УДК 539.3

К МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФУНДАМЕНТА С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРУНТОВОЙ СРЕДОЙ

Капустин М. С., Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С.

TO THE MODELLING OF THE INTERACTION OF FOUNDATION WITH DEFORMABLE SOIL MEDIUM

Kapustin M. S.*, Pavlova A. V.*, Rubtsov S. E.*, Telyatnikov I. S.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Center of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Abstract. Interest in the problems of mechanics of contact interaction of rigid and elastic bodies determined by their wide applications in construction, seismology and other industries. Features of the pressure transmission in the contact zone are data of decisive importance when evaluating the risk of fracture of communication and foundation structures and their elements.

In this article we've considered the problem of vibration of a stamp on the surface of the elastic layer containing a system of vertical rigid inclusions as a model of system base – foundation. The problem has been reduced to integral equations solvable by the method of fictitious absorption. We have obtained the characteristics of the stress-strain state of elastic foundation and analyzed stresses in the contact area of the stamp and base.

The approach presented in this paper allows us to study the effects of vibration loads on the foundations of various types, including – pile foundations modeled by system of rigid vertical inclusions, when the fields of stresses and displacements generated by anchor pillars, by interacting with the main field in the elastic foundation, can either strengthen it or weaken.

Keywords: elastic layer, vertical rigid inclusions, surface load, steady-state oscillations, method of fictitious absorption

Внимание к задачам механики контактного взаимодействия жестких и упругих тел определяется их практическим применением в сейсмологии, строительстве, инженерных приложениях и т.д. При построении и реализации моделей взаимодействия фундаментов со средой основания используются разнообразные подходы [1–3 и др.], при этом часто используемые прямые численные методы не всегда позволяют обнаружить влияние на решение отдельных параметров задачи. В настоящей работе в качестве модели системы основание–фундамент рассматривается задача об установившихся колебаниях упругого слоя под действием поверхностной и вертикально ориентированных внутренних нагрузок. Так как особенности передачи давления в зоне контакта служат определяющими данными при оценке рисков разрушения коммуникационных и фундаментных сооружений и их элементов, в работе с помощью полуаналитических методов получены количественные характеристики напряженно-деформированного состояния упругого основания. Полученные результаты могут быть использованы при изучении деформаций грунта в процессе передачи нагрузки и т.п.

Описанный подход позволяет исследовать результаты воздействия вибрационных нагру-

Капустин Михаил Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края р_юг_а 13-01-95503.

зок на фундаменты различных типов, в том числе моделируемые системой жестких вертикальных включений свайные фундаменты, когда генерируемые анкерными колоннами поля перемещений и напряжений, взаимодействуя с основным полем в упругом основании, могут либо усиливать его, либо ослаблять.

Рассматривается задача об установившихся (с частотой ω) колебаниях круглого невесомого жесткого штампа на поверхности упругого слоя, сцепленного с недеформируемым основанием, в осесимметричной постановке. Смещения точек среды описываются вектором амплитуд, удовлетворяющим уравнениям Ляме, в цилиндрической системе координат $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$. В области контакта штампа со средой $\{r \leqslant a,\ z = 0\}$ трение отсутствует. На штамп радиуса a действует приложенная в центре вертикальная гармоническая нагрузка $\mathbf{P} = \left\{0, Pe^{-i\omega t}\right\}$. Распределение контактных напряжений под штампом, описываемое функцией $q_*(r)$, неизвестно. Кроме того, в упругом слое толщины h по окружности радиуса r_0 расположена система колеблющихся вертикально ориентированных заглубленных включений длины h_0, образующих цилиндрическую поверхность: $r = r_0 \quad (r_0 > a)$, $-h_0 \leqslant z \leqslant 0$. Нагрузка на включениях, распределенная по глубине, моделируется компонентами заданной локализованной объемной силы [4, 5].

