УДК 004.82 510.23

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫЕ ФОРМАЛИЗМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ

Костенко К. И.

SET-THEORETIC FORMALISMS OF KNOWLEDGE REPRESENTATION

Kostenko K. I.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: kostenko@kubsu.ru

Abstract. The classification problem for knowledge representation formalisms is considered. It is based on invariants of knowledge composition operation and relation of knowledge inclusion. The variety of applied knowledge formalisms uses the specified invariants implicitly. Multiple specifications of composition and inclusion for almost all such formalisms may take place. That fact implies possibility of formal systems with different semantic properties and computational complexity of different knowledge processing algorithms. Therefore the recognized empirical classification of formalisms based on sets of rules semantic networks, and logical formulaes doesn't imply productive classification of the formal systems for simulating the content of a given subject area knowledge space. Every formalism, that is included into formalism with sets as form of knowledge presentation and sets' union and inclusion for knowledge composition and inclusion, is called a set-theoretic knowledge presentation formalisms. Set-theoretic formalisms are simpler than formalisms of rule based systems and formalism of learning spaces. The finite system of axioms that characterize class of set-theoretic formalism is introduced. The example of formalism with non-commutative operation of composition of knowledge representations is proposed. Such formalism isn't comparable with set-theoretic formalisms. Therefore set-theoretic formalisms aren't minimal in knowledge representation formalisms inclusion. The adaptations of inference rules for set-theoretic knowledge formalisms are defined. These rules realize deductive process on systems of knowledge represented by sets.

Keywords: knowledge representation formalisms, formalisms comparison, set-theoretic formalism, direct inference

Введение

Формализмы представления знаний — это специальный класс математических систем. Они основаны на универсальных инвариантах, уточнение и развитие которых позволяет создавать унифицированные описания известных и возможных подходов к моделированию знаний [1]. Важность таких формализмов обусловлена актуальностью развития технологий, связанных с разработкой логико-математических инструментов для исследования содержания областей знаний, создания и применения интеллектуальных систем, использующих разные форматы представления знаний.

Существующее семейство формализмов представления знаний развивается в значительной мере индуктивно. В указанном семействе находят отражение разнообразные эмпирические представления о знаниях и интеллектуальной деятельности. Само семейство является разнородным и трудно обозримым.

Практический опыт построения и применения интеллектуальных систем поддерживает концепцию о желательности использования форматов представления знаний, близких предметным экспертам.

Теоретическую базу области искусственного интеллекта составляет описание неформальных порождающих принципов для процессов моделирования областей знаний. В частности, существуют принципиальные ограничения для использования универсальных математических моделей в качестве основы интеллектуальных технологий. Такие ограничения делают необходимым специальное исследование инструментария, который мо-

Костенко Константин Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: kostenko@kubsu.ru

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант №13-01-96513.

жет составить основу математической теории интеллектуальных систем.

1. Формализмы представления знаний

Формализмы представления знаний основаны на многообразиях структурированных объектов. Каждый объект интерпретируется как представление отдельного знания.

Существенное отличие множеств таких объектов от баз знаний прикладных интеллектуальных систем связано с требованием замкнутости абстрактных операций, моделирующих содержательные преобразования знаний в интеллектуальных системах. Конкретные интеллектуальные системы обычно оперируют конечными фрагментами таких многообразий, составляющими базы знаний. Фрагменты реализуются едиными связными семантическими представлениями содержания областей знаний, обрабатываемыми согласованными с ними алгоритмами анализа, структуризации и трансформации знаний. Базовое уточнение понятия формализма знаний связано с конструктами структур знаний. Компоненты математических систем, моделирующие другие аспекты интеллектуальных систем, используют указанные конструкты.

Формализмом представления знаний называется четвёрка

$$\Im = (\mathbf{M}_{\Im}, \mathbf{D}_{M_{\Im}}, \circ, \prec),$$

где $\mathbf{M}_{\Im}(\mathbf{D}_{M_{\Im}})$ — разрешимое множество представлений знаний (фрагментов знаний) и $\circ : \mathbf{D}_{M_{\Im}} \times \mathbf{D}_{M_{\Im}} \to \mathbf{D}_{M_{\Im}}$ — вычислимая операция композиции, а $\prec$ — разрешимое отношение вложения на $\mathbf{D}_{M_{\Im}} \times \mathbf{D}_{M_{\Im}}$.

Здесь $\mathbf{M}_{\Im}$ является подмножеством $\mathbf{D}_{M_{\Im}}$ и содержит специальный элемент Λ, интерпретируемый как «пустое» знание.

Операция композиции определяет схему конструирования представлений сложных знаний. Выбор двуместной операции в качестве композиции знаний объясняется стремлением к соблюдению алгебраической традиции. При этом применение двуместной операции композиции не всегда удобно для составления знаний из знаний в конкретных формализмах. Например, при связывании двух конкретных знаний в семантическую структуру дополнительно требуется уточнять выполняющееся между ними отношение. Также допускается многозначность вариантов соединения пар объектов, представляющих отдельные знания [2]. Достаточность бинарной операции композиции может быть обеспечена с помощью расширений множеств объектов, представляющих знания во множества фрагментов представлений знаний.

