УДК 539.375

ХРУПКОЕ РАЗРУШЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ ПРИ РАЗВИТИИ «УЗКИХ» ИЗОЛИРОВАННЫХ ДЕФЕКТОВ

Дунаев В. И., Молдаванов С. Ю., Лозовой С. Б., Георгияди В. Г.

BRITTLE FRACTURE MATERIALS IN DEVELOPMENT “NARROW” ISOLATED DEFECTS

Dunaev V. I., Moldavanov S. Y., Lozovoy S. B., Georgiyadi V. G.

Kuban State University of Technology, Krasnodar, 350072, Russia
e-mail: ebola-88@mail.ru

Abstract. We obtain a macroscopic criterion of brittle fracture in the formation of an isolated defect in the form of “narrow” reveals cracks (undercut) in two cases: in the first conformal mapping of the exterior of the unit circle on a plane with a defect in the form of the undercut is given a rational function; and the second is like a conformal segment display given by power series. It is shown that in both cases, the limit curve is identical to the case where a defect is defined «narrow ellipse». At the same crack as focused or perpendicular tensile stress or compressive stress along. Hence it is that the shape and geometrical properties “quite narrow” isolated defect does not affect the values of critical loads required for the start of its development.

Proposed in the criterion allows to evaluate the strength of the various brittle materials under the single static load at a constant temperature of experience.

Keywords: brittle fracture materials, development isolated defects, form isolated defects, fracture limit curve, drop-crack

Введение

В работах [1, 2] предложено термодинамическое условие хрупкого разрушения, опирающееся на энергетическую концепцию в исследовании процесса хрупкого разрушения, сформулированную А. Гриффитсом. На основании этого условия в случае плоского напряжённо-деформированного состояния и однократного статического нагружения при постоянной температуре рассматривается задача о хрупком разрушении пластины под действием главных напряжений P_1 и P_2 вследствие образования в ней изолированного дефекта в форме «узкого» эллипса с полуосями a, $b\,(a)$, $b \ll a$. Получен макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде кривой эллиптической формы (предельной кривой) в пространстве главных напряжений P_1 и P_2, определяющих все комбинации компонентов P_1, P_2 (пределов прочности), при которых возможно начало движения трещины с характеризующим её размером a_*. При этом независимо от комбинаций критических напряжений P_1 и P_2, соответствующих точкам, лежащим на предельной кривой, трещина ориентируется либо перпендикулярно растягивающему напряжению, либо вдоль сжимающего напряжения, что соответствует экспериментальным данным для ряда хрупких изотропных материалов. Показано, что для определения коэффициентов предельной кривой достаточно получить из экспериментов на осевое растяжение и сжатие пределы прочности материала $P^+_{T_0}$ и $P^-_{T_0}$ при температуре опыта $T = T_0$.

В настоящей работе получена предельная кривая при образовании изолированного де-

Дунаев Владислав Игоревич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru

Молдаванов Сергей Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru

Лозовой Станислав Борисович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: sum-smsm@mail.ru

Георгияди Владимир Георгиевич, аспирант кафедры производства строительных конструкций и строительной механики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: ebola-88@mail.ru

фекта в форме «узкой» раскрывающейся трещины (выточки) в двух случаях: в первом конформное отображение внешности единичного круга на плоскость с дефектом в форме выточки задаётся дробно-рациональной функцией, а во втором подобное конформное отображение задаётся отрезком степенного ряда. Показано, что в обоих случаях предельная кривая имеет вид, идентичный полученному в работах [1,2]. При этом трещина также ориентирована либо перпендикулярно растягивающему напряжению, либо вдоль сжимающего напряжения. Поэтому можно полагать, что форма и геометрические свойства «достаточно узкого» изолированного дефекта не влияют на величины критических нагрузок, необходимых для начала его развития, следовательно, в качестве модели образующегося изолированного дефекта можно принять произвольную «достаточно узкую» полость. Это положение соответствует энергетическому подходу в моделировании процесса хрупкого разрушения, когда предельное условие (критерий) определяется интегральными характеристиками процесса.

1. Энергетическое условие хрупкого разрушения

Решение краевых задач термоупругости для тел с дефектом зависит от параметров, характеризующих его геометрические размеры. Для получения зависимости между характерными размерами дефекта и заданными внешними нагрузками, при которых возможно его развитие, в работах [1, 2] сформулировано и исследовано условие разрушения, при однократном статическом нагружении в изотермическом случае имеющее вид

$$\frac{dW}{da} = 0. \tag{1.1}$$

В условии (1.1) $W = U - \gamma\Sigma$ — полная энергия тела при образовании в нём новой поверхности Σ (и площади Σ). В случае плоского напряжённо-деформированного состояния величина U определяется выражением [1, 2]

$$U = U^{(0)} - U^{(1)} = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \\ + \alpha_0 T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds. \tag{1.2}$$

Здесь U — высвобождающаяся внутренняя энергия (в отличие от условия А. Гриффитса, где U — высвобождающаяся потенциальная энергия), $U^{(0)}$ и $U^{(1)}$ — внутренняя энергия тела без дефекта и с дефектом соответственно, $\gamma\Sigma$ — внутренняя энергия, затраченная на образование новой поверхности дефекта Σ, $\sigma_{ij}^{(0)}$ — компоненты тензора напряжений в пластине без дефекта, n_j-компоненты вектора внешней нормали к области, ограниченной контуром Σ, $u_i^{(1)}$ — компоненты вектора напряжения в пластине с дефектом, α_0 — линейный коэффициент теплового расширения, T_0 — абсолютная температура, δ_{ij} — символ Кронекера, $k_1 = E/(1-\nu)$ — для плоского напряжённого состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ — для плоской деформации, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

Первое слагаемое в выражении (1.2) описывает потенциальную составляющую, а второе — энтропийную составляющую высвобождающейся внутренней энергии.

2. Метод вычисления высвобождающейся внутренней энергии при образовании изолированного дефекта

Пусть односвязное тело до образования в нём изолированного дефекта находится в однородном напряжённом состоянии под действием главных напряжений P_1 и P_2. Будем считать, что при образовании дефекта тело деформируется теми же напряжениями, приложенными вдали от дефекта (теоретически — на бесконечности). Рассмотрим бесконечную пластину D, ослабленную криволинейным отверстием (выточкой) с контуром Σ, когда на бесконечности приложены напряжения P_1 и P_2, действующие во взаимно перпендикулярных направлениях, и напряжение P_1 составляет с осью ox угол α. При этом контур Σ свободен от внешних напряжений.