Формулировка задачи позволяет с помощью подходов работы [4] использовать для описания вектора перемещений $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$ представленные в [5, 6] соотношения для задачи о колебаниях системы вертикальных внутренних источников под действием распределенной по длине включений нагрузки, имеющей пространственную локализацию и моделируемой с помощью дельта-функции Дирака

$$X_r = \operatorname{Re}\left[f_r(z)\,\delta(r - r_0)\,e^{-i\omega t}\right],$$

$$X_z = \operatorname{Re}\left[f_z(z)\,\delta(r - r_0)\,e^{-i\omega t}\right].$$

Для неизвестного напряжения в области контакта штампа со средой получено интегральное уравнение Фредгольма первого рода в виде

$$\int\limits_0^a k(r,\tau)\,q_*(\tau)\,\tau \mathrm{d}\tau = u_z(r,0) - A(r), \qquad (1)$$

$$0 \leqslant r \leqslant a,$$

$$k(r,\tau) = \int\limits_{\sigma_0} K(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,J_0(\alpha\tau)\,\alpha \mathrm{d}\alpha, \qquad (2)$$

$$A(r) = \int\limits_{\sigma_0} U(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,\alpha \mathrm{d}\alpha,$$

$$K(\alpha) = \frac{\kappa_2^2}{4\rho c_2^2 \bar{\Delta}(\alpha)}\Big[\sigma_1(\alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h)\operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \\ - \sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h)\operatorname{ch}(\sigma_2 h))\Big],$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \sigma_1\sigma_2\left(s^2 + \alpha^4\right)\operatorname{ch}(\sigma_1 h)\operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \\ -\alpha^2\left(s^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2\right)\operatorname{sh}(\sigma_1 h)\operatorname{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2\sigma_1\sigma_2.$$

Здесь $U(\alpha)$ — интегральное преобразование Бесселя от перемещений, вызванных вибрацией включений, контур интегрирования σ_0 выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [7],

$$U(\alpha) = \frac{J_0(\alpha r_0)\,\bar{U}(\alpha)}{\bar{\Delta}(\alpha)},$$

$$\bar{U}(\alpha) = \\ = \frac{r_0}{4\rho c_2^2}\left(\sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_1 h} - s\chi_2^+\right)\phi_{z1}^-(-h_0) + \\ + \alpha^2\sigma_1\left(se^{\sigma_2 h} - \varphi_1^+\right)\phi_{z2}^-(-h_0) - \\ - \sigma_1\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2 - se^{\sigma_1 h}\chi_2^-\right)\phi_{z1}^+(-h_0) - \\ -\alpha^2\sigma_1\left(s + e^{\sigma_2 h}\varphi_1^-\right)\phi_{z2}^+(-h_0)\right),$$

$$\phi_{zk}^{\mp}(\beta) = \int\limits_0^\beta f_z(\zeta)\,e^{\mp\sigma_k\zeta}\mathrm{d}\zeta \qquad (k = 1, 2),$$

где

$$\chi_2^{\pm} = \sigma_1\sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_2 h) \pm \alpha^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h),$$

$$\varphi_1^{\pm} = \sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \pm \alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h);$$

$$\sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2}, \quad s = \alpha^2 - 0{,}5\kappa_2^2,$$

$$\kappa_j^2 = (\omega/c_j)^2 \quad (j = 1, 2),$$

κ_j — волновое число продольной ($j = 1$) или поперечной ($j = 2$) волны, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, λ, μ — коэффициенты Ляме, ρ —

плотность упругого слоя; J_0 — функция Бесселя первого рода.

Для построения решения интегрального уравнения (1) используется вспомогательное уравнение

$$\int_0^a k(r,\tau)\, q_\eta(\tau)\, \tau \mathrm{d}\tau = J_0(\eta r), \tag{3}$$

$$0 \leqslant \tau \leqslant a,$$

с ядром (2), решение которого строится методом фиктивного поглощения [7, 8].

Свойства функции символа ядра $K(\alpha)$ определяются типом упругой среды, для случая упругого слоя она обладает следующими свойствами. $K(\alpha)$ является мероморфной функцией в комплексной плоскости, четным образом зависит от параметра α. На вещественной оси у нее может быть конечное число вещественных полюсов p_k и нулей z_k $(k = \overline{1,N})$. Кроме того, функция $K(\alpha)$ имеет счетное множество комплексных z_k, p_k $(k = \overline{N+1,\infty})$, сгущающихся в содержащих мнимую ось секторах малых углов [7, 8]. Функция $K(\alpha) = C|\alpha|^{-1}\left[1 + O\left(\alpha^{-1}\right)\right]$ при $|\alpha| \to \infty$.

