УДК 532.516; 544.6

УТОЧНЕНИЕ ФОРМУЛЫ СКОРОСТИ ЭЛЕКТРООСМОТИЧЕСКОГО СКОЛЬЖЕНИЯ РУБИНШТЕЙНА–ЗАЛЬЦМАНА

Франц Е. А., Кирий В. А., Шелистов В. С., Куцепалов А. С., Демёхин Е. А.

IMPROVEMENT OF RELATION FOR ELECTROOSMOTIC SLIP VELOCITY

Frants E. A.*, Kiriy V. A.*, Shelistov V. S.*, Kutsepalov A. S.*, Demekhin E. A.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350033, Russia
** Krasnodar branch of Financial University under the Government of the Russian Federation, Krasnodar, 350051, Russia
e-mail: gandizel@mail.ru

Abstract. On any surface, under the action of an external electric field, there is a space charge region of small thickness, in which occurs the accumulation of charge. On the outer edge of the area due to the tangential component of the electric field, the slip of fluid takes place. This phenomenon is theoretically investigated in a number of works of the 2000. Rubinstein and Salzman were obtained the estimated formula for the speed of electroosmotic-slip of liquid, which, however, is not without a flaw, and therefore needs to be refined. In this article we obtain refined formula of Rubinstein–Saltzman, and is a fairly detailed derivation of this formula in the space charge region on the basis of asymptotic expansions.

Keywords: slip velocity, asymptotic method, stretching of variables, space charge region

Введение

В последние несколько десятилетий электрокинетические явления вызывают все возрастающий интерес благодаря стремительно развивающимся микро- и нанотехнологиям. При этом особый интерес вызывает электрокинетическая неустойчивость, способствующая перемешиванию, усилению тепло- и массопереноса в микромасштабах.

Первое исследование электрокинетической неустойчивости в 2000 г. провели Рубинштейн и Зальцман [1], теоретически исследовавшие этот тип неустойчивости, возникающей в режимах предельного тока в области пространственного заряда. Данная работа стала возможна благодаря циклу работ российских авторов [2–4]. По сути, Рубинштейн и Зальцман использовали подход из [4]. Авторы взяли число Дебая ν в качестве малого параметра и исследовали задачу с помощью асимптотического метода. Ими было показано, что тангенциальная скорость скольжения определяется из решения в области пространственного заряда. После этого находится скорость в электронейтральной зоне, внешней по отношению к области пространственного заряда. При этом уже найденная скорость скольжения используется в качестве граничного условия для внешней задачи (электронейтральной области) и исследования электрокинетической неустойчивости. Важно отметить, что полученная формула для скорости скольжения качественно согласуется как с экспериментами, так и с результатами численного исследования, однако количественно

Франц Елизавета Александровна, магистрант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: gandizel@mail.ru

Кирий Владимир Александрович, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: vladimir@kiriy.ru

Шелистов Владимир Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории электро- и гидродинамики микро- и наномасштабов Краснодарского филиала Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: shelistov_v@mail.ru

Куцепалов Александр Сергеевич, аспирант кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: alex.kuzepalov@gmail.com

Демёхин Евгений Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры «Математика и информатика» Финансового университета при Правительстве Российской Федерации; e-mail: edemekhi@gmail.com

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №13-08-96536 А, 15-08-02483 А).

отличается от них в значительной степени. Вследствие этого, данная формула нуждается в уточнении. Это сделано в настоящей работе.

1. Постановка задачи

После обезразмеривания система уравнений Нернста–Планка–Пуассона–Стокса принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial c^\pm}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla c^\pm &= \pm\nabla\left(c^\pm\nabla\Phi\right) + \nabla^2 c^\pm; && (1.1)\\
\nu^2\nabla^2\Phi &= c^- - c^+, && (1.2)\\
-\nabla\Pi + \nabla^2\mathbf{u} &= \frac{\varkappa}{\nu^2}(c^- - c^+)\nabla\Phi, && (1.3)\\
\nabla\mathbf{u} &= 0
\end{aligned}$$

где c^+ и c^- — концентрации положительных и отрицательных ионов соответственно, $\mathbf{u}$ — вектор скорости, Φ — электростатический потенциал, ν — число Дебая, κ — коэффициент сцепления между гидродинамической и электростатической частями задачи.