Вычислим высвобождающуюся внутреннюю энергию $U = U^{(0)} - U^{(1)}$ при образовании данного дефекта, когда тело до его образования находится в однородном напряжённо-деформированном состоянии. В плоских задачах теории упругости компоненты тензора напряжений и вектора перемещений определяются двумя функциями $\phi(z)$ и $\psi(z)$ комплексного переменного $z = x + iy$ и их производными [3]

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\left[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}\right],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = \\ = 2\left[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)\right], \quad (2.1)$$

$$2\mu(u_1 + iu_2) = \\ = \chi\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $2\mu = E/(1-\nu)$, $\chi = 3-4\nu$ для плоской деформации и $\chi = (3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напряжённого состояния.

Задача об определении напряжённо-деформированного состояния плоскости с дефектом сводится к нахождению двух функций $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ комплексного переменного (комплексных потенциалов), удовлетворяющих граничным условиям [3]

$$\phi_1(z) + z\overline{\phi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = 0, \quad z \in \Sigma \quad (2.2)$$

или в сопряжённой форме

$$\overline{\phi_1(z)} + \bar{z}\phi_1'(z) + \psi_1(z), \quad z \in \Sigma. \quad (2.3)$$

Функции $\phi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ имеют вид [3]

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \Gamma z + \phi^0(z); \\ \psi_1(z) &= \Gamma' z + \psi^0(z). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1 + P_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(P_1 - P_2)e^{-2i\alpha},$$

$\phi^0(z)$, $\psi^0(z)$ — голоморфные в области D функции, включая бесконечно удалённую точку.

Функции $\phi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, определяющие однородное напряжённо-деформированное состояние плоскости без дефекта, имеют вид [3]

$$\phi_0(z) = \Gamma z, \quad \psi_0(z) = \Gamma' z. \quad (2.5)$$

Используя выражения (2.1) и граничное условие (2.2), (2.3), комплексное представление интегралов высвобождающейся внутренней энергии (1.2) можно представить в виде [1, 2]

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu}\times \\ \times \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\oint_{\Sigma}\Big(\phi_1(z)\left[\bar{z}\phi_0''(z) + \psi_0'(z)\right] - \\ - \overline{\phi_1(z)}\left[\phi_0'(z) + \overline{\phi_0'(z)}\right]\Big)dz\right\} - \\ - \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Sigma}\overline{\phi_1(z)}dz\right\}. \quad (2.6)$$

С учётом функций (2.5), определяющих однородное напряжённо-деформированное состояние пластинки без дефекта, из выражения (2.6) получим

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu}\times \\ \times \mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Sigma}\left(2\Gamma\overline{\phi_1(z)} - \Gamma'\phi_1(z)\right)dz\right\} - \\ - \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Sigma}\overline{\phi_1(z)}dz\right\}. \quad (2.7)$$

Заметим, что для вычисления высвобождающейся внутренней энергии Uпо формуле (2.7) достаточно определить функцию $\phi_1(z)$ из решения задачи о бесконечной плоскости, ослабленной отверстием, когда на бесконечности заданы напряжения P_1 и P_2, а контур отверстия свободен от внешних напряжений.

Пусть функция

$$z = \omega(\xi) \quad (2.8)$$

осуществляет комформное отображение внешности единичного круга Ω в плоскости ξ на внешность криволинейного контура Σ в плоскости z. Переходя к переменной ξ по формуле (2.8) в интегралах (2.7), получим

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu}\times \\ \times \mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Omega}\left(2\Gamma\overline{\phi_1(\sigma)} - \Gamma'\phi_1(\sigma)\right)\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\} - \\ - \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}\mathrm{Re}\left\{i\oint_{\Omega}\phi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma)\,d\sigma\right\}, \quad (2.9)$$

где $\sigma = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ — произвольная точка единичной окружности Ω.

С учётом выражения (2.8) граничное условие (2.3) примет вид

$$\overline{\phi_1(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}\phi_1'(\sigma) + \psi_1(\sigma) = 0. \quad (2.10)$$

При этом согласно равенству (2.4) функции $\phi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ представим в виде

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= R\Gamma\xi + \phi^0(\xi); \\ \psi_1(\xi) &= R\Gamma'\xi + \psi^0(\xi). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Здесь $\phi^0(\xi)$, $\psi^0(\xi)$ — голоморфные в области $|\xi| > 1$ функции, включая и бесконечно удалённую точку.

Рассмотрим отдельно случай, $\omega(\xi)$ в (2.8) является отрезком степенного ряда

$$\omega(\xi) = R\left[\xi + \sum_{l=1}^{N} c_l \xi^{1-l}\right]. \tag{2.12}$$

Здесь R — параметр, не зависящий от переменной ξ.

Если на контуре Σ имеются угловые точки возврата, в решении возникает особенность, которую можно целиком отнести к функции $\psi(\xi)$ [4, 5]. (Функция $\psi(\xi)$ имеет соответствующие угловым точкам контура Σ полюса 1-го порядка в точках единичной окружности $|\xi| = 1$). Поскольку $\omega(\xi)$ определена выражением (2.12), комплексные потенциалы $\phi_1(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$, задаваемые равенством (2.11), можно представить в следующем виде [4, 5]

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= R\Gamma\xi + \sum_{l=1}^{N} a_l \xi^{1-l}; \\ \psi_1(\xi) &= R\Gamma'\xi + \sum_{l=1}^{\infty} b_l \xi^{1-l}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Из граничного условия (2.10) следует равенство

$$\begin{aligned} &\psi_1(\sigma)\,\omega'(\sigma) = \\ &\quad = -\overline{\phi_1(\sigma)}\omega'(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}\phi_1'(\sigma). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Подставляя в равенство (2.14) выражения (2.12) и (2.13) и приравнивая коэффициенты при одинаковых положительных степенях σ в обеих частях равенства, с учётом условия $\psi_1^0(\infty) = 0 \quad (b_1 = 0)$ [3] получаем систему линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов a_l, определяющих функцию $\phi_l(\xi)$

$$\begin{aligned} &\bar{a}_p + \sum_{l=1}^{N-p} (1-l)\, c_l \bar{a}_{l+p} + \\ &\quad + \sum_{l=1}^{N-p} (1-l)\, \bar{c}_{l+p} a_l + R\Gamma\bar{c}_p = D_p. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Здесь

$$D_p = \begin{cases} 0, & p \neq 2; \\ -R\Gamma', & p = 2. \end{cases}$$

Функцию $\psi_1(\xi)$ можно найти и не прибегая к сравнению коэффициентов перед одинаковыми степенями σ [5].