Согласно схеме метода фиктивного поглощения, функция $K(\alpha)$ представляется как $K(\alpha) = K_0(\alpha)\,\Pi(\alpha)$. Выбор функции $K_0(\alpha)$ обусловлен асимптотическим поведением символа ядра, а также возможностью ее непосредственной факторизации. Функция $\Pi(\alpha)$ приближается рациональной функцией

$$\Pi(\alpha) \equiv \Pi(\alpha, N) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - z_k^2\right)\left(\alpha^2 - p_k^2\right)^{-1},$$

где $\pm z_k$ — нули, $\pm p_k$ — полюса функции $K(\alpha)$. Функция $\Pi(\alpha,\, N) = 1 + O\left(\alpha^{-1}\right)$ при $|\alpha| \to \infty$.

При этом вводится новая неизвестная функция p соотношением

$$q_\eta(r) = p(r) + \phi(r)\,, \quad 0 \leqslant r \leqslant a,$$

где искомая $q_\eta(r)$ содержит функцию ϕ, включающую неизвестные константы, такую, что выполняется равенство

$$Q(p_m) = \Phi(p_m)\,, \quad m = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Здесь p_m — полюса функции $\Pi(\alpha)$, лежащие выше контура σ_0, $Q(\alpha)$, $\Phi(\alpha)$ — преобразования Бесселя функций $q(r)$ и $\phi(r)$ соответственно

$$Q(\alpha) = \int_0^a q(r)\, J_0(\alpha r) r \mathrm{d}r,$$

$$\Phi(\alpha) = \int_0^a \phi(r)\, J_0(\alpha r) r \mathrm{d}r.$$

Следуя схеме метода фиктивного поглощения, при построении $\phi(r)$ можно использовать любую полную систему линейно независимых функций. В качестве таких функций можно выбрать производные от дельта-функций Дирака с носителем в точке a, поскольку в результирующей формуле введенная функция $\phi(r)$ стоит под интегральными операторами.

В отличие от использованного в [8] варианта, в качестве $\phi(r)$ выбрана следующая функция:

$$\phi(r) = \sum_{k=1}^{N} C_k G_k(L)\, \delta(r - a),$$

$$L = -\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)\right),$$

где $G_k\left(\alpha^2\right)$ имеют вид

$$G_k\left(\alpha^2\right) = \left(\alpha^2 - p_1^2\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\alpha^2 - p_{k-1}^2\right)\left(\alpha^2 - p_{k+1}^2\right)\ldots\left(\alpha^2 - p_N^2\right),$$

C_k — неизвестные константы, требующие определения.

Так как $p(r) \in L_p(0,a)$, $p > 1$, и имеет носитель на отрезке $[0,a]$, функция

$$t(r) = \int_{\sigma_0} \Pi(\alpha)\, P(\alpha)\, J_0(\alpha r)\, \alpha \mathrm{d}\alpha,$$

где $P(\alpha) = \int\limits_0^a p(r)\, J_0(\alpha r) r \mathrm{d}r$, обладает такими же свойствами в силу выполнения условий (4) [7].

Подставив выражение для $q_\eta(r)$ в (3) и воспользовавшись представлением символа ядра $K(\alpha) = K_0(\alpha)\,\Pi(\alpha)$, получим уравнение относительно $t(r)$ с неосцилирующим ядром

$$\int\limits_0^a k_0(r,\tau)\,t(\tau)\,\tau \mathrm{d}\tau = J_0(\eta r) - \\ - \sum_{k=1}^{N} \int\limits_0^a k(r,\tau)\,C_k G_k(L_N)\,\delta(\tau-a)\,\tau \mathrm{d}\tau, \quad (5)$$

$$k_0(r,\tau) = \int\limits_0^\infty K_0(\alpha)\,J_0(\alpha r)\,J_0(\alpha\tau)\,\alpha \mathrm{d}\alpha.$$

В работах [7, 8] приведено приближенное решение (5) с правой частью $J_0(\eta r)$, построенное методами решения задач для среды с сильным поглощением для $K_0(\alpha) = \left(\alpha^2+B^2\right)^{-1/2}$. Это приближенное решение использовано для построения решения (3).