Структура фрагментов и операция композиции фрагментов определяется так, чтобы преодолеть отмеченную неоднозначность. Поэтому в математических системах формализмов знаний используется расширение множества $\mathbf{M}_{\Im}$ на множество фрагментов представлений знаний. Фрагментами знаний являются отдельные знания, а также части представлений знаний, получаемые из последних удалением вхождений отдельных знаний. Такая интерпретация фрагментов позволяет моделировать процессы составления знаний из фрагментов. Операция композиции является существенным конструктом всякого формализма [3]. С её помощью может быть определена алгебраическая структура произвольного фрагмента знаний. Отношением вложения $\subseteq$ реализуется сравнение фрагментов знаний, связанное с их семантической структурой.

В получивших распространение подходах к представлению знаний инварианты композиции и вложения фрагментов знаний, как правило, задаются неявно. Они используются при исследовании свойств моделей или в алгоритмах обработки знаний, решающих различные профессиональные задачи.

Отличающиеся уточнения инвариантов композиции и вложения для одного и того же подхода к моделированию знаний приводят к созданию близких формализмов знаний с разными свойствами. Например, для продукционных формализмов с реализацией операции композиции, конструирующей семейства продукций в форме множеств и «*И–ИЛИ*» графов, такие формализмы существенно различаются реализациями алгоритмов прямого вывода в них.

Если структурная организация продукционной базы знаний основана на множестве продукций, то вычислительная сложность указанного алгоритма является квадратичной. Если же основным форматом представления баз продукционных знаний являются «*И–ИЛИ*» графы, то существует алгоритм, реализующий схему прямого вывода, вычислительная сложность которого линейная.

Уточнение понятия формализма знаний определяет широкий класс математических систем, в которых не отражаются многие важные аспекты интеллектуальных систем.

Свойства математических систем, являющихся формализациями разных подходов к моделированию знаний, можно задавать, используя для этого дополнительные универсальные представления о знаниях и интеллектуальных системах. Дополнительные представления уточняются с использованием специальных конструктов.

Моделирование аналогов фундаментальных свойств знаний затруднено возможностью построения примеров формализмов, для которых такие свойства не имеют места или возможны при выполнении дополнительных условий [2]. Последнее связано с тем, что общими инвариантами операции композиции и отношения вложения представлений знаний сложно представить все значимые аспекты систем знаний. Например, коммутативность операции композиции, моделирующей дополнение одного знания со связанным с ним фрагментом другого знания, не имеет места для формализма иерархических семантических сетей [4].

Существует пример формализации класса иерархических семантических сетей, с не ассоциативной операцией композиции. Если операция композиции фрагментов знаний реализует концепцию интеграции содержания знаний фрагментов, к которым применяется эта операция, то естественны дополнительные требования $\forall\, \boldsymbol{z} \in D_M(\boldsymbol{z} \circ \Lambda = \Lambda \circ \boldsymbol{z})$ или $\forall\, \boldsymbol{z} \in D_M(\boldsymbol{z} \circ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z})$.

Формализм $\Im_1$ алгебраически вкладывается в формализм $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что

$$\forall\, C_1, C_2 \in D_{M_1}(\xi(C_1 \circ C_2) = \xi(C_1) \circ \xi(C_2)).$$

Формализм $\Im_1$ алгебраически вкладывается в формализм $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq_S \Im_2$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что

$$\forall\, a, b \in D_{M_1}(a \prec b \to \xi(a) \prec \xi(b)).$$

Формализм $\Im_1$ вкладывается в формализм $\Im_2$ (обозначается как $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$), если существует такое вычислимое инъективное отображение $\xi : D_{M_1} \to D_{M_2}$, что

$$\Im_1 \sqsubseteq_{\mathbb{A}} \Im_2 \text{ и } \Im_1 \sqsubseteq_S \Im_2.$$

Если $\Im_1 \sqsubseteq \Im_2$ и $\Im_2 \sqsubseteq \Im_1$, то $\Im_1$ и $\Im_2$ называются эквивалентными. Отношение вложения формализмов знаний позволяет сравнивать выразительные возможности произвольных подходов к формализованному представлению знаний. Такое сравнение основывается на сопоставлении структурных инвариантов композиции и вложения фрагментов знаний. В частности для формализмов, представляющих модели атомарных продукционных систем, образовательных пространств, дескрипционных логик, абстрактных пространств знаний и иерархических семантических сетей справедливы только такие вложения, которые согласованы с порядком перечисления моделей.

Изменение определения семантического вложения заменой используемого свойства на $\forall\, a, b \in D_{M_1}(a \prec b \leftrightarrow \xi(a) \prec \xi(b))$ задаёт условие сильного семантического вложения. Ему соответствует такая характеристика вложение формализмов, для которой имеет место изоморфизм вложенного формализма и фрагмента того формализма, в который выполняется вложение. Если формализм $\Im_1$ сильно вложен в формализм $\Im_2$, то он эквивалентен сужению $\Im_2$ на множество $\xi(D_{M_1})$.