Около электроселективной поверхности должны быть поставлены краевые условия:

$$y = 0 : c^+ = p, \;\; c^-\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial c^-}{\partial y},$$

$$\Phi = 0, \;\; U = V = 0.$$

Ток около поверхности $y = 0$ определяется из соотношения

$$j = c^+\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial c^+}{\partial y}.$$

Подробное описание обезразмеривания системы приведены в [5].

2. Электростатика

Для цельности изложения повторим подход, изложенный в работах [2–4]. Рассмотрим данную систему в области пространственного заряда. В одномерном случае уравнение (1.3), описывающее движение жидкости, не связано с остальной системой. $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} = 0$. Можно найти стационарное решение:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(c^+E + \frac{\partial c^+}{\partial y}\right) = 0; \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(c^-E - \frac{\partial c^-}{\partial y}\right) = 0; \qquad (2.2)$$

$$\nu^2\frac{\partial E}{\partial y} = c^- - c^+, \qquad (2.3)$$

где $E \equiv \frac{\partial\Phi}{\partial y}$. Проинтегрируем уравнения (2.1) и (2.2)

$$\mathrm{c}^+E + \frac{\partial c^+}{\partial y} = j;$$

$$\mathrm{c}^-E - \frac{\partial c^-}{\partial y} = 0.$$

Сложим их и вычтем, а затем подставим в эти уравнения (2.3). В результате получим

$$(\mathrm{c}^+ + c^-)E - \nu^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} = j; \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{1}{2}\nu^2E^2 + c^+ + c^-\right) = j.$$

Проинтегрируем последнее уравнение

$$c^+ + c^- = j(y - y_m) + \frac{1}{2}\nu^2E^2. \qquad (2.5)$$

Здесь y_m — константа интегрирования. После подстановки (2.5) в (2.4) получим уравнение с одной неизвестной

$$\nu^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(j(y_m - y) - \frac{\nu^2}{2}E^2\right)E + j = 0. \qquad (2.6)$$

При граничных условиях

$$\nu \to 0, \; O\left(\log\frac{1}{\nu}\right) < E < O\left(\frac{1}{\nu}\right), \; \frac{\partial}{\partial y} = O(1),$$

обыкновенное дифференциальное уравнение (2.6) переходит в кубическое алгебраическое уравнение

$$\left(j(y_m - y) - \frac{\nu^2}{2}E^2\right)E = 0,$$

которое имеет 3 решения. $E = 0$ имеет смысл только при $y > y_m$ и $\nu E = \pm\sqrt{2j(y_m - y)}$. Решение с отрицательным радикалом не имеет физического смысла

$$\begin{cases}\nu E = \sqrt{2j(y - y_m)}, \quad 0 < y < y_m;\\ \nu E = 0, \quad y > y_m,\end{cases}$$

$$\nu\Phi = \frac{2\sqrt{2}}{3j}(jy_m)^{3/2} - \frac{(2jy_m - 2jy)^{3/2}}{3j}.$$

При $y = y_m$

$$\nu\Delta\Phi = \frac{2\sqrt{2}}{3j}y_m^{3/2}j^{1/2}. \qquad (2.7)$$

Формула (2.7) хорошо известна, именно это стационарное решение было использовано Рубинштейном и Зальцманом в работе [1].