В результате применения метода фиктивного поглощения решение интегрального уравнения (3) с правой частью $J_0(\eta r)$, $\operatorname{Im}\eta = 0$, $\eta > 0$, с точностью до постоянного множителя, описывающего поведение функции $K(\alpha)$ на бесконечности, примет вид

$$q_\eta(r) = J_0(\eta r)\,K^{-1}(\eta) + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1} \times \\ \times \sum_{l=1}^{N} \beta_l J_0(z_l r) G_1(\eta, z_l) - \\ - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^{N} g_k \sum_{l=1}^{N} \beta_l J_0(z_l r)\,G_2(z_l, p_k) + \\ + b(\eta)\left(\frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2-r^2}} + \right. \\ \left. + i\pi\sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{l=1}^{N} \beta_l H_0^1(z_l a)\,J_0(z_l r)\right) + \\ + \left[i\sqrt{\frac{a\pi}{2}}\frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2-r^2}} - \right. \\ \left. - \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^{N} \beta_l J_0(z_l r)\,H_0^1(z_l a)\right] \times \\ \times \sum_{k=1}^{N} \frac{g_k}{\sqrt{B-ip_k}} H_0^1(p_k a).$$

Здесь использованы обозначения [8]:

$$K_0(\alpha) = \left(\alpha^2+B^2\right)^{-1/2}, \quad \varepsilon = 1/B, \quad B \gg 1,$$

$$G_1(\eta, z) = \left[\eta J_{n+1}(\eta a)\,H_n^1(za) - \right. \\ \left. - zJ_n(\eta a)\,H_{n+1}^1(za)\right]\left(\eta^2 - z^2\right)^{-1},$$

$$G_2(z, p) = \left[pH_{n+1}^1(pa)\,H_n^1(za) - \right. \\ \left. - zH_n^1(pa)\,H_{n+1}^1(za)\right]\left(z^2 - p^2\right)^{-1},$$

$$b(\eta) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\left[H_0^1(\eta a)\sqrt{B+i\eta} + \right. \\ \left. + H_0^2(\eta a)\sqrt{B-i\eta}\right],$$

где

$$\beta_l = \prod_{k=1}^{N}\left(z_l^2 - p_k^2\right) \prod_{k=1,\, k\neq l}^{N}\left(z_l^2 - z_k^2\right),$$

H_0^j — функции Ханкеля ($j = 1{,}2$).

Введенные g_k включают в себя неизвестные константы следующим образом:

$$g_k = aC_k E_N(p_k)\,J_0(ap_k),$$

$$E_N(\alpha) = \prod_{k=1}^{N}\left(\alpha^2 - z_k^2\right).$$

Алгебраическая система для их определения может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{N} g_k \left[\left(p_k H_1^1(ap_k)\,J_0(a\alpha) - \right.\right. \\ \left. - \alpha H_0^1(ap_k)\,J_1(a\alpha)\right)\left(\alpha^2 - p_k^2\right)^{-1} - \\ \left. - 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B-ip_k)}} H_0^1(ap_k)\,J_0(a\alpha)\right] = \\ = \frac{2}{i\pi}\frac{\sqrt{B^2+\eta^2}}{\alpha^2-\eta^2}\left[\eta J_1(a\eta)\,J_0(a\alpha) - \right. \\ \left. - \alpha J_1(a\alpha)\,J_0(a\eta)\right] - \frac{2}{i\pi}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_0(a\alpha)\,b(\eta),$$

$$\alpha = z_l, \quad l = \overline{1, N}.$$

Точность применяемого метода решения интегральных уравнений, основанного на факторизации, зависит от степени деформации контуров интегрирования и связана со значением параметра B. Чем больше значение B, тем меньший порядок имеют отбрасываемые члены [7,8]. В расчетах положено $B = 10$.

С помощью решения для единичной правой части $q_1(r) = q_\eta(r)$, $\eta = 0$, построено выражение для напряжений под штампом, создаваемых заглубленными включениями

$$q_2(r) = -\pi i \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\bar{U}(\zeta_k)}{\bar{\Delta}'(\zeta_k)} q_1(r) \times \right.$$
$$\left. \times J_0(\zeta_k r) \zeta_k H_0^{(1)}(\zeta_k r_0) \right),$$

где ζ_k определяются из решения уравнения $\bar{\Delta}(\alpha) = 0$.

В силу линейности постановки решение исходной задачи представляется в виде суммы

$$q_*(r) = q_1(r) + q_2(r).$$

Численные расчеты проводились для случая единичной амплитуды смещения штампа $(u_z(r,0) = 1)$ и единичной нагрузки на включениях, противоположной ему по направлению. В формулах ω — безразмерная частота, определяемая соотношением $\nu = 2\pi\nu l_0/c_0$, где ν — частота (Гц), $l_0 = 1$ м, $c_0 = 10^3$ м/с.