Если операция композиции фрагментов знаний реализует содержательную концепцию интеграции содержания фрагментов знаний, к которым применяется эта операция, то естественны дополнительные требования

$$\forall\, \boldsymbol{z}_1 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ \Lambda = \Lambda \circ \boldsymbol{z}) \text{ и}$$

$$\forall \boldsymbol{z}_1 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_1).$$

Ассоциативность и коммутативность операции композиции не относится к обязательным свойствам формализмов представления знаний. Существует формализация для иерархических семантических сетей с неассоциативной операцией композиции [3].

Рассмотрим пример формализма, для которого указанная операция не коммутативна.

Пусть $\Im = (M, D_M, \circ, \prec)$ — формализм, где $M = D_M$ — множество представлений знаний с помощью ориентированных графов.

Множество V — вершин произвольного такого графа $G = (V, U)$ разбивается на два подмножества V_1 и V_2, для которых выполняется условие

$$\forall\, u \in U(u = (a, b) \to a \in V_1 \;\;\&\;\; b \in V_2).$$

Операция композиции реализует дополнение первого графа $\boldsymbol{z}' = (V', U')$, где V' разбивается на множества V_1' и V_2', элементами второго графа $\boldsymbol{z}'' = (V'', U'')$, где V'' разбивается на множества V_1'' и V_2''. Эта операция определяется соотношением

$$\boldsymbol{z}' \circ \boldsymbol{z}'' = (V', U' \cup \{(a,b) | a \in V_1' \ \& \\ \& \ b \in V_2' \ \& \ (a,b) \in U''\}).$$

То есть, композиция дополняет множество рёбер первого графа новыми рёбрами между его вершинами, содержащимися во втором графе. Если каждый из графов $\boldsymbol{z}'$ и $\boldsymbol{z}''$ содержит ребро, которое не соединяет вершины разных множеств разбиения вершин другого графа, то $\boldsymbol{z}' \circ \boldsymbol{z}'' \neq \boldsymbol{z}'' \circ \boldsymbol{z}'$.

Заметим, что неассоциативная и некоммутативная операции композиции в приведённых формализмах естественным образом моделируют схемы интеграции и пополнения знаний, актуальные для любых интеллектуальных систем.

2. Теоретико-множественные формализмы

Определение. Формализм знаний

$$\Im = (M, D_M, \circ, \prec)$$

называется теоретико-множественным формализмом, если существует такой формализм $\Im = (M, D_M, \cup, \subseteq)$, для которого $M = D_M$, элементами M являются множества, а $\cup$ — операция объединения и $\subseteq$ — отношение вложения множеств, в который вложен $\Im$.

То есть образы представлений отдельных знаний в теоретико-множественных формализмах — это конкретные множества. Тогда содержание знаний для таких формализмов представляется только совокупностями элементов соответствующих множеств. При отсутствии дополнительных предположений о свойствах элементов множеств отдельные элементы представлений знаний интерпретируются как конкретные неделимые факты, а отдельные знания задаются семействами не связанных между собой фактов.

Рассмотрим задачу нахождения системы свойств формализмов, достаточной для существования вложения соответствующих формализмов в теоретико-множественные формализмы. Рассмотрим специальное семейство свойств S1–S6. Такие свойства выполняются для всякого формализма представления знаний, в котором фрагменты знаний — это отдельные множества, а операция композиции и отношение вложения — это объединение и вложение множеств соответственно.

Ассоциативность и коммутативность операции композиции

$$\text{S1}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ (\boldsymbol{z}_2 \circ \boldsymbol{z}_3) = \\ = (\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2) \circ \boldsymbol{z}_3).$$

$$\text{S2}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_2 \circ \boldsymbol{z}_1).$$

Монотонность операции композиции

$$\text{S3}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3 \to \boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3).$$

$$\text{S4}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_2 \to \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_2).$$

Полнота вложения относительно композиции

$$\text{S5}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \subset \boldsymbol{z}_2 \to \\ \to \exists \boldsymbol{z}_3 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \not\subset \boldsymbol{z}_3 \ \& \ \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_3 = \boldsymbol{z}_3)).$$

Отсутствие синергетического эффекта для операции композиции

$$\text{S6}\ \forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \ \& \\ \& \ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \to \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3).$$

Для доказательства характеристического свойства теоретико-множественных формализмов представления знаний потребуются дополнительные свойства формализмов, для которых выполнены условия S1–S6.

Лемма 1. Если для формализма $\Im = (M, D_M, \circ, \subseteq)$ являются истинными соотношения S1–S6, то отношение $\subseteq$ — транзитивное.

Доказательство. Покажем, что для условий теоремы оказывается справедливым утверждение

$$\forall \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_2 \ \& \\ \& \ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \to \boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3).$$

Пусть для $\boldsymbol{z}_1$, $\boldsymbol{z}_2$, $\boldsymbol{z}_3$ выполнено условие $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_2 \ \& \ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3$. Тогда из S5 и S2 следует, что

$$\exists \boldsymbol{z}'(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}_2) \text{ и } \exists \boldsymbol{z}''(\boldsymbol{z}_2 \circ \boldsymbol{z}'' = \boldsymbol{z}_3).$$

Поэтому

$$(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}') \circ \boldsymbol{z}'' = \boldsymbol{z}_3.$$

Значит, на основании S1 можно утверждать, что
$$\boldsymbol{z}_1 \circ (\boldsymbol{z}' \circ \boldsymbol{z}'') = \boldsymbol{z}_3.$$
Последнее означает справедливость вложения $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3$. $\square$

