'(x, \omega)^2 = \\ &= u_0'(x, \omega) + u'(x, \omega) + \\ &+ \frac{1}{2}[u_0'(x, \omega)^2 + 2u_0'(x, \omega)u'(x, \omega) + u'(x, \omega)^2]. \end{aligned}$$

Учитывая малость полей перемещения, имеем

$$\varepsilon(x, \omega) = u'(x, \omega)(1 + u_0'(x, \omega)).$$

Пусть ПНС инициировано некоторой статической нагрузкой. Тогда учитывая, что единственная отличная от нуля компонента тензора ПН в одномерном случае $\sigma_0(x) = E(x)u'_0(x)$, для описания установившихся колебаний неоднородной пороупругой среды характерного размера L будем использовать следующую постановку задачи:

$$[(E(x) + \sigma_0(x))u'(x, \omega) - a(x)p(x, \omega)]' + \rho\omega^2 u(x, \omega) = 0,$$

$$-(k(x)p'(x, \omega))' + i\omega \frac{\phi(x)^2}{R} p(x, \omega) + i\omega a(x)u'(x, \omega) = 0,$$

$$u(x, \omega)|_{x=0} = 0, \quad p(x, \omega)|_{x=0} = 0, \quad (1.2)$$

$$[(E(x) + \sigma_0(x))u'(x, \omega) - a(x)p(x, \omega)]|_{x=L} = f,$$

$$(-k(x)p'(x, \omega))|_{x=L} = h,$$

где f, h — усилие и поток поровой жидкости при $x = L$.

Обезразмерим задачу путем введения следующих коэффициентов и функций:

$$\xi = \frac{x}{L}, \quad U(\xi, \kappa) = \frac{u(x, \omega)}{L},$$

$$P(\xi, \kappa) = \frac{p(x, \omega)}{P_*}, \quad g(\xi) = \frac{E(x)}{E_{max}},$$

$$\beta(\xi) = \frac{a(x)P_*L}{E_{max}},$$

$$\kappa^2 = \frac{\rho\omega^2 L^2}{E_{max}}, \quad \mu(\xi) = k(x) \frac{P_*}{\sqrt{E_{max}\rho}},$$

$$\delta(\xi) = \frac{P_*L}{E_{max}} \frac{\phi(x)^2}{R}, \quad \tau\gamma(\xi) = \frac{\sigma_0(x)}{E_{max}},$$

$$F = \frac{f}{E_{max}}, \quad H = h \frac{P_*L}{\sqrt{E_{max}\rho}},$$

где E_{max} — максимальное значение модуля Юнга на интервале $[0, L]$, P_* — некоторое характерное давление, $\gamma(\xi)$ описывает закон изменения ПНС, параметр τ характеризует уровень ПНС, параметр κ пропорционален частоте колебаний.

Соответственно, система дифференциальных уравнений и граничные условия в безразмерной форме будут иметь вид

$$[(g(\xi) + \tau\gamma(\xi))U'(\xi, \kappa) - \beta(\xi)P(\xi, \kappa)]' + \kappa^2 U(\xi, \kappa) = 0, \quad (1.3)$$

$$-(\mu(\xi)P'(\xi, \kappa))' + i\kappa\delta P(\xi, \kappa) + i\kappa\beta(\xi)U'(\xi, \kappa) = 0,$$

$$U(\xi, \kappa)|_{\xi=0} = 0, \quad P(\xi, \kappa)|_{\xi=0} = 0,$$

$$[(g(\xi) + \tau\gamma(\xi))U'(\xi, \kappa) - \beta(\xi)P(\xi, \kappa)]|_{\xi=1} = F, \quad (1.4)$$

$$(-\mu(\xi)P'(\xi, \kappa))|_{\xi=1} = H.$$

В общем случае неоднородности характеристик среды и поля ПНС решение поставленной задачи можно получить только численно. В настоящей работе в качестве численного метода решения использован метод пристрелки, реализация которого основана на решении ряда задач Коши с линейно независимыми граничными условиями и группировки полученных решений в виде линейной комбинации, коэффициенты которой определяются из краевых условий при $\xi = 1$.

Для определения возможности решения обратной задачи диагностики поля ПНС в рамках акустического метода проведен анализ влияния значений модуля Био β рис. 1 (а), параметра τ рис. 1 (б) на амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) функции $U(1, \kappa)$. Параметр ϵ , характеризующий уровень модуля Био, введем следующим образом: $\hat{\beta} = \epsilon\beta$.