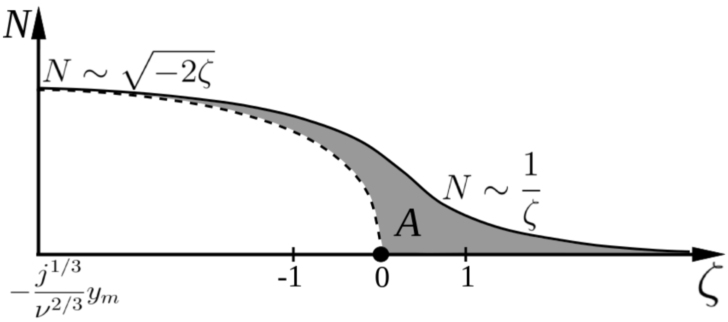

Рис. 1. Пунктирная кривая — решение уравнения (2.7), сплошная — уточненное решение. Серым закрашена область поправочного члена

3. Электроосмотическое скольжение

Будем считать, что независимые переменные в электростатическом решении (j и y_m) не являются постоянными относительно x, а описываются медленно изменяющимися функциями, $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$. Тогда получим ненулевые составляющие скорости $V \ll U$. Уравнение (1.3) примет вид

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \kappa \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x};$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \kappa E \frac{\partial E}{\partial y}.$$

Полученные уравнения в итоге можно свести к одному

$$\frac{1}{\kappa}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial E^2}{\partial x} \qquad (3.1)$$

с краевыми условиями:

$$y = 0: \qquad U = 0;$$

$$y = y_m: \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0.$$

После решения задачи получим знаменитую формулу Рубинштейна–Зальцмана для скорости электроосмотического скольжения:

$$\frac{\nu^2}{\kappa} U_m = -\frac{1}{8}\Delta\Phi^2 \frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Delta\Phi^2}{\partial x},$$

где $U_m \equiv U|_{y=y_m}$

4. Поправка скорости скольжения Рубинштейна

Решение может быть уточнено следующим приближением, если принять во внимание пограничные слои вблизи $y = 0$, $y = 1$ и $y = y_m$, где член со второй производной, которым мы пренебрегли, должен быть учтен. Самым важным слоем является слой при $y = y_m$. Произведем растяжение переменных вблизи этой точки следующим образом:

$$y - y_m = \frac{\nu^{2/3}}{j^{1/3}}\zeta; \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}}\frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad E = \frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}}.$$

Тогда (2.6) переходит в уравнение, не зависящее от параметров

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \zeta^2} - \left(\zeta + \frac{1}{2}N^2\right) N + 1 = 0,$$

с граничными условиями

$$\zeta \to -\infty: \ N \to \sqrt{-2\zeta}; \quad \zeta \to +\infty: \ N \to 0,$$

где $\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = N$.

Граничные условия при $y = 0$ и $y = 1$ теперь должны быть взяты для новой независимой переменной ζ, соответственно при

$$\zeta = -\frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}} y_m \text{ и } \zeta \to -\infty.$$

Из условия $\Phi(1) - \Phi(0) = \Delta V$ следует, что

$$\Delta V = \int\limits_0^1 E dy.$$

Представим N в виде $N = \sqrt{-2\zeta} + n(\zeta)$, где $\sqrt{-2\zeta}$ — нормированное решение (2.7), $n(\zeta)$ — поправочный член (рис. 1). Тогда

$$\Delta V = \int\limits_{-\frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}} y_m}^{\infty} N d\zeta = \int\limits_{-\frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}} y_m}^{0} \sqrt{-2\zeta} d\zeta +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{\infty} n(\zeta) d\zeta = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{y_m^{3/2} j^{1/2}}{\nu} + A.$$

Здесь A — постоянная, физический смысл которой — площадь закрашенной области между двумя кривыми на рис. 1. Значение этой площади приведено в таблице для некоторых значений ζ

$$y_m = \frac{3^{2/3}}{2}\frac{\nu^{2/3}}{j^{1/3}}(\Delta V - A)^{2/3}; \tag{4.1}$$

$$\Phi = \Delta V - A - \frac{2\sqrt{2}}{3}(-\zeta)^{3/2} + m(\zeta),$$

где $m(\zeta) \equiv \int\limits_{-\infty}^{\zeta} n(\zeta)d\zeta$.