Лемма 2. Пусть выполнены соотношения S1–S6, тогда из $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_2$ и $\boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_1$ следует, что $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_2$. Тогда
$$\exists\, \boldsymbol{z}' \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{z}_2).$$
Поэтому $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1 \circ (\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}')$. Тогда
$$\boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}' = (\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_1) \circ \boldsymbol{z}' = \\ = \boldsymbol{z}_1 \circ (\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}') = \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2.$$
То есть $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_2$. Поменяв $\boldsymbol{z}_1$ и $\boldsymbol{z}_2$ местами в приведённом рассуждении, можно доказать, что $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_1$. Из этого следует истинность утверждения леммы. $\square$

Из соотношений S1–S6 следует ещё одно соотношение, выполняющееся для формализмов, в которых множества знаний и их фрагментов совпадают, а знания представляются множествами. В таких формализмах операции композиции фрагментов, вложенных в другие фрагменты, сохраняют свойство вложенности фрагментов.

Лемма 3. $\forall\, \boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3, \boldsymbol{z}_4 \in D_M(\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \ \& \ \& \ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_4 \to \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \circ \boldsymbol{z}_4)$.

Доказательство. Пусть для фрагментов $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3, \boldsymbol{z}_4$ выполнены условия $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3$ и $\boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_4$. Тогда из S2 и S4 следует, что
$$\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_3 \circ \boldsymbol{z}_2 \circ \boldsymbol{z}_4 = \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \circ \boldsymbol{z}_3 \circ \boldsymbol{z}_4 = \boldsymbol{z}_3 \circ \boldsymbol{z}_4.$$
Поэтому
$$\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \ \& \ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_4 \to \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \circ \boldsymbol{z}_4. \ \square$$

Лемма 4. Если $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3$, то
$$\forall\, \boldsymbol{z}_4(\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_4 \ \& \ \boldsymbol{z}_4 \subseteq \boldsymbol{z}_3 \to \boldsymbol{z}_4 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3).$$

Доказательство. Пусть для фрагментов знаний $\boldsymbol{z}_1, \boldsymbol{z}_2, \boldsymbol{z}_3$ выполнены условия $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3$ и $\boldsymbol{z}_1 \subseteq \boldsymbol{z}_4$, $\boldsymbol{z}_4 \subseteq \boldsymbol{z}_3$. Тогда из S6 следует, что $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_4 \subseteq \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_3$. Поэтому $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_3$. Кроме того, $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_4 \circ \boldsymbol{z}_2$, где $\boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3$ влечёт $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_1 \circ \boldsymbol{z}_2 \subseteq \boldsymbol{z}_4 \circ \boldsymbol{z}_2$. Поэтому на основании леммы 2 можно утверждать, что $\boldsymbol{z}_4 \circ \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{z}_3$. $\square$

Лемма 5. Если $\mathbf{z}_1 \overline{\prec} \mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_2 \overline{\prec} \mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_1 \circ \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3$, то
$$\forall\, \mathbf{z}_4(\mathbf{z}_1 \prec \mathbf{z}_4 \ \& \ \mathbf{z}_2 \prec \mathbf{z}_4 \to \mathbf{z}_3 \prec \mathbf{z}_4).$$

Доказательство. Пусть для фрагментов $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$ выполнены условия доказываемой леммы. Предположим противное. Пусть существует такой фрагмент $\mathbf{z}_4$, что $\mathbf{z}_1 \prec \mathbf{z}_4 \ \& \ \mathbf{z}_2 \prec \mathbf{z}_4$, для которого $\mathbf{z}_4 \prec \mathbf{z}_3$и $\mathbf{z}_3 \neq \mathbf{z}_4$. Тогда из леммы 4 следует, что $\mathbf{z}_4 \circ \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_3$. Кроме того, $\mathbf{z}_4 \circ \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_3$. Поэтому $\mathbf{z}_3 = \mathbf{z}_4$. Последнее противоречит предположению о свойствах фрагмента $\mathbf{z}_4$. $\square$

Таким образом, композиция двух фрагментов представлений знаний, не сравнимых в отношении вложения, является наименьшим в этом отношении среди фрагментов, в которые вложены оба фрагмента.

3. Характеристическое свойство теоретико-множественных формализмов

Теорема. Если для формализма $\Im$ выполняются соотношения S1–S6, то $\Im$ является теоретико-множественным формализмом.

Доказательство. Пусть
$$\Im = (M, D_M, \circ, \prec)$$
— это формализм представления знаний, для которого выполняются условия S1–S6. Пусть $D_M = \{\boldsymbol{z}_0, \ldots, \boldsymbol{z}_i, \ldots\}$. Определим вычислимое семейство разрешимых множеств, составляющих теоретико-множественный формализм знаний $S = (D_S, D_S, \cup, \subseteq)$, и вычислимое инъективное отображение $\xi : D_M \to D_S$, для которого выполняется условие вложения $\Im \sqsubseteq S$. Алгоритм определения отображения ξ работает по шагам, так что на шаге с номером k определены фрагменты значений $\xi(\boldsymbol{z}_0), \ldots, \xi(\boldsymbol{z}_k)$. В общем случае каждое значение $\xi(\boldsymbol{z}_i)$ вычисляется за бесконечное число шагов, постепенно дополняясь новыми фрагментами. Корректность приводимого ниже алгоритма основана на свойствах формализма $\Im$, доказанных в леммах 1–5.