Для описания распределения нагрузки на включениях использовалась линейная функция

$$f_z(z) = kz + b, \qquad (6)$$

где $k = \frac{b(1-\varepsilon_1)}{h_0}$, $b = \frac{2}{h_0(1+\varepsilon_1)}$, $z \in (0, -h_0)$. Также была использована функция, описывающая напряжения на жестком включении, полученная при решении интегрального уравнения контактной задачи, вида

$$f_z(z) = \varepsilon_2(h_0 + z) +$$
$$+ e^{z-h_0} + \frac{1}{\sqrt{-z}} + \frac{1}{\sqrt{z+h_0}}, \qquad (7)$$
$$z \in (0, -h_0).$$

Характер распределения напряжений под штампом определяется совокупностью параметров системы: размеров источников, вида распределения нагрузки на включениях и частоты колебаний (рис. 1, 2).

На рис. 1 приведены графики действительной части $q_1(r)$ (а) и $q_2(r)$ (б), иллюстрирующие зависимость величины контактных напряжений, создаваемых соответственно штампом и включениями, от частоты колебаний. На низких частотах вид функции распределения нагрузки на включениях не оказывает сколько-нибудь значимого влияния на характер напряжений под штампом и их величину.

На рис. 2а представлены распределения контактных напряжений под штампом при различных его размерах.

На рис. 2б, 3а приведены графики действительной части напряжений $q_2(r)$ для различных значений (2б) и длины включений (3а). Наличие смены знака создаваемых штампом и включениями контактных напряжений определяется размерами источников.

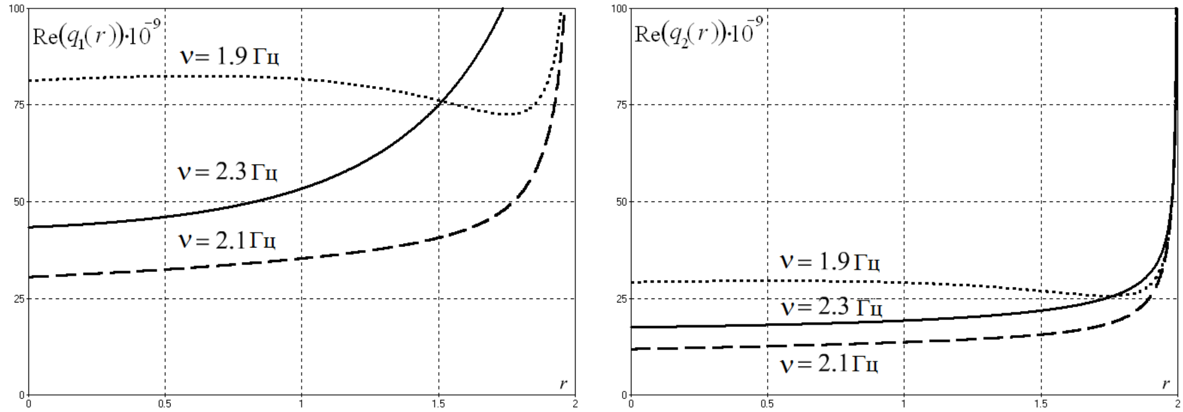
Для функции распределения нагрузки на включениях, определяемой по формуле (3) ($\varepsilon_2 = 0$; 0,5; 1) и для функции вида (4) ($\varepsilon_1 = 0$; 0,5; 1) величина напряжений под штампом меняется незначительно (рис. 2б).

В зависимости от значений указанных параметров вертикальные включения могут как ослаблять, так и усиливать напряжения в области контакта штампа с основанием (рис. 4). На рисунке мелкий пунктир соответствует распределению возникающих в слое контактных напряжений для единичной амплитуды колебаний $q_1(r)$, крупный пунктир — создаваемых заглубленными источниками напряжений $q_2(r)$, сплошная линия — общему распределению напряжений $q_*(r)$ под штампом.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что вертикально ориентированные включения на низких частотах не оказывают существенного влияния на характер напряжений. Выбор функции распределения нагрузки в данном диапазоне частот также незначительно влияет на величину и характер возникающих под штампом напряжений.