Предположим, что независимые переменные системы E и Φ не постоянные относительно x, а медленно изменяющиеся функции. Тогда уравнение (11) для скорости электроосмоса перепишется следующим образом:

$$\frac{1}{\kappa}\frac{d^2U}{d\zeta^2} = \frac{1}{3}N^2\frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x} - \\ - \frac{2\sqrt{2}}{3\nu}\left(\frac{3}{2}y_m^{1/2}j^{1/2}\frac{\partial y_m}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{y_m^{3/2}}{j^{1/2}}\frac{\partial j}{\partial x}\right)\frac{dN}{d\zeta}.$$

Проинтегрируем это выражение, учитывая, что $G(-\infty) = 0$, $G(+\infty) = \text{const}$, где

$$G \equiv \int\limits_{-\infty}^{\zeta} g(\zeta)d\zeta;$$

$$\frac{1}{\kappa}\frac{dU}{d\zeta} = \frac{1}{3}\left(\frac{j^{2/3}}{\nu^{4/3}}y_m^2 - \zeta^2 + G(\zeta)\right)\frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x} - \\ \frac{2\sqrt{2}}{3\nu}\left(\frac{3}{2}y_m^{1/2}j^{1/2}\frac{\partial y_m}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{y_m^{3/2}}{j^{1/2}}\frac{\partial j}{\partial x}\right) \times \\ \times (\sqrt{-2\zeta} + n) + \text{const}.$$

При $\zeta \to +\infty: \quad n \to 0; \quad G \to G(\infty) \neq \infty$. Константа интегрирования определяется следующим образом:

$$\text{const} = -\frac{1}{3}\left(\frac{j^{2/3}}{\nu^{4/3}}y_m^2 + G(\zeta)\right)\frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Еще раз проинтегрируем, учитывая, что

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\int\limits_{-\infty}^{\zeta} nd\zeta \equiv Q(\zeta); \quad Q(+\infty) = \frac{\sqrt{2}}{3}A$$

и приняв во внимание тот факт, что из граничного условия $U = 0$ при $\zeta = -\frac{j^{1/3}}{\nu^{2/3}} y_m \Rightarrow \text{const} = 0$. При $\zeta \to +\infty \;\; U \to U_m$,

$$\frac{1}{\kappa}U_m = \frac{1}{\nu^2}\left(-\frac{5}{9}y_m^3\frac{\partial j}{\partial x} - \frac{4}{3}y_m^2 j\frac{\partial y_m}{\partial x}\right) - \\ - \frac{1}{\nu}\left(3y_m^{1/2}j^{1/2}\frac{\partial y_m}{\partial x} + \frac{y_m^{3/2}}{j^{1/2}}\frac{\partial j}{\partial x}\right)Q(+\infty) + \\ + \frac{1}{3}\int\limits_{-\infty}^{\zeta}[G(\zeta) - G(\infty)]\,d\zeta\frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x}.$$

Далее внесем y_m под дифференциал, где это возможно, и подставим y_m из формулы (4.1), получим

$$\frac{1}{\nu}y_m^{3/2} = \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{1}{j^{1/2}}(\Delta V - A);$$

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial y_m^{3/2}}{\partial x} = -\frac{3}{4\sqrt{2}}\frac{1}{j^{3/2}}(\Delta V - A)\frac{\partial j}{\partial x} + \\ + \frac{3}{2\sqrt{2}}\frac{1}{j^{1/2}}\frac{\partial \Delta V}{\partial x};$$

$$\frac{1}{\nu^2}y_m^3 = \frac{9}{8}\frac{1}{j}(\Delta V - A)^2;$$

$$\frac{1}{\nu^2}\frac{\partial y_m^3}{\partial x} = -\frac{9}{8}\frac{1}{j^2}(\Delta - A)^2\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{9}{8}\frac{1}{j}\frac{\partial(\Delta V - A)^2}{\partial x}.$$