Обозначим как $Q = \{a_0, \ldots, a_i, \ldots\}$ бесконечное вычислимое множество. Из элементов этого множества составляются множества $\xi(\boldsymbol{z}_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. На каждом шаге определения ξ из Q выбираются новые элементы в порядке возрастания индексов, которые добавляются во множества $\xi(\boldsymbol{z}_i)$, где i

не превосходит значения номера шага. Значение отображения ξ, определённого после шага k, инъективно для построенных фрагментов множеств $\xi(\boldsymbol{z}_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Шаг 0. Возьмём фрагмент $\boldsymbol{z}_0$. Включим в $\xi(\boldsymbol{z}_0)$ элемент a_0. Количество элементов множества Q, использованных после шага с номером k, обозначим как t_k.

Пусть выполнены k шагов работы алгоритма. Определены фрагменты значений $\xi(\boldsymbol{z}_0), \ldots, \xi(\boldsymbol{z}_k)$, для которых выполняются соотношения

$$\forall\, i, j \in \{0, \ldots, k\}(i \neq j \to \xi(\boldsymbol{z}_i) \neq \xi(\boldsymbol{z}_j));$$

$$\forall\, i, j \in \{0, \ldots, k\}(\boldsymbol{z}_i \prec \boldsymbol{z}_j \to \xi(\boldsymbol{z}_i) \subseteq \xi(\boldsymbol{z}_j));$$

$$\forall\, i, j, l \in \{0, \ldots, k\}(\boldsymbol{z}_i \circ \boldsymbol{z}_j = \boldsymbol{z}_l \to \\ \to \xi(\boldsymbol{z}_i) \cup \xi(\boldsymbol{z}_j) = \xi(\boldsymbol{z}_l)).$$

Шаг $k+1$. Возьмём $\boldsymbol{z}_{k+1}$. Включим в $\xi(\boldsymbol{z}_{k+1})$ элемент a_{t_k+1}. Определим множества

1. $M_0 = \{\boldsymbol{z}_j \mid j \leqslant k \;\&\; \boldsymbol{z}_{k+1} \prec \boldsymbol{z}_j \;\& \\ \&\; \boldsymbol{z}_{k+1} \neq \boldsymbol{z}_j\};$

2. $M_1 = \{\boldsymbol{z}_j \mid j \leqslant k \;\&\; \boldsymbol{z}_j \prec \boldsymbol{z}_{k+1} \;\& \\ \&\; \boldsymbol{z}_{k+1} \neq \boldsymbol{z}_j\};$

К построенному фрагменту значения $\xi(\boldsymbol{z}_{k+1})$ добавим множество $\bigcup\limits_{z_i \in M_1} \xi(\boldsymbol{z}_i)$.

Дополним значения $\xi(\boldsymbol{z}_i)$, где $\boldsymbol{z}_i \in M_0$, включив в каждое такое множество элемент a_{t_k+1}. Обозначим как G диаграмму отношения порядка $\prec$ на множестве $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$. Ориентированные дуги на этой диаграмме соединяют только такие пары элементов $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$, связанных отношением $\prec$, между которыми нет промежуточных элементов. Рассмотрим изменение диаграммы при добавлении к рассматриваемым вершинам вершины $\boldsymbol{z}_{k+1}$.

Доопределим отображение ξ на множестве M_1. Рассмотрим вершины G, связанные с вершиной $\boldsymbol{z}_{k+1}$. Возможны два случая: таких вершин меньше, чем две, и таких вершин не меньше, чем две. Если имеет место первый случай, то выполнение шага $k+1$ заканчивается. Для значений ξ, соответствующих вершинам G, между которыми выполняется отношение $\prec$, имеет место вложение множеств. Из леммы 4 следует, что $\forall \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j \in M_1(\boldsymbol{z}_i \circ \boldsymbol{z}_j \prec \boldsymbol{z}_{k+1} \;\&\; \boldsymbol{z}_i \circ \boldsymbol{z}_j \neq \boldsymbol{z}_{k+1})$. Поэтому полученное определение фрагмента ξ удовлетворяет условию вложения $\Im \sqsubseteq S$ на множестве $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$. Пусть имеет место второй случай. На диаграмме G определим множество

$$P = \{\boldsymbol{z}_{i_j} \mid j = 1, \ldots, r \;\& \\ \&\; \forall j \in \{1, \ldots, r-1\}(i_j < i_{j+1})$$

вершин, являющихся непосредственными предками вершины $\boldsymbol{z}_{k+1}$. Заметим, что на диаграмме G на шаге k, каждый элемент P связан дугой с каждым элементом, являющимся потомком $\boldsymbol{z}_{k+1}$ диаграммы G на шаге $k+1$. Выполним преобразование ξ с помощью следующей последовательности действий.