Из приведенных графиков видно, что повышение уровня ПН, как и значения параметра связанности среды (модуля Био), увеличивает значения резонансных частот. Параметр Био влияет на наличие затухания в среде и влияние жидкой фракции на упругий скелет. Отметим, если устремить этот параметр к нулю, то исходная система связанных уравнений (1.3) и граничные условия (1.4) развязываются относительно неизвестных функций $U(\xi, \kappa)$ и $P(\xi, \kappa)$. Как видно из рис. 1 (а), увеличение параметра Био ведет к более сильному затуханию в среде, что демонстрируется уменьшением амплитуды функции смещения на частоте второго резонанса. При больших значениях параметра κ ($\kappa > 8$) амплитуда смещений падает значительно.

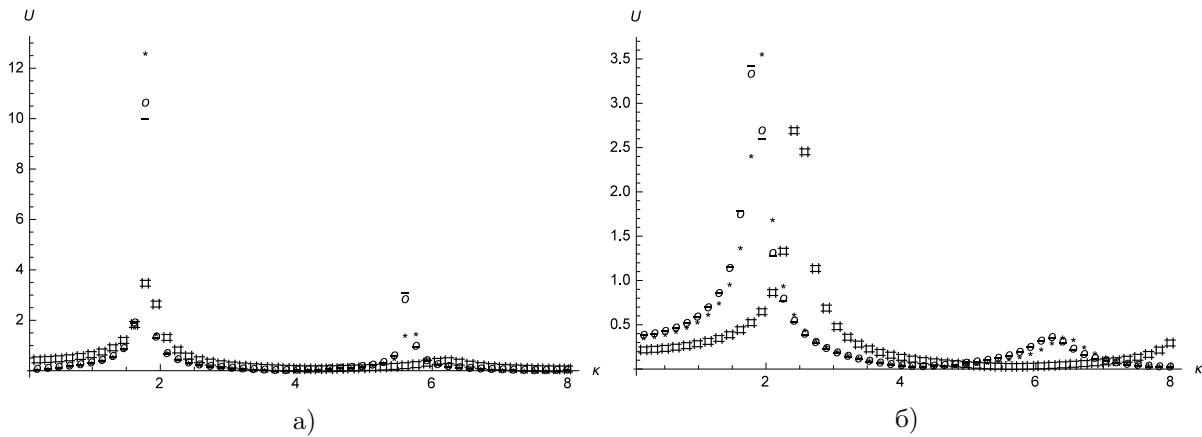


Рис. 1. Графики АЧХ для различных уровней модуля Био (а) («—» $\epsilon = 0,001$, «о» $\epsilon = 0,01$, «*» $\epsilon = 0,1$, «#» $\epsilon = 1$) и уровня ПН (б) («—» $\tau = 0,001$, «о» $\tau = 0,01$, «*» $\tau = 0,1$, «#» $\tau = 1$)

2. Обратная задача

Рассмотрим обратную задачу о восстановлении функции ПН $\gamma(\xi)$. Для решения задач реконструкции необходимо обладать некоторой априорной информацией о поведении системы. Пусть известно значение амплитуды функции смещения на конце $\xi = 1$ в некотором диапазоне частот

$$n(\kappa) = U(1, \kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2].$$

Решение этой задачи можно построить на основе метода линеаризации исходной нелинейной задачи. Для этого положим

$$\gamma(\xi) = \gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi)\theta,$$

$$U(\xi, \kappa) = U_0(\xi) + U_1(\xi)\theta,$$

где θ — некоторый малый параметр.

Используя введенные представления для функций $\gamma(\xi)$, $U(\xi, \kappa)$, на основе слабой постановки задачи [5], [11] можно получить интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции поправки $\gamma_1(\xi)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \tau \gamma_1(\xi) (U_0'(\xi, \kappa))^2 d\xi = \\ = F \cdot (U_0(1, \kappa) - n(\kappa)), \quad (2.1) \\ \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \end{aligned}$$

где $U_0(\xi, \kappa)$ — решение краевой задачи (1.3), (1.4) при $\gamma(\xi) = \gamma_0(\xi)$.

Таким образом, процедура реконструкции сводится к выбору начального приближения

функции γ_0 и последующему определению поправки γ_1 из решения (2.1). Решение (2.1) является некорректной задачей и требует регуляризации. В качестве метода регуляризации использован метод Тихонова [2]. На следующем этапе в качестве начального приближения принимается функция вида $\gamma_0(\xi) + \gamma_1(\xi)$ и процедура повторяется. Процесс завершается, когда значение правой части уравнения (2.1) становится меньше наперед заданной точности.