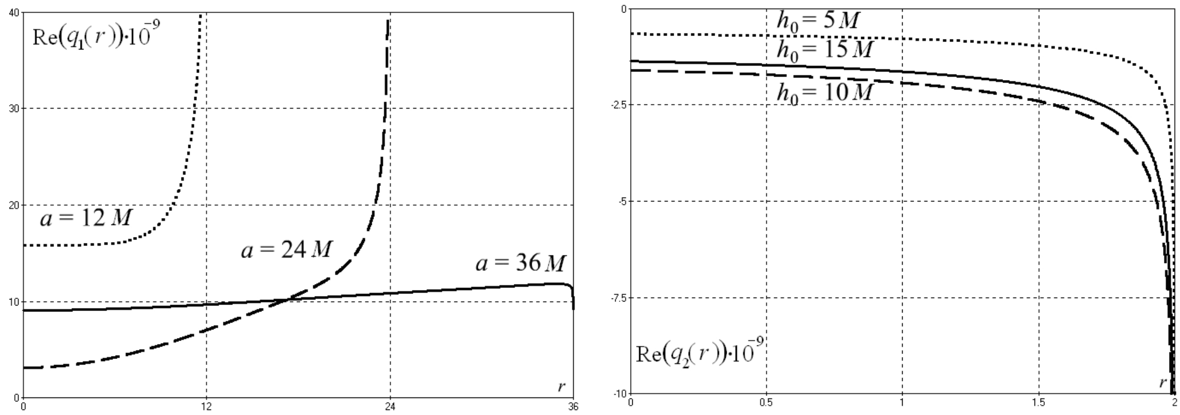
Таким образом, построено решение задачи о вибрации упругого слоя, жестко сцепленного с недеформируемым основанием, возбуждаемого совокупностью вертикальных включений и поверхностной нагрузкой, позволяющее изучить закономерности распределения возникающих в упругом основании контактных напряжений. Исследовано влияния внутренних нагрузок на напряжения в области контакта штампа с деформируемой средой.

Представленный метод решения задачи для однородного упругого слоя может быть обобщен для пакета слоев, а также основания с дефектами типа плоских трещин и включений, расположенных в параллельных плоскостях [9, 10].



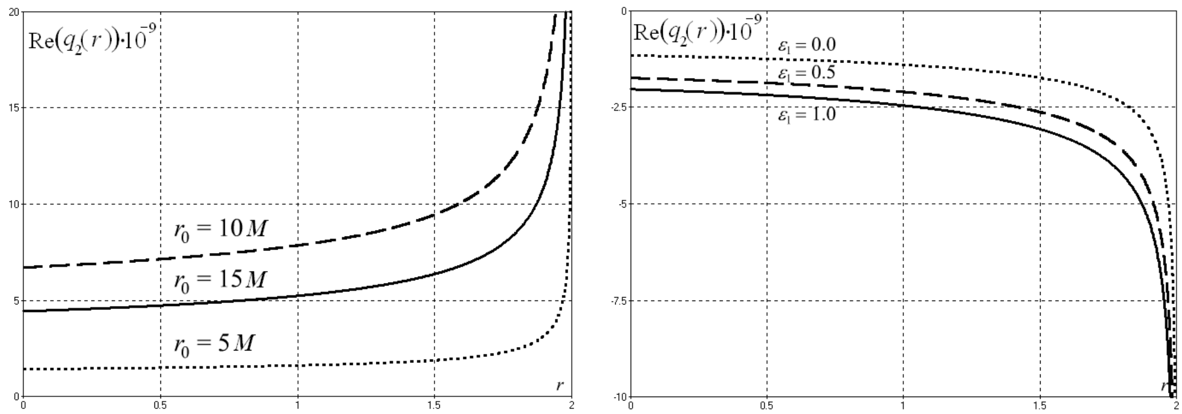
а) б)

Рис. 1. $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h = 20$ м, $c_1 = 0{,}2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0{,}12 \cdot 10^3$ м/с; (а): $a = 2$ м; (б): $r_0 = 2$ м, $h_0 = 10$ м, $\varepsilon_1 = 1$



а) б)

Рис. 2. $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h = 20$ м, $c_1 = 0{,}2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0{,}12 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 4{,}0$ Гц; (б): $r_0 = 2$ м, $\varepsilon_2 = 1$



а) б)

Рис. 3. $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h = 20$ м, $c_1 = 0{,}2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0{,}12 \cdot 10^3$ м/с, $\nu = 4{,}0$ Гц, $h_0 = 10$ м; (а): $\varepsilon_2 = 1$; (б): $r_0 = 2$ м