Умножая обе части равенства (2.14) на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\sigma - \xi},$$

где ξ — точка вне единичной окружности Ω и, интегрируя это соотношение по Ω, получаем

$$\omega'(\xi)\,\psi_1(\xi) = -\phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right)\omega'(\xi) - \omega\left(\frac{1}{\xi}\right)\phi_1'(\xi),$$

откуда

$$\psi_1(\xi) = -\phi_1\left(\frac{1}{\xi}\right) - \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)}\phi_1'(\xi).$$

Таким образом, из формулы (2.12) и первой формулы (2.13) имеем

$$\begin{aligned} \phi_1(\sigma) &= R\Gamma\sigma + \sum_{l=1}^{N} a_l \sigma^{1-l}, \\ \overline{\phi_1(\sigma)} &= R\Gamma\frac{1}{\sigma} + \sum_{l=1}^{N} \bar{a}_l \sigma^{l-1}, \\ \omega'(\sigma) &= R\left[1 - \sum_{l=1}^{N-1} l c_{l+1} \sigma^{-(l+1)}\right], \end{aligned} \tag{2.16}$$

Из выражений (2.16) следует, что подынтегральные функции в интегралах (2.9) регулярны в области $|\sigma| \leqslant 1$ как функции комплексной переменной σ, за исключением полюса в точке $\sigma = 0$. Поэтому интегралы (2.9) могут быть вычислены при помощи вычетов. Подставляя равенства (2.16) в выражение (2.9) и вычисляя интегралы внутренней энергии, получаем

$$\begin{aligned} U = -\frac{(\chi+1)\,\pi}{2\mu}\,\mathrm{Re}\Bigg\{&\Gamma' R\,(a_2 - Rc_2\Gamma) - \\ &- 2\Gamma R\left(R\gamma - \sum_{l=1}^{N-1} l\bar{a}_{l+1}c_{l+1}\right)\Bigg\} - \\ &- \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\,\pi}{\mu} \times \\ &\times \mathrm{Re}\left\{R\left(\sum_{l=1}^{N-1} l\bar{a}_{l+1}c_{l+1} - R\Gamma\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

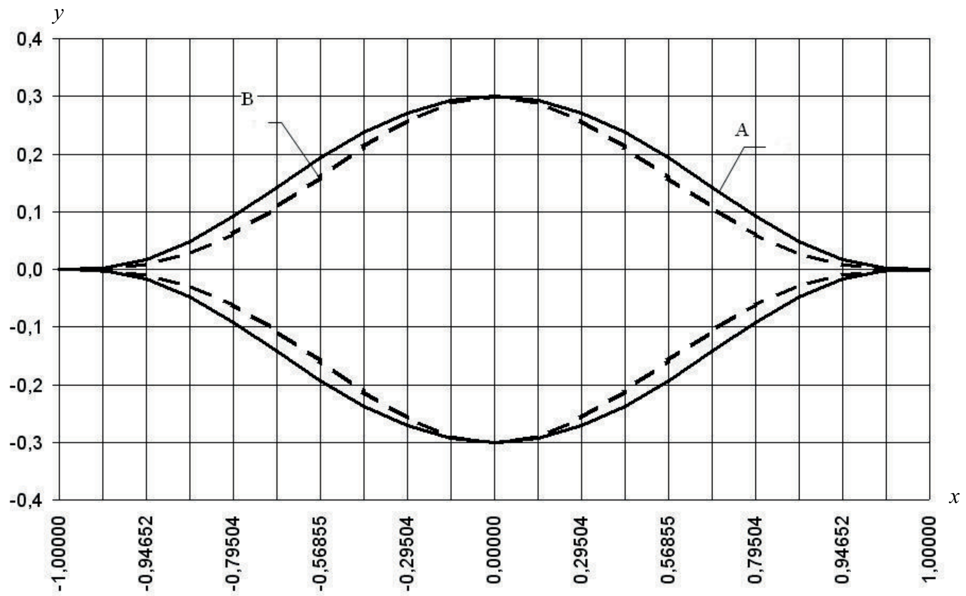

Рис. 1

Коэффициенты a_l, определяющие функцию $\phi_1(\sigma)$, входящие в выражение для внутренней энергии (2.17), находятся из решения системы линейных алгебраических уравнений (2.15).

3. Вычисление высвобождающейся внутренней энергии при образовании раскрывающейся трещины

Вычислим высвобождающуюся внутреннюю энергию при образовании изолированного дефекта в двух случаях. В случае (A) конформное отображение внешности единичного круга в плоскости ξ на внешность выточки в плоскости z задаётся дробно-рациональной функцией, а в случае (B) подобное соответствие задаётся отрезком степенного ряда. На рис. 1 изображён контур выточки в случаях (A) и (B) при $b/a = 0{,}1$.

Рассмотрим бесконечную пластину, ослабленную выточкой с контуром Σ, когда на бесконечности действуют во взаимно перпендикулярных направлениях напряжения P_1 и P_2, и напряжение P_1 составляет с осью ox угол α. При этом контур Σ свободен от внешних напряжений.

В случае (A) параметрическое уравнение контура Σ имеет вид [6]

$$x(\theta) = A\left(\cos\theta + m\frac{(1-t)\cos\theta}{1-2t\cos 2\theta + t^2}\right);$$

$$y(\theta) = A\left(\sin\theta - m\frac{(1+t)\sin\theta}{1-2t\cos 2\theta + t^2}\right), \quad (3.1)$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$;

$$t = \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}; \quad m = \frac{2(1-\varepsilon)^2}{2-\varepsilon};$$

$$A = \frac{a}{2-\varepsilon}; \quad \varepsilon = \frac{b}{a};$$

a, b — характерные размеры дефекта.