На рис. 2 представлены результаты восстановления ПН для различных законов распределения. Во всех случаях диапазон частот $[\kappa_1, \kappa_2]$ брался между значением первой и второй резонансных частот. Сплошная линия — точное решение, пунктир — начальное приближение, точками — восстановленное решение.

Во всех примерах относительная погрешность восстановления составила менее 7 % за исключением концевых точек, где для некоторых случаев погрешность была несколько выше. Отметим, что уровень ПН в исследуемой задаче на три порядка меньше модуля упругости материала. Такой выбор был сделан исходя из соотношения уровней полей ПН и модулей упругости в реальных структурах. Несмотря на такое малое отличие по величине, результаты реконструкции являются удовлетворительными.

Литература

1. Ватумлян А. О., Дударев В. В., Недин Р. Д. Предварительные напряжения: моделирование и идентификация. Ростов-на-Дону: Изда-

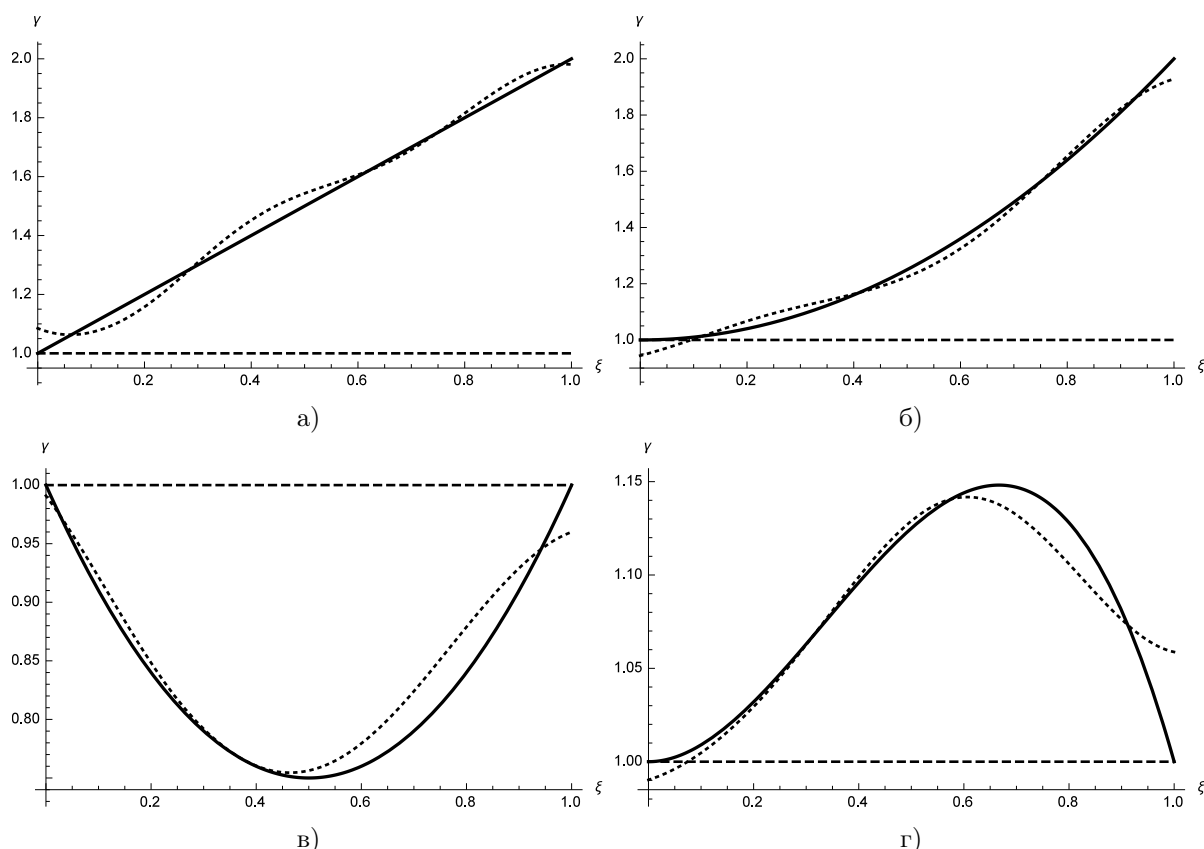


Рис. 2. Результаты восстановления уровня преднапряжения $\gamma(\xi)$ для различных функций распределения: (а) — $\gamma(\xi) = 1 + \xi$, (б) — $\gamma(\xi) = 1 + \xi^2$, (в) — $\gamma(\xi) = 1 - \xi + \xi^2$, (г) — $\gamma(\xi) = 1 + \xi^2 - \xi^3$