1. Доопределим каждое из множеств $\xi(\boldsymbol{z}_{i_j})$, $j = 1, \ldots, r$, добавив в него множество $L_j = \{a_{t_k+1}, \ldots, a_{t_k+j-1}, a_{t_k+j+1}, \ldots, a_{t_k+j+r}\}$.
2. Включим элементы $a_{t_k+2}, \ldots, a_{t_k+j+1}$ в каждое множество $\xi(\boldsymbol{z})$, где $\boldsymbol{z} \in M_0 \cup \{\boldsymbol{z}_{k+1}\}$.

Полученное после выполнения действий 1 и 2 определение фрагмента отображения ξ является инъективным на $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$. Фрагмент ξ также является монотонным для отношения $\prec$ и сохраняет композицию на множестве $M_0 \cup M_2 \cup \{\boldsymbol{z}_{k+1}\} \cup \{\boldsymbol{z}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{z}_{i_r}\}$ в объединениях образов множеств, соответствующих элементам композиции. Справедливость последнего утверждения следует из истинности условия $\forall \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{z}_j \in P(i \neq j \to \xi(\boldsymbol{z}_i) \cup \xi(\boldsymbol{z}_j) = \xi(\boldsymbol{z}_{k+1}))$.

Дополним фрагмент отображения ξ, последовательно обрабатывая элементы P. Для очередного рассматриваемого элемента $\boldsymbol{z}_{i_j} \in P$ составим множество элементов диаграммы G, являющихся непосредственными предками $\boldsymbol{z}_{i_j}$. Если такое множество содержит не более одного элемента, завершим обработку $\boldsymbol{z}_{i_j}$. В противном случае для $\boldsymbol{z}_{i_j}$ повторим действия 1 и 2, заменив $\boldsymbol{z}_{k+1}$ на $\boldsymbol{z}_{i_j}$. При этом вместо элемента a_{t_k+1} в указанных действиях используются элементы семейства L_j. Остальные элементы Q, используемые для дополнения значений ξ в вершинах — потомках $\boldsymbol{z}_{i_j}$, последовательно выбираются из ещё не использованного фрагмента множества Q. Процесс продолжается до тех пор, пока он не будет завершен для всех элементов из M_1. В результате на множестве $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$ будет переопределён фрагмент отображения ξ. При этом добавляемые во множества $\xi(\boldsymbol{z})$ элементы выбираются с возрастающими индексами.

Поэтому построенные фрагменты ξ для разных элементов $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$ остаются несовпадающими. Следовательно, ξ после выполнения каждого шага рассмотренного алгоритма остаётся инъективным отображением. Для ξ также выполняются условия монотонности на G. Отображение ξ сохраняет композиции пар элементов $\{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_{k+1}\}$ в объединениях множеств, представляющих такие элементы. Поэтому имеют место вложения $\Im$ в S для монотонно расширяющихся фрагментов D_M. Изменения в определяемых при этом отображениях фрагментов D_M не изменяют такие отображения для подмножеств множества Q, используемых на каждом таком шаге. Поэтому предельное значение конструируемого отображения ξ является отображением, для которого обеспечено вложение $\Im \sqsubseteq S$ на всём множестве D_M. $\square$

Заметим, что значениями определённого в доказательстве теоремы отображения ξ являются бесконечные разрешимые множества, которые полностью определяются в общем случае за неограниченное число шагов. Это связано с тем, что для каждого $\boldsymbol{z} \in D_{M_\Im}$ в значении $\xi(\boldsymbol{z})$ необходимо учитывать композицию $\boldsymbol{z}$ с произвольными элементами $D_{M_\Im}$ и отношения вложения, выполняющееся между $\boldsymbol{z}$ и другими элементами $D_{M_\Im}$. Для случая, когда формализм представления знаний составляет конечное семейство конечных множеств, отображение ξ может быть полностью определено за конечное число шагов.

4. Прямой и обратный вывод в теоретико-множественных формализмах представления знаний

Композиция знаний является элементом семейства универсальных операций, применяемых для моделирования интеллектуальных систем. Она определяет преобразование интеграции начальных данных в конкретные фрагменты представления знаний. Композиция используется для конструирования сложных знаний из их фрагментов и представления морфологии представления знаний.

Другие типы общезначимых операций над представлениями знаний позволяют моделировать преобразования знаний в объекты, применяемые для составления или обработки знаний операциями и процессами в интеллектуальных системах. Для построения содержательно полной системы операций над знаниями востребована система универсальных атрибутов таких операций и множества значений указанных атрибутов для описания отдельных операций и классов операций. Пример классификации абстрактных операций, основанный на понятии вложения представлений знаний, построен в [5].

Среди операций над знаниями особую роль играют операции логического следования. Признанные схемы процессов нахождения следствий из баз знаний и начальных данных решаемых задач связаны с концепциями прямого и обратного вывода. Этими операциями обеспечивается возможность моделирования процессов рассуждений. Такими процессами формируются последовательности следствий из заданных систем знаний, называемые выводами. Построение всех возможных выводов для заданного семейства знаний и начальных данных решаемых задач обеспечивает нахождение решений таких задач, извлекаемых из конструируемых выводов.

Рассмотрим аналог понятия следования из знаний, а также прямого вывода для баз знаний, представляемых множествами объектов. Задачи, решаемые с помощью операций логического следования, связаны с нахождений следствий из содержания базы знаний, а также начальных данных таких задач.