Функция $z = \omega(\xi)$, осуществляющая конформное отображение внешности единичного круга в плоскости ξ на внешность криволинейного контура Σ, заданного уравнениями (3.1) в плоскости z, имеет вид [6]

$$z = \omega(\xi) = A\left(\xi + \frac{m\xi}{\xi^2 - t}\right). \quad (3.2)$$

Для данной задачи функция $\phi_1(\xi)$ может быть представлена

$$\phi_1(\xi) = A\left(\Gamma\xi - \frac{\overline{\Gamma'}}{\xi} - B\frac{\xi}{\xi^2 - t}\right),$$

где

$$B = \frac{m}{\left(1-t^2\right)^2 - 2mt\left(1+t^2\right)}\times \\ \times\left\{\Gamma\left(1-t^2\right)^2 + t^2 m\left(1+t^2\right)\overline{\Gamma'} + \right. \\ \left. + \gamma' t\left[\left(1-t^2\right)^2 - tm\left(1+t^2\right)\right]\right\}. \quad (3.3)$$

Учитывая (3.2) и (3.3), интегралы высвобождающейся внутренней энергии (2.9) можно записать

$$U = -\frac{\chi+1}{4\mu}A^2 \operatorname{Re}\left\{ i\oint_{\Omega}\left[2\Gamma\varphi_1 - \right.\right. \\ \left.\left. - \Gamma'\left(\Gamma\sigma - \frac{\overline{\Gamma'}}{\sigma} - B\frac{\sigma}{\sigma^2 - t}\right)\right]\varphi_2\right\} - \\ - \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)}{2\mu}A^2 \operatorname{Re}\left\{ i\oint_{\Omega}\varphi_1\varphi_2\right\}, \quad (3.4)$$

где

$$\varphi_1 = \left(\frac{\Gamma}{\sigma} - \Gamma'\sigma - \bar{B}\frac{\sigma}{1-t\sigma^2}\right);$$

$$\varphi_2 = \left(1 - \frac{m\left(\sigma^2+t\right)}{\left(\sigma^2-t\right)^2}\right)d\sigma.$$

Подынтегральные функции выражений (3.4) регулярны внутри и на самой единичной окружности Ω за исключением полюсов в точках $\sigma = 0$ и $\sigma = \pm\sqrt{t}$, лежащих внутри Ω. Поэтому интегралы (3.4) вычисляются при помощи вычетов

$$U = U\left(a, \varepsilon(a), \alpha(a)\right) = \\ = \frac{(\chi+1)\pi A^2}{16\mu}\left\{P_1^2\left[3 + \frac{\varphi_3\varphi_4\varphi_5}{\varphi_6^2\varphi_7} - \right.\right. \\ \left. - \frac{4\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6\varphi_7}\cos 2\alpha + \frac{2\varepsilon\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6^2\varphi_7}\cos 4\alpha\right] - \\ - 2P_1P_2\left[1 + \frac{\varphi_3\varphi_4\left(\varepsilon^2+4\varepsilon-4\right)}{\varphi_6\varphi_7} + \right. \\ \left. + \frac{2\varepsilon\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6^2\varphi_7}\cos 4\alpha\right] + P_2^2\left[3 + \frac{\varphi_3\varphi_4\varphi_5}{\varphi_6^2\varphi_7} + \right. \\ \left.\left. + \frac{4\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6\varphi_7}\cos 2\alpha + \frac{2\varepsilon\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6^2\varphi_7}\cos 4\alpha\right]\right\} + \\ + \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)\pi A^2}{4\mu}\times \\ \times\left\{P_1\left[1 + \frac{\varphi_3\varphi_4}{\varphi_7} - \frac{2\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6\varphi_7}\cos 2\alpha\right] + \right. \\ \left. + P_2\left[1 + \frac{\varphi_3\varphi_4}{\varphi_7} + \frac{2\varphi_3\varphi_8}{\varphi_6\varphi_7}\cos 2\alpha\right]\right\}, \quad (3.5)$$

где

$$\varepsilon(a) = \frac{b(a)}{a}; \quad \varphi_3 = (1-\varepsilon)^2;$$
$$\varphi_4 = \left(\varepsilon^2 - 2\varepsilon + 2\right); \quad \varphi_5 = \left(3\varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4\right);$$
$$\varphi_6 = (2-\varepsilon); \quad \varphi_7 = \left(2 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3\right);$$
$$\varphi_8 = \left(4 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3\right).$$

Полагая в выражении (3.5)

$$\varepsilon = 1, \quad b(a) \equiv a,$$

$$P_1 = P_2 = P, \quad \chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

(что соответствует задаче об образовании круглого дефекта в случае осесимметричного нагружения), при плоском напряжённом состоянии получаем

$$U = \frac{2\pi a^2 P^2}{E} + \frac{4\pi a^2 \alpha_0 T_0 k_1 P}{E}. \quad (3.6)$$

Первое слагаемое в выражении (3.6) совпадает с известным выражением для высвобождающейся потенциальной энергии при образовании изолированного дефекта в форме круга для осесимметричного нагруженния [7], а второе слагаемое впервые рассматривается в работах [1, 2]. Аналогично при $\varepsilon = 0$ ($b(a) \equiv 0$) получаем выражения для высвобождающейся внутренней энергии при образовании изолированного внутреннего дефекта в виде математического разреза [1, 2]

$$U = \frac{\pi a^2}{2E}\left\{P_1^2(1-\cos 2\alpha) + \right. \\ \left. + P_2^2(1+\cos 2\alpha)\right\} + \\ + \frac{\pi a^2\alpha_0 T_0 k_1}{E}\left\{P_1(1-\cos 2\alpha) + \right. \\ \left. + P_2(1+\cos 2\alpha)\right\}. \quad (3.7)$$

Рассмотрим случай (B). В этом случае параметрическое уравнение контура Σ имеет вид

$$x = R\left[(2-r)\cos\theta + \frac{r}{3}\cos 3\theta\right], \quad y = R\left[r\sin\theta - \frac{r}{3}\sin 3\theta\right], \tag{3.8}$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$;

$$r = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}; \quad R = \frac{a}{4}(2+\varepsilon); \quad \varepsilon = \frac{b}{a};$$

a, b — характерные размеры дефекта.