- тельство Южного федерального университета, 2014. 206 с.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
3. Ватульян А. О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела // ПММ. 2010. Т. 74. № 6. С. 911–918.
4. Ватульян А. О. О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // ДАН. 2008. Т. 422. № 2. С. 182–184.
5. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемых твердых тел. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
6. Kiani K., Avili H.G., Kojorian A.N. On the role of shear deformation in dynamic behavior of a fully saturated poroelastic beam traversed by a moving load // International Journal of Mechanical Sciences. 2015. Vol. 94. P. 84–95.
7. Van der Kelen C., Cuenca J., Goransson P. A method for the inverse estimation of the static elastic compressional moduli of anisotropic poroelastic foams – With application to a melamine foam // Polymer Testing. 2015. Vol. 43. P. 123–130.
8. Ilango S.J.J., Sarkar S., Sameen A. Reconstruction of 2-D porous media using Karhunen–Loève expansion // Probabilistic Engineering Mechanics. 2012. Vol. 32. P. 56–65.
9. Chung Sang-Yeop, Han Tong-Seok, Kim Se-Yun, Lee Tae-Hyung Investigation of the permeability of porous concrete reconstructed using probabilistic description methods // Construction and Building Materials. 2012. Vol. 66. P. 760–770.
10. Wang Qinghui, Huang Xiang, Zhou Wei, Li Jingrong Three-dimensional reconstruction and morphologic characteristics of porous metal fiber sintered sheet // Materials characterization. 2013. Vol. 86. P. 49–58.
11. Ватульян А. О., Ляпин А. А. Об обратных коэффициентных задачах поропругости // Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2013. № 2. С. 114–121.
12. Biot M. A. Theory of Propagation of Acoustic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. Part I. Low-Frequency Range // J. Acoustic. Soc. Am. 1956. Vol. 28. No. 2. P. 168–178.

References

1. Vatul'yan A. O., Dudarev V. V., Nedin R. D. *Predvaritel'nye napryazheniya: modelirovanie i identifikatsiya* [Prestressing: modeling and identification]. Rostov-on-Don, Izdatel'stvo Yuzhnogo federal'nogo universiteta Publ., 2014, 206 p. (In Russian)
2. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods of solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 285 p. (In Russian)
3. Vatul'yan A. O. K teorii obratnykh koeffitsientnykh zadach v lineynoy mekhanike deformiruемого tela [On the theory of inverse problems in the linear solid mechanics]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2010, vol. 74, no. 6, pp. 911–918. (In Russian)
4. Vatul'yan A. O. O variatsionnoy postanovke obratnykh koeffitsientnykh zadach dlya uprugikh tel [On the variational formulation of inverse problems for elastic bodies]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 2008, vol. 422, no. 2, pp. 182–184. (In Russian)
5. Vatul'yan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemykh tverdykh tel* [Inverse problems in the mechanics of deformable solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 223 p. (In Russian)
6. Kiani K., Avili H. G., Kojorian A. N. On the role of shear deformation in dynamic behavior of a fully saturated poroelastic beam traversed by a moving load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2015, vol. 94, pp. 84–95.
7. Van der Kelen C., Cuenca J., Goransson P. A method for the inverse estimation of the static elastic compressional moduli of anisotropic poroelastic foams – With application to a melamine foam. *Polymer Testing*, 2015, vol. 43, pp. 123–130.
8. Ilango S. J. J., Sarkar S., Sameen A. Reconstruction of 2-D porous media using Karhunen-Lo'eve expansion. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2012, vol. 32, pp. 56–65.
9. Chung Sang-Yeop, Han Tong-Seok, Kim Se-Yun, Lee Tae-Hyung. Investigation of the permeability of porous concrete reconstructed using probabilistic description methods. *Construction and Building Materials*, 2012, vol. 66, pp. 760–770.
10. Wang Qinghui, Huang Xiang, Zhou Wei, Li Jingrong. Three-dimensional reconstruction and morphologic characteristics of porous metal fiber sintered sheet. *Materials characterization*, 2013, vol. 86, pp. 49–58.
11. Vatul'yan A. O., Lyapin A. A. Ob obratnykh koeffitsientnykh zadachakh porouprugosti [On the inverse problem poroelasticity]. *Izvestiya Akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [Proc. of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids], 2013, no. 2, pp. 114–121. (In Russian)
12. Biot M. A. Theory of Propagation of Acoustic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. Part I. Low-Frequency Range. *J. Acoustic. Soc. Am.*, 1956, vol. 28, no. 2, pp. 168–178.

Статья поступила 15 августа 2015 г.

© Дударев В. В., Ляпин А. А., Святко Ю. А., 2015