В конечном итоге получим формулу скорости скольжения с учетом введенной поправки

$$\frac{1}{\kappa}U_m = -\Delta V\frac{\partial \Delta V}{\partial x} - \frac{1}{8}(\Delta V - A)^2\frac{1}{j}\frac{\partial j}{\partial x} + \\ + \frac{1}{3j}\frac{\partial j}{\partial x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(G(\zeta) - G(\infty))\,d\zeta.$$

При $A = 0$ и отбрасывании члена с интегралом, данная формула совпадает с формулой Рубинштейна–Зальцмана. Численное решение дает $A = 1{,}372$.

Заключение

В данной работе с помощью метода асимптотических разложений получено уточненное выражение для скорости электроосмотического скольжения в области пространственного заряда, в области непосредственно прилегающей к самой поверхности.

Литература

1. *Rubinstein I., Zaltzman B.* Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane // Physical Review E. 2000. Vol. 62. P. 2238–2251. doi: 10.1103/PhysRevE.62.2238
2. *Уртенов М. Х.* Краевые задачи для систем уравнений Нернста–Планка–Пуассона (факторизация, декомпозиция, модели, численный анализ). Краснодар: Кубанский государственный университет. 1998. 125 с.
3. *Уртенов М.Х.* Краевые задачи для систем уравнений Нернста–Планка–Пуассона (асимптотические разложения и смежные вопросы). Краснодар: Кубанский государственный университет. 1999. 124 с.
4. *Бабешко В.А., Заболоцкий В.И., Кириллова Е.В., Уртенов М.Х.* Декомпозиция систем уравнений Нернста–Планка–Пуассона // ДАН. 1995. Т. 344. № 3. С. 485–486.
5. *Demekhin E.A., Shelistov V.S., Polyanskikh S.V.* Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability // Physical Review E. 2011. Vol. 84. 036318. doi: 10.1103/PhysRevE.84.036318

References

1. Rubinstein I., Zaltzman B. Electro-osmotically induced convection at a permselective membrane. *Physical Review E.* 2000, vol. 62, pp. 2238–2251. doi: 10.1103/PhysRevE.62.2238
2. Urtenov M. Kh. *Kraevye zadachi dlya sistem uravneniy Nernsta–Planka–Puassona (faktorizatsiya, dekompozitsiya, modeli, chislennyy analiz)* [Boundary value problems for systems of equations Nernst–Planck–Poisson (factorization, decomposition, models, numerical analysis)]. Krasnodar, Kubanskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 1998, 125 p. (In Russian)
3. Urtenov M. Kh. *Kraevye zadachi dlya sistem uravneniy Nernsta–Planka–Puassona (asimptoticheskie razlozheniya i smezhnye voprosy)* [Boundary value problems for systems of equations Nernst–Planck–Poisson (asymptotic expansions and related issues)]. Krasnodar, Kubanskiy gosudarstvennyy universitet Publ., 1999, 124 p. (In Russian)
4. Babeshko V. A., Zabolotskij V. I., Kirillova E. V., Urtenov M. K. Dekompozitsiya sistem uravneniy Nernsta–Planka–Puassona [Decomposition of Nernst–Planck–Poisson equation]. *Doklady RAN* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 1995, vol. 344, no. 3, pp. 485-486. (In Russian)
5. Demekhin E.A., Shelistov V.S., Polyanskikh S.V. Linear and nonlinear evolution and diffusion layer selection in electrokinetic instability. *Physical Review E.*, 2011, vol. 84, 036318. doi: 10.1103/PhysRevE.84.036318

Статья поступила 20 июня 2015 г.