Функция, конформно отображающая внешность единичной окружности на внешность контура (3.8), имеет вид

$$\omega = R\left[\xi + (1-r)\frac{1}{\xi} + \frac{r}{3}\frac{1}{\xi^3}\right]. \tag{3.9}$$

Поскольку выражение (3.9) является отрезком степенного ряда, коэффициенты a_l для функции

$$\phi_1(\xi) = R\Gamma\xi + \sum_{l=1}^{N} a_l \xi^{1-l}$$

находятся из решения системы (2.15). С учётом выражения (3.9)

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1-r, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = \frac{r}{3}. \tag{3.10}$$

Решая систему (2.15), находим

$$\begin{aligned} &a_1 = 0,\\ &a_2 = -\frac{R}{9-r^2}\left[3r\Gamma' + 9\overline{\Gamma'} + \right.\\ &\qquad\qquad \left. + (1-r)(3+r)^2\Gamma\right],\\ &a_3 = 0,\\ &a_4 = -\frac{Rr}{3}\Gamma. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Подставляя выражения (3.10), (3.11) в формулу (2.17), получим

$$\begin{aligned} U = U(a,\varepsilon(a),\alpha(a)) = \frac{(\chi+1)\pi}{512\mu}\frac{a^2}{1+\varepsilon}\times\\ \times\Big\{P_1^2\big[2\varphi_9^4 - 2\varepsilon\varphi_9^3 + 6\varepsilon^3\varphi_9 + 3\varepsilon^4 -\\ - 8\left(1-\varepsilon^2\right)\varphi_9^2\cos 2\alpha + \varepsilon\varphi_9^3\cos 4\alpha\big] -\\ - 2P_1P_2\left[2\varepsilon\varphi_9^3 - 6\varepsilon^3\varphi_9 - 3\varepsilon^4 + \varepsilon\varphi_9^3\cos 4\alpha\right] +\\ + P_2^2\big[2\varphi_9^4 - 2\varepsilon\varphi_9^3 + 6\varepsilon^3\varphi_9 + 3\varepsilon^4 +\\ + 8\left(1-\varepsilon^2\right)\varphi_9^2\cos 2\alpha + +\varepsilon\varphi_9^3\cos 4\alpha\big]\Big\} +\\ + \frac{\alpha_0 T_0 k_1(\chi+1)\pi}{128\mu}\frac{a^2}{1+\varepsilon}\Big\{P_1\big[\varphi_9^4 - 2\varepsilon\varphi_9^3 +\\ + 6\varepsilon^3\varphi_9 + 3\varepsilon^4 - 4\left(1-\varepsilon^2\right)\varphi_9^2\cos 2\alpha\big] +\\ + P_2\Big[\varphi_9^4 - 2\varepsilon\varphi_9^3 + 6\varepsilon^3\varphi_9 +\\ + 3\varepsilon^4 + 4\left(1-\varepsilon^2\right)\varphi_9^2\cos 2\alpha\Big]\Big\}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $\varphi_9 = 2+\varepsilon$.

Полагая в равенстве (3.12) $\varepsilon = 0$, получаем выражение (3.7) для высвобождающейся внутренней энергии при образовании внутреннего дефекта в виде математического разреза. При $\varepsilon = 1$, получаем выражения для высвобождающейся внутренней энергии при образовании дефекта в форме астроиды [8].

Очевидно, что в этом случае высвобождающаяся внутренняя энергия вычисляется значительно проще, чем в случае (A), и выражение (3.12) имеет более простой вид.

4. Макроскопический критерий хрупкого разрушения при образовании изолированного дефекта в виде выточки

Состояние тела, при котором распространение дефекта (трещины) возможно, называется предельным состоянием равновесия, а условие наступления такого предельного состояния называют макроскопическим критерием разрушения. В случае однократного статического нагружения это энергетическое условие (1.1). При дополнительных предположениях о форме и расположении дефекта из условия (1.1) следует макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде

$$F(P_1, P_2, E, \nu, T_0, \alpha_0, a_*) = 0. \tag{4.1}$$

который представляет предельную кривую в пространстве главных напряжений P_1 и P_2, определяющую те комбинации пределов прочности, при которых возможно распространение дефекта с характеризующим его размером a_*. Определим предельную кривую (4.1) в случае (A), когда параметрическое уравнение контура дефекта Σ имеет вид (3.1).

Дифференцируя выражение (3.5) по a, с учётом обозначений

$$b' = \frac{db}{da}, \quad \alpha' = \frac{d\alpha}{da}$$

в соответствии с условием (1.1) при $\varepsilon^2 \ll 1$ и $b'\varepsilon^2 \ll 1$ получаем

$$\frac{dW}{da} = \frac{(\alpha+1)\pi}{16\mu} a \Big\{ P_1^2 \Big[\varsigma_1 - 2\varsigma_2 \cos 2\alpha + 2\alpha' a \sin 2\alpha + \varsigma_3 \cos 4\alpha - \frac{a\varepsilon}{1-6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \Big] + P_2^2 \Big[\varsigma_1 + 2\varsigma_2 \cos 2\alpha - 2\alpha' a \sin 2\alpha + \varsigma_3 \cos 4\alpha - \frac{a\varepsilon}{1-6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \Big] - 2P_1P_2 \Big[\frac{\varepsilon + b'(1-4\varepsilon)}{4(1-6\varepsilon)} + \varsigma_3 \cos 4\alpha - \frac{a\varepsilon}{1-6\varepsilon} \alpha' \sin 4\alpha \Big] + \frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\pi}{4\mu} \times a \left\{ P_1 \left[1 - \varsigma_2 \cos 2\alpha + \alpha' a \sin 2\alpha \right] + \left\{ P_2 \left[1 + \varsigma_2 \cos 2\alpha + \alpha' a \sin 2\alpha \right] \right\} - \frac{d}{da} \left(\gamma(a) \Sigma(a) \right) = 0. \quad (4.2)$$

Здесь $\Sigma(a)$ — длина контура Σ;

$$\varsigma_1 = \frac{4(4-23\varepsilon) + b'(4-11\varepsilon)}{8(1-6\varepsilon)};$$

$$\varsigma_2 = 1 - \frac{3\varepsilon}{4(1-5\varepsilon)} b'; \quad \varsigma_3 = \frac{\varepsilon + b'(1-5\varepsilon)}{4(1-6\varepsilon)}.$$