Пусть заданы начальное данное $\boldsymbol{z}$, являющееся множеством объектов, и конечное семейство $BZ = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k\}$ множеств объектов, составляющих базу знаний. Образуем фрагмент знания

$$\boldsymbol{z}'' = \bigcap_{\boldsymbol{z}' \in BZ(\boldsymbol{z})} (\boldsymbol{z}'),$$

где $BZ(\boldsymbol{z}) = \{\boldsymbol{z}' \,|\, \boldsymbol{z} \subseteq \boldsymbol{z}' \;\&\; \boldsymbol{z}' \in BZ\}$.

Будем говорить, что $\boldsymbol{z}^1 = \boldsymbol{z}'' \backslash \boldsymbol{z}$ является следствием из BZ для $\boldsymbol{z}$.

Заметим, что следствие из BZ для $\boldsymbol{z}$ определяется единственным образом. Поэтому единственная последовательность $\boldsymbol{z}^0, \boldsymbol{z}^1, \ldots, \boldsymbol{z}^i, \ldots$, в которой $\boldsymbol{z}^0 = \boldsymbol{z}$, а $\boldsymbol{z}^i$ — это следствие из BZ и $\boldsymbol{z}^{i-1}$. Эта последовательность составляет единственный вывод из BZ и $\boldsymbol{z}$. В ней реализуется аналог механизма прямого вывода. Эта последовательность монотонна в отношении вложения множеств.

Применим рассмотренный механизм вывода для решения задач с помощью баз знаний в теоретико-множественном формализме.

Постановку каждой задачи составляют начальное данное и цель. Начальное данное задачи — это конечное семейство множеств объектов. Прямой вывод реализует процесс построения следствий из базы знаний, получаемых для отдельных множеств начального данного и следствий из них. Цель задачи — это множество объектов. Такое множество может быть неопределённым, частично-определённым и полностью определённым.

Решение задачи первого типа составляют все множества, которые входят в выводы, конструируемые с использованием базы знаний и элементов начальных данных решаемой задачи.

Решение второй задачи составляют все такие элементы выводов, которые содержат заданный фрагмент множества, являющегося целью. Наконец, последний случай постановки задачи связан с проверкой свойства множества цели задачи: содержаться в многообразии конструируемых выводов.

Рассмотрим $BZ = \{\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_k\}$ и $\boldsymbol{z}^0$ — множество, составляющее начальное данное решаемой задачи. Тогда $\boldsymbol{z}^1$ является подмножеством, составленным с помощью элементов множества

$$BZ(\boldsymbol{z}^0) = \{\boldsymbol{z}' \,|\, \boldsymbol{z}^0 \subseteq \boldsymbol{z}' \ \ \& \ \ \boldsymbol{z}' \in BZ\}.$$

Множества $\boldsymbol{z}^0$ и $\boldsymbol{z}^1$ составляют разбиение множества

$$\boldsymbol{z}'' = \bigcap_{\boldsymbol{z}' \in BZ(\boldsymbol{z}^0)} (\boldsymbol{z}').$$

Для множеств $BZ(\boldsymbol{z}^0)$ и $BZ(\boldsymbol{z}^1)$ выполняется соотношение $BZ(\boldsymbol{z}^0) \subseteq BZ(\boldsymbol{z}^1)$. Поэтому $\boldsymbol{z}^2$ является подмножеством таких множеств из $BZ(\boldsymbol{z}^0)$, которые содержатся в $\boldsymbol{z}''\backslash\boldsymbol{z}^1$. Следовательно, $\boldsymbol{z}^2 \subseteq \boldsymbol{z}^0$.

Аналогично проверяется, что $\boldsymbol{z}^3 \subseteq \boldsymbol{z}^1$. Если $BZ(\boldsymbol{z}^0) = BZ(\boldsymbol{z}^1)$, то $\boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{z}^0$.

Поэтому для вывода $\mathbf{W}$ справедливо соотношение

$$\forall\, i \in N(\boldsymbol{z}^{2i} = \boldsymbol{z}^0 \ \ \& \ \ \boldsymbol{z}^{2i+1} \subseteq \boldsymbol{z}^1).$$

В общем случае оказывается верным соотношение

$$\forall\, i \in N(\boldsymbol{z}^{2i} \subseteq \boldsymbol{z}^{2i-2} \ \ \& \ \ \boldsymbol{z}^{2i+1} = \boldsymbol{z}^{2i-1}).$$

Если на некотором шаге построения $\mathbf{W}$ окажется выполнимым соотношение $\boldsymbol{z}^i = \boldsymbol{z}^{i+2}$, то эта последовательность продолжается как бесконечное периодическое повторение пары множеств $\boldsymbol{z}^i$ и $\boldsymbol{z}^{i+1}$. Следовательно, вывод $\mathbf{W}$ составляют две чередующиеся последовательности множеств. Каждая такая последовательность множеств является нестрого монотонно убывающей в отношении вложения её элементов. Поэтому, если $\boldsymbol{z}^0$ и элементы BZ являются конечными множествами, то $\mathbf{W}$ является периодической последовательностью.