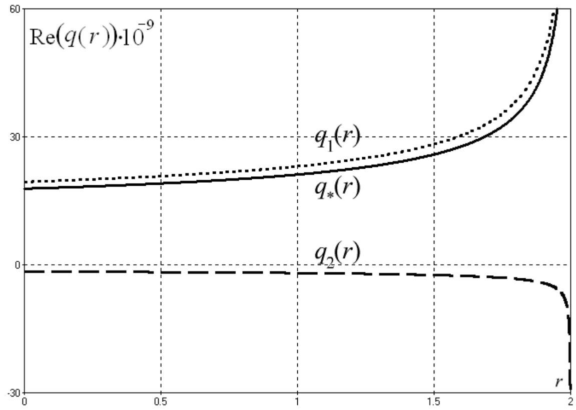


Рис. 4. $\nu = 4{,}0$ Гц, $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3$ кг/м^3, $h = 20$ м, $c_1 = 0{,}2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0{,}12 \cdot 10^3$ м/с, $a = 2$ м, $r_0 = 2$ м, $h_0 = 10$ м, $\varepsilon_2 = 1$

Литература

1. *Фиораванте В., Ямиолковский М.Б.* Физическое моделирование плитно-свайных фундаментов // Развитие городов и геотехническое строительство. 2006. № 10. С. 200–206.
2. *Muir Wood D., Hu W., Nash D.F.T.* Group effects in stone column foundations: model tests // Geotechnique. 2000. Vol. 50. No. 6. P. 689–698.
3. *Ambily A.P., Gandhi S.R.* Behaviour of stone columns based on experimental and FEM analysis // Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering. 2007. Vol. 133. No. 4. P. 405–415.
4. *Kapustin M., Pavlova A., Rubtsov S., Telyatnikov I.* Model of foundation-base system under vibration load // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2014. Vol. 487. P. 168–173.
5. *Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С.* К моделям расчета напряженно-деформированного состояния комплекса основание–фундамент при динамических воздействиях // Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2013. № 4. С. 33–35.
6. *Pryakhina O.D., Smirnova A.V., Evdokimov A.A., Kapustin M.S.* Vibrations of an elastic half-space with a set of rigid inclusions // Doklady Physics. 2003. Vol. 48, no. 3. P. 142–145.
7. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
8. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
9. *Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T.* Problems on the Vibration of an Elastic Half-Space Containing a System of Interior Cavities // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. No. 9. P. 677–679.
10. *Babeshko V.A., Buzhan V.V., Williams R.T.* Solid by an Array of Rigid Planar Inclusions // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. No. 2. P. 156–158.

References

1. Fioravante B., Yamilkovskii M.B. Fizicheskoe modelirovanie plitno-cbainykh fundamentov. *Razvitie gorodov i geotehnicheskoe stroitel'stvo*, 2006, no.10, pp. 200–206.
2. Muir Wood D., Hu W., Nash D.F.T. Group effects in stone column foundations: model tests. *Geotechnique*, 2000, vol 50, no. 6, pp. 689–698.
3. Ambily A.P. Gandhi S.R. Behaviour of stone columns based on experimental and FEM analysis. *J. of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2007, vol. 133, no. 4, pp. 405–415.
4. Kapustin M., Pavlova A., Rubtsov S., Telyatnikov I. Model of foundation-base system under vibration load. *Communications in Computer and Information Science*, 2014, vol. 487, pp. 168–173.
5. Kapustin M.S., Pavlova A.V., Rubtsov S.E., Telyatnikov I.S. K modelyam rascheta napryagenno-deformirovannogo sostoyaniya kompleksa osnovanie–fundament pri dinamicheskikh vozdeistviyakh. *Ecologicheskii vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva.* 2013, no. 4, pp. 33–35.
6. Pryakhina O.D., Smirnova A.V., Evdokimov A.A., Kapustin M.S. Vibrations of an elastic half-space with a set of rigid inclusions. *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, no. 3, pp. 142–145.
7. Babeshko V.A. *Obobshchennyi metod faktorizacii v prostranstvennykh dinamicheskikh sme-*

shannykh zadachakh teorii uprugosti. Moscow, Nauka, 1984, 265 p.

8. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemykh sredakh.* Moscow, Izdatelstvo Nauchnyi mir, 1984, 248 p.
9. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. Problems on the Vibration of an Elastic Half-Space Containing a System of Interior Cavities. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no. 9, pp. 677–679.
10. Babeshko V.A., Buzhan V.V., Williams R.T. Solid by an Array of Rigid Planar Inclusions. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no.2. pp. 156–158.

Статья поступила 7 сентября 2015 г.