Для изотропных материалов условие хрупкого разрушения (4.1) при каждом фиксированном $a_* > 0$ представляет кривую в пространстве переменных P_1 и P_2, которая должна быть симметрична относительно прямой $P_1 = P_2$. Это условие выполняется при

$$\alpha' a \sin 2\alpha = \varsigma_2 \cos 2\alpha. \quad (4.3)$$

Условие (4.3) при $b'\varepsilon \ll 1$ имеет вид

$$\alpha' a \sin 2\alpha = \cos 2\alpha. \quad (4.4)$$

Выражение (4.4) совпадает с аналогичным соотношением [1, 2], получаемым при построении макроскопического критерия хрупкого разрушения при образовании дефекта в форме «узкого» эллипса. Интегрируя уравнение (4.4), будем иметь

$$|\cos 2\alpha| = \frac{C_0^2}{a^2}, \quad a > 0$$

или

$$\alpha(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \arccos \dfrac{C_0^2}{a^2}, 0 \leqslant \alpha < \dfrac{\pi}{4}; \\ \dfrac{1}{2} \left[\pi - \arccos \dfrac{C_0^2}{a^2} \right], \dfrac{\pi}{4} < \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (4.5)$$

С учётом равенства (4.3) запишем условие (4.2) в виде

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\frac{4\varsigma_4 + \varsigma_5 - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'}{4\varsigma_6 + \varsigma_7 + \varsigma_5 - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} P_1P_2 + \frac{1-6\varepsilon}{4\varsigma_6 + \varsigma_7 + \varsigma_5 - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} \times \left(32\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{512\mu}{(\chi+1)\pi} \frac{\gamma}{a} \right) = 0. \quad (4.6)$$

Здесь $\Sigma(a) \cong 4a$; $\gamma(a) \equiv \gamma = \mathrm{const}$; $\varsigma_4 = (\varepsilon + b'(1-4\varepsilon))$; $\varsigma_6 = (4-23\varepsilon)$;

$$\varsigma_5 = 2\left(\varepsilon + b'(1-5\varepsilon)\right) \cos 4\alpha; \quad \varsigma_7 = b'(4-11\varepsilon).$$

Предполагая, что для каждого материала существует характерный размер образующего дефекта $a = a_* = \mathrm{const}$ при любых комбинациях пределов прочности в пространстве главных напряжений P_1 и P_2, из выражения (4.6) получим макроскопический критерий хрупкого разрушения (предельную кривую) при однократном статическом нагружении

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + \left(1 - \nu_* - \left. \frac{5b'\varepsilon}{4\varsigma_6 + \varsigma_7 + \varsigma_5 - 8a\varepsilon \sin 4\alpha\alpha'} \right|_{a=a_*} \right) \times \left(2\alpha_0 T_0 k_1 (P_1 + P_2) - \frac{32\mu}{(\chi+1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} \right) = 0. \quad (4.7)$$

Здесь введено обозначение

$$\nu\left(a\right)=\frac{4\varsigma_4+\varsigma_5-8a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}{4\varsigma_6+\varsigma_7+\varsigma_5-8a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'},$$

$$\nu_*=\nu\left(a_*\right).$$

Рассмотрим выражение (4.5) при образовании дефекта критических размеров, т.е. при $a=a_*$. Этому значению a_* соответствуют различные комбинации величин критических напряжений P_1 и P_2. Тогда C_0 при $a=a_*$ может быть определено, если известно (например, из эксперимента) положение трещин для какой-либо одной комбинации P_1 и P_2. Для хрупких материалов (чугун, горные породы, пластмассы и т.д.) при одноосном сжатии трещина располагается параллельно действию сжимающей силы, а при одноосном растяжении — перпендикулярно к направлению растягивающей силы. Тогда, например, при $P_2=0$, $P_1=P^-<0$, следует положить $\alpha\left(a_*\right)=0$, где P^- — предел прочности при одноосном сжатии. Аналогично при $P_2=0$, $P_1=P^+>0$ следует положить $\alpha\left(a_*\right)=\frac{\pi}{2}$, где P^+ — предел прочности материала при одноосном растяжении. Для того, чтобы такие значения $\alpha\left(a_*\right)$ реализовывались, необходимо принять в решениях (4.5) $C_0=a_*$

$$\alpha\left(a\right)=\\
=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{a_*^2}{a^2}, 0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{4};\\ \dfrac{1}{2}\left[\pi-\arccos\dfrac{a_*^2}{a^2}\right], \dfrac{\pi}{4}<\alpha\leqslant\dfrac{\pi}{2},\end{cases}\tag{4.8}$$

$$0<a_*<a.$$

Как следует из равенства (4.8), независимо от комбинации критических напряжений P_1 и P_2, соответствующих точкам, лежащим на кривой разрушения (4.7), трещина всегда будет ориентирована или перпендикулярно к линии действия растягивающего напряжения, или вдоль сжимающего напряжения, т.е. величина $\alpha\left(a_*\right)$ всегда принимает одно из двух значений либо 0, либо $\frac{\pi}{2}$. Выбор ориентации трещины в каждом конкретном случае может быть сделан на основании известных экспериментальных данных.

Оценим выражение

$$\frac{5b'\varepsilon}{4\varsigma_6+\varsigma_7+\varsigma_5-8a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}.\tag{4.9}$$

При $a=a_*$, с учётом равенства (4.8), выражение (4.9) имеет вид

$$\frac{5b'\varepsilon}{16-20\varepsilon+6b'-21b'\varepsilon}$$

Пусть $b'\geqslant 0$, т.е. трещина «раскрывается» при развитии. Выражение

$$16-20\varepsilon+6b'-21b'\varepsilon=10-90\varepsilon+b'\left(6-21\varepsilon\right)\geqslant 0,$$

$\varepsilon<1/6$ (последнее условие не является ограничительным, т.к. для реальных трещин величина $\varepsilon=b/a$ значительно меньше $1/6$).

Тогда получим

$$0\leqslant\frac{5b'\varepsilon}{16-20\varepsilon+6b'-21b'\varepsilon}=\\
=\frac{5b'\left(90+21b'\right)\varepsilon}{\left(90+21b'\right)\left(16+6b'-\left(90+21b'\right)\varepsilon\right)}\leqslant\\
\leqslant\frac{5\varepsilon}{21\left(\frac{16+6b'}{90+21b'}-\varepsilon\right)}\leqslant\frac{3\varepsilon}{2\left(1-6\varepsilon\right)}.\tag{4.10}$$

В силу оценки (4.10) критерий (4.7) с точностью до величин порядка ε имеет вид

$$P_1^2+P_2^2-2\nu_*P_1P_2+\\
+2\alpha_0T_0k_1\left(1-\nu_*\right)\left(P_1+P_2\right)-\\
-\frac{32\mu\left(1-\nu_*\right)}{\left(\chi+1\right)\pi}\frac{\gamma}{a_*}=0.\tag{4.11}$$

В соответствии с постулатами А.А. Ильюшина и Д. Друкера предельная кривая должна быть выпуклой [9]. Из выражения (4.11) находим, что $\nu_*\in\left(-1,1\right)$. При таких значениях ν_* кривая (4.11) представляет собой эллипс в пространстве главных напряжений P_1 и P_2.