Рассмотрим пример аналога обратного вывода для теоретико-множественных формализмов. Пусть задано семейство множеств BZ, составляющих базу знаний в теоретико-множественном формализме, и множество начального данного решаемой задачи $\boldsymbol{z}^0$. Пусть задано множество цели $\boldsymbol{z}$. Требуется установить существование вывода для BZ и $\boldsymbol{z}^0$, содержащего $\boldsymbol{z}$. Определим дерево обратного вывода для $\boldsymbol{z}$. Корень дерева отнесём к нулевому ярусу дерева. Поставим корню в соответствие цель решаемой задачи $\boldsymbol{z}$. Потомками указанной вершины являются всевозможные семейства множеств из BZ, все элементы которых содержат $\boldsymbol{z}$. Если S — некоторое такое семейство, то потомком вершины S является множество $\mathbf{z}'$, задаваемое выражением

$$\boldsymbol{z}' = \Big(\bigcap_{\boldsymbol{z}'' \in S} (\boldsymbol{z}'')\Big) \setminus \boldsymbol{z}.$$

Последняя вершина является корнем дерева обратного вывода для $\boldsymbol{z}'$. Процесс построения дерева обратного вывода завершается в вершинах, соответствующих $\boldsymbol{z}^0$. Вершины полученного дерева, принадлежащие ярусам с чётными (нечётными) номерами, называются *ИЛИ* (*И*)-вершинами. Эти вершины аналогичны *ИЛИ* и *И* вершинам деревьев обратного вывода для формализма продукционных систем.

Заключение

Теоретико-множественные формализмы представления знаний — это простейшие формализмы, в которых знания ассоциируются с семействами сущностей. Отсутствие дополнительных предположений для задаваемых множествами знаний влечёт ограниченность возможности построения следствий из таких знаний.

В работе предложено понятие следствия в теоретико-множественном формализме представления знаний. Другие уточнения этого понятия могут реализовать иные схемы трансформации начального данного и баз знаний.

Многообразие операций над знаниями, представляемыми с помощью множеств, включает теоретико-множественные операции объединения, пересечения, разности и произведения множеств, а также морфизмы факторизации, моделирующие вычислимые схемы извлечения подмножеств из множеств. Другие виды морфизмов, такие как иерархии классов обобщающих и трансформирующих морфизмов [5], естественно переносятся на класс теоретико-множественных формализмов. Класс теоретико-множественных морфизмов является частью иерархии классов формализмов представления знаний, создаваемой на формальной основе, аналогичной классификации моделей данных [6].

Литература

1. Костенко К.И. Вложение формализмов знаний // Материалы XVII международной научной конференции Проблемы теоретической кибернетики, Казань, 16–20 июня 2014. С. 149–152.
2. Костенко К.И., Лебедева А.П. Алгебраическая и семантическая структуры иерархических семантических сетей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014, №4. С. 56–64.
3. Чечкин А.В. Нейрокомпьютерная парадигма информатики // Нейрокомпьютеры: разработки, применение. 2011. №7. С. 3–9.
4. Костенко К.И. Вложения формализмов семантических сетей // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013, №2. С. 58–66.
5. Костенко К.И. Классификация операций в пространствах знаний // XII национальная конференция по искусственному интеллекту с международным участием (труды конференции), Тверь 2010, 20–24 сентября. Т. 2. С. 155–163.
6. Jacobs B.E. On database logic // Journal of the Association for Computing Machinery. 1982. Vol. 29. No. 2. P. 310–332.

References

1. Kostenko K.I. Vlozhenie formalizmov znaniy [Investing formalisms Knowledge]. *Materialy XVII mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii Problemy teoreticheskoy kibernetiki, Kazan', 16–20 iyunya 2014.* [Proceedings of the XVII International Scientific Conference Problems of Theoretical Cybernetics, Kazan, 16–20 June 2014], pp. 149–152. (In Russian)
2. Kostenko K.I., Lebedeva A.P. Algebraicheskaya i semanticheskaya struktury ierarkhicheskikh semanticheskikh setey [Algebraic and semantic structure of the hierarchical semantic networks]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no. 4, pp. 56–64. (In Russian)
3. Chechkin A.V. Neyrokomp'yuternaya paradigma informatiki [Neurocomputing paradigm of computer science]. *Neyrokomp'yutery: razrabotki, primenenie* [Neurocomputers: development, application], 2011, no. 7, pp. 3–9. (In Russian)
4. Kostenko K.I. Vlozheniya formalizmov semanticheskikh setey [Attachments formalism semantic networks]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 2, pp. 58–66. (In Russian)
5. Kostenko K.I. Klassifikatsiya operatsiy v prostranstvakh znaniy [Classification of operations in the space of knowledge]. In *XII natsional'naya konferentsiya po iskusstvennomu intellektu s mezhdunarodnym uchastiem (trudy konferentsii), Tver' 2010, 20–24 sentyabrya. T. 2* [XII National Conference on Artificial Intelligence with International Participation (conference proceedings), Tver 2010, 20–24 September, vol. 2], pp. 155–163. (In Russian)
6. Jacobs B.E. On database logic. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1982, vol. 29, no. 2, pp. 310–332.

Статья поступила 10 июля 2015 г.