Определим предельную кривую (4.1) в случае (B), когда параметрическое уравнение контура Σ имеет вид (3.8). Дифференцируя выражения (3.12) по a в соответствии с условием (1.1) при $\varepsilon^2\ll 1$, получаем

$$\frac{dW}{da}=\frac{\left(\chi+1\right)\pi}{64\mu}a\Big\{P_1^2\big[2\varsigma_8+\varsigma_9\cos 4\alpha-\\
-\varsigma_{10}\sin 4\alpha-2\left(\varsigma_{11}\cos 2\alpha-4a\alpha'\sin 2\alpha\right)\big]-\\
-2P_1P_2\left[2\varsigma_9+\varsigma_9\cos 4\alpha-\varsigma_{10}\sin 4\alpha\right]+\\
+P_2^2\big[2\varsigma_8+\varsigma_9\cos 4\alpha-\varsigma_{10}\sin 4\alpha+\\
+2\left(\varsigma_{11}\cos 2\alpha-4a\alpha'\sin 2\alpha\right)\big]\Big\}+$$

$$+\frac{\alpha_0 T_0 k_1 (\chi+1)\pi}{16\mu}\times$$
$$\times a\Big\{P_1\left[4-\varsigma_{11}\cos 2\alpha+4a\alpha'\sin 2\alpha\right]+$$
$$+P_2\left[4-\varsigma_{11}\cos 2\alpha+4a\alpha'\sin 2\alpha\right]\Big\}-$$
$$-\frac{d}{da}\left(\gamma(a)\,\Sigma(a)\right)=0. \quad (4.12)$$

В силу изотропии выполняется условие

$$\alpha' a\sin 2\alpha=\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon b'\right)\cos 2\alpha, \qquad (4.13)$$

которое с точностью до величин порядка ε имеет вид (4.3) и при $b'\varepsilon \ll 1$ совпадает с выражением (4.4).

С учётом (4.13) после преобразований запишем условие (4.12) в следующем виде:

$$P_1^2+P_2^2-2\frac{\varsigma_{12}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}{2\varsigma_{14}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}P_1P_2+$$
$$+\frac{1+2\varepsilon}{2\varsigma_{14}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}\times$$
$$\times\left(16\alpha_0 T_0 k_1 (P_1+P_2)-\frac{256\mu}{(\chi+1)\pi}\frac{\gamma}{a}\right)=0. \qquad (4.14)$$

Здесь

$$\Sigma(a)\cong 4a;\quad \gamma(a)\equiv\gamma=\mathrm{const};$$
$$\varsigma_{12}=2\left(\varepsilon+b'(1+3\varepsilon)\right);$$
$$\varsigma_{13}=\left(\varepsilon+b'(1+3\varepsilon)\right)\cos 4\alpha;$$
$$\varsigma_{14}=\left((4-9\varepsilon)+b'(1+3\varepsilon)\right).$$

Тогда при $a=a_*=\mathrm{const}$ из выражений (4.14) получим макроскопический критерий хрупкого разрушения (предельную кривую) при однократном статическом нагружении

$$P_1^2+P_2^2-2\nu_* P_1 P_2+$$
$$+\left(1-\nu_*+\left.\frac{36\varepsilon}{2\varsigma_{14}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}\right|_{a=a_*}\right)\times$$
$$\times\left(2\alpha_0 T_0 k_1 (P_1+P_2)-\frac{32\mu}{(\chi+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*}\right)=0. \qquad (4.15)$$

Здесь введено обозначение

$$\nu(a)=\frac{\varsigma_{12}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}{2\varsigma_{14}+\varsigma_{12}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'},$$

$$\nu_*=\nu(a_*).$$

Оценим выражение

$$\frac{36\varepsilon}{2\varsigma_{14}+\varsigma_{13}-4a\varepsilon\sin 4\alpha\alpha'}. \qquad (4.16)$$

При $a=a_*$ выражение (4.16) принимает вид

$$\frac{36\varepsilon}{8-17\varepsilon+3b'+9b'\varepsilon}.$$

Пусть $b'\geqslant 0$, т.е. трещина раскрывается при развитии. Выражение $8-17\varepsilon+3b'+9b'\varepsilon\geqslant 0$ при $\varepsilon<\frac{8}{17}$. Тогда

$$0\leqslant\frac{36\varepsilon}{8-17\varepsilon+3b'+9b'\varepsilon}\leqslant\frac{36\varepsilon}{8-17\varepsilon}. \qquad (4.17)$$

В силу оценки (4.17) критерий (4.15) с точностью до величин порядка ε имеет вид

$$P_1^2+P_2^2-2\nu_* P_1P_2+$$
$$+2\alpha_0T_0k_1(1-\nu_*)(P_1+P_2)-$$
$$-\frac{32\mu(1-\nu_*)}{(\chi+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*}=0. \qquad (4.18)$$

Из выражения (4.15) находим, что $0\leqslant\nu_*\leqslant 1$ при $\varepsilon<\frac{8}{17}$.

При одних и тех же значениях величины ν_* выражения (4.18) и (4.11) совпадают с критерием, полученным в работах [1, 2] для дефекта эллиптической формы. При таком предположении геометрические свойства и форма «достаточно узкого» дефекта не влияет на величины критических нагрузок, необходимых для начала его развития.

5. Построение предельной кривой

Для построения предельной кривой достаточно экспериментально определить пределы прочности материала при осевом растяжении $P_{T_0}^+$ и сжатии $P_{T_0}^-$ при температуре опыта $T=T_0$. Действительно, полагая в (4.11) или (4.18) $P_2=0$, $P_1=P_{T_0}$, получаем

$$P_{T_0}^2+2\alpha_0T_0k_1(1-\nu_*)P_{T_0}-$$
$$-\frac{32\mu(1-\nu_*)}{(\chi+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*}=0.$$

Решая это уравнение, находим

$$P_{T_0}^{\pm}=-\alpha_0T_0(1-\nu_*)k_1\pm\sqrt{\eta},$$

где

$$\eta=\left[\alpha_0T_0(1-\nu_*)k_1\right]^2+$$
$$+32\mu(1-\nu_*)\gamma\left[\pi(\chi+1)a_*\right]^{-1}$$

Также имеют место равенства

$$P_{T_0}^{+} + P_{T_0}^{-} = 2\alpha_0 T_0 \left(1-\nu_*\right) k_1,$$
$$P_{T_0}^{+} P_{T_0}^{-} = -32 \left(1-\nu_*\right) \gamma \left[\pi \left(\alpha+1\right) a_*\right]^{-1}. \tag{5.1}$$

При этом условие $k_1 \neq 0$ всегда выполняется для хрупких материалов, т.к. для них $\nu < 0{,}5$.

Пусть $\alpha_0 \neq 0$, $T_0 \neq 0$. Вычисляя из первого равенства (5.1)

$$2\nu_*^{T_0} = 2 + \frac{P_{T_0}^{+} + P_{T_0}^{-}}{2\alpha_0 T_0 k_1}$$

и учитывая второе равенство (5.1), запишем критерий (4.18) в виде

$$P_1^2 + P_2^2 - \left(2 + \frac{P_{T_0}^{+} + P_{T_0}^{-}}{2\alpha_0 T_0 k_1}\right) P_1 P_2 - \left(P_{T_0}^{+} + P_{T_0}^{-}\right)\left(P_1^2 + P_2^2\right) + P_{T_0}^{+} P_{T_0}^{-} = 0. \tag{5.2}$$

Таким образом, коэффициенты предельной кривой (4.11) или (4.18) могут быть определены, если известны пределы прочности материала при растяжении и сжатии, и критерий имеет вид (5.2).

Отметим, что первое и второе равенства (5.1) позволяют определить величину γ через критические напряжения $P_{T_0}^{+}$ и $P_{T_0}^{-}$

$$\frac{\gamma}{a_*} = -\frac{P_{T_0}^{+} P_{T_0}^{-} \pi \left(\chi+1\right)}{32\mu\left(1-\nu_*\right)} = \frac{\alpha_0 T_0 \pi \left(\chi+1\right) k_1}{16\mu} \frac{P_{T_0}^{+} P_{T_0}^{-}}{P_{T_0}^{+} + P_{T_0}^{-}}. \tag{5.3}$$

Для оценки критического размера дефекта a_* (величины порядка линейного размера макрочастицы материала) можно использовать подход, предложенный А.А. Ильюшиным [10]. Тогда из выражения (5.3) можно теоретически определить величину γ.

Литература

1. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твёрдых тел // ДАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 43–45.
2. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения твёрдых тел // Механика твёрдого тела. 2003. № 6. С. 69–81.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
4. *Белоносов С.М.* Основные плоские статические задачи для односвязных и двухсвязных областей. Новосибирск: Изд-во СО АН СССР, 1962. 231 с.
5. *Каминский А.А.* Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Наукова думка, 1982. 157 с.
6. *Панасюк В.В., Буйна Е.В.* К вопросу о предельном равновесии пластин с острыми концентраторами напряжений // Концентрация напряжений. 1968. Вып. 2. С. 115–125.
7. *Си. Г., Либовиц Г.* Математическая теория хрупкого разрушения. Разрушение. Т. 2. М.: Мир, 1975. С. 83–203.
8. *Дунаев В.И., Тугуз Т.К.* О влиянии форм изолированного дефекта на макроскопический критерий хрупкого разрушения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 2. С. 46–50.
9. *Огибалов П.М., Лопаткин В.А., Кишкин Б.П.* Механика полимеров. М.: Из-во МГУ, 1975. 527 с.
10. *Ильюшин А.А., Ленский Б.С.* Сопротивление материалов. М.: Гос. из-во физ.-мат. лит., 1959. 371 с.

References

1. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Ob energeticheskom uslovii razrusheniya tverdykh tel [On the energy provided fracture of solids]. *Doklady Akademii Nauk* [Proc. of Russian Academy of Science], 2000, vol. 372, no. 1, pp. 43–45. (In Russian)
2. Dunaev I.M., Dunaev V.I. Energeticheskoe uslovie razrusheniya tverdykh tel [Power failure condition for solids]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of solids], 2003, no. 6, pp. 69–81. (In Russian)
3. Muskhelishvili N.I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti* [Some basic problems of the mathematical theory of elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 707 p. (In Russian)
4. Belonosov S.M. *Osnovnye ploskie staticheskie zadachi dlya odnosvyaznykh i dvukhsvyaznykh oblastey* [Basic flat static problem for simply connected and doubly connected domains]. Novosibirsk, Izd-vo SO AN SSSR Publ., 1962, 231 p. (In Russian)
5. Kaminskiy A.A. *Khrupkoe razrushenie vblizi otverstiy* [Brittle fracture near the holes]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1982, 157 p. (In Russian)
6. Panasyuk V.V., Buyna E.V. K voprosu o predel'nom ravnovesii plastin s ostrymi kontsentratorami napryazheniy [Problem of balance plates with acute stress concentrators]. *Kontsentrat-*

siya napryazheniy [Stress Concentration], 1968, iss. 2, pp. 115–125. (In Russian)
7. Si. G., Libovits G. *Matematicheskaya teoriya khrupkogo razrusheniya. Razrushenie. T. 2* [The mathematical theory of brittle fracture. Destruction, vol. 2]. Moscow, Mir Publ., 1975, pp. 83–203. (In Russian)
8. Dunaev V.I., Tuguz T.K. O vliyanii form izolirovannogo defekta na makroskopicheskiy kriteriy khrupkogo razrusheniya [The effect of the forms of an isolated defect on a macroscopic criterion of brittle fracture]. Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2007, no. 2, pp. 46–50. (In Russian)
9. Ogibalov P.M., Lopatkin V.A., Kishkin B.P. *Mekhanika polimerov* [Polymer Mechanics]. Moscow, Izdatelstvo MGU Publ., 1975, 527 p. (In Russian)
10. Il'yushin A.A., Lenskiy B.S. *Soprotivlenie materialov* [Strength of Materials]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1959, 371 p. (In Russian)

Статья поступила 9 июня 2015 г.