

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ ДИНАМИКИ ТРЕХСЛОЙНОГО ПОЛОГО ЦИЛИНДРА

Белянкова Т. И., Калинин В. В., Лыжов В. А.

FEATURES OF DYNAMICS OF THREE-LAYER HOLLOW CYLINDER

Belyankova T. I.<sup>\*,\*\*</sup>, Kalinchuk V. V.<sup>\*,\*\*</sup>, Lyzhov V. A.<sup>\*,\*\*</sup>

<sup>\*</sup> Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia

<sup>\*\*</sup> Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia

e-mail: kalin@ssc-ras.ru, tbelen415@mail.ru

*Abstract.* An effective method is proposed for constructing the Green matrix-function of an infinite circular cylinder with a layered inhomogeneous coating. As the cover, the multilayer cylinder wall is considered, which consist of the package of embedded both homogeneous and functionally graded cylinders, rigidly coupled together. The method is based on the use of the operational calculus apparatus in combination with the analytical (for homogeneous) or numerical (for inhomogeneous coating components) construction of solution, followed by the matrix approach while satisfying the boundary conditions. The proposed approach for modeling a layered inhomogeneous coating allows to take adequately into account both the differences in the change of physical and mechanical properties of the coating components, and the possible differences in the conditions at their interface. The matrix formulas convenient for programming are constructed, which allow not only to investigate the dispersion properties with high precision, but also to solve the mixed dynamic problems on vibrations of both hollow and liquid-filled inhomogeneous cylinder. On the example of the problem for torsional oscillations of the bandage on the surface of two and three layer hollow cylinder, a detailed analysis is carried out for the influence of the physical and mechanical properties relation, nature, localization region and intensity of changes in the properties of the hollow cylinder wall on its dynamic stiffness. The regularities are established that allow to optimize the pipeline technical, operational and strength qualities by changing the structure and properties of the pipeline wall.

*Keywords:* layered-inhomogeneous medium, thick-walled hollow cylinder, multilayer coating, functionally graded material, Green's function, torsional oscillations, integral equation, dynamic stiffness

### Введение

Изучению особенностей динамики цилиндрических тел уделяется большое внимание в литературе. В [1–9] рассмотрены различные аспекты процессов возбуждения и распространения волн в цилиндрических телах. В [1] исследовано волновое поле, инициированное жестким бандажом, совершающим радиальные колебания на поверхности предварительно напряженного цилиндра. В [2–5]

исследованы нормальные и крутильные колебания цилиндров, выполненных из предварительно напряженных материалов. В [6] изучены свойства поверхностных волн, показано существенное влияние геометрических параметров стенки цилиндра на его акустические свойства, в [7–9] — свойства гармонических поверхностных волн в заполненном жидкостью упругом цилиндре. В [10–15] рассмотрены радиальные колебания цилиндра с жидкостью, находящейся под давлением.

Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, доц., ведущий научный сотрудник отдела механики авиационных и нанотехнологий Южного научного центра РАН; ведущий научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: tbelen415@mail.ru

Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, заместитель Председателя Южного научного центра РАН; заведующий лабораторией Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: kalin@ssc-ras.ru

Лыжов Вячеслав Александрович, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник отдела механики авиационных и нанотехнологий Южного научного центра РАН; младший научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: maggod-rnd@yandex.ru

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-08-96528-р-юг, 15-08-0674, 14-08-01213).

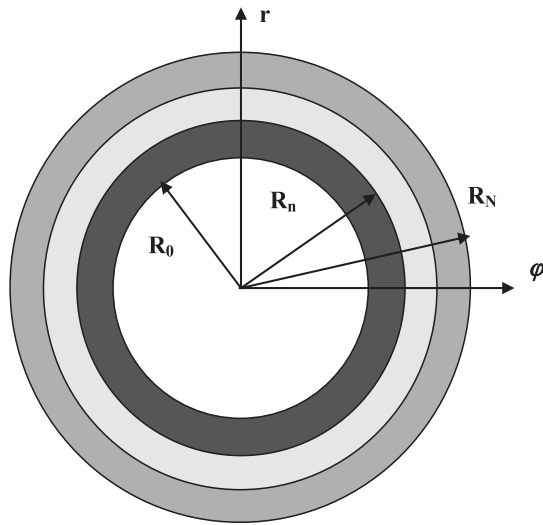


Рис. 1. Геометрия задачи

Стенка цилиндра полагалась выполненной из преднапряженного однородного упругого материала [11, 12] либо из функционально градиентного материала [10, 13–15]. Показано, что наличие жидкости приводит к существенному усложнению структуры волнового поля. В то же время основную роль в распространении волн играют упругие свойства системы бесконечный цилиндр–жидкость. В [15, 16] построено решение смешанной задачи о радиальных [11–15] и торсионных [15, 16] гармонических колебаниях банджа на поверхности цилиндра с жидкостью. Изучено влияние параметров задачи на волновое поле в области контакта и на динамическую жесткость цилиндра. В [17] исследованы особенности дисперсионных свойств толстостенного полого цилиндра с покрытием, состоящим из пакета вложенных однородных цилиндров, при возбуждении торсионных гармонических колебаний. В работе предложен матричный метод построения функции Грина полого цилиндра со многослойной стенкой.

В настоящей работе метод, предложенный в [17], обобщен на случай присутствия в стенке цилиндра не только однородных, но и функционально градиентных составляющих. В основе лежит использование аппарата операционного исчисления в сочетании с аналитическим (для однородных) или численным (для неоднородных составляющих покрытий) построением решения с последующим матричным подходом при удовлетворении граничных условий. Предлагаемый обобщенный метод построения функции Грина позволяет адекватно учитывать как различия в изме-

нении физико-механических параметров составляющих, так и возможные различия в условиях на границе их раздела. На примере задачи о торсионных колебаниях банджа на поверхности двух- и трехслойного полого цилиндра проведен детальный анализ влияния соотношения физико-механических параметров, характера, области локализации и интенсивности изменения свойств стенки полого цилиндра на его динамическую жесткость.

### 1. Краевая задача о колебаниях толстостенного полого цилиндра с многослойной стенкой

Рассматривается задача о колебаниях бесконечного неоднородного толстостенного полого цилиндра, стенка которого представляет собой пакет  $N$  вложенных друг в друга и сцепленных между собой круговых бесконечных однородных или функционально градиентных цилиндров (рис. 1), под действием нагрузки  $\mathbf{q}(R_N, \phi, z, t)$ , распределенной в области  $z_1 \leq z \leq z_2$  на его поверхности. Предполагается, что механические параметры составляющих стенку трубопровода материалов

$$\begin{aligned} \rho_n(r) &= \rho_n(r_n), & \lambda_n(r) &= \lambda_n(r_n), \\ \mu_n(r) &= \mu_n(r_n), & R_{n-1} &\leq r_n \leq R_n \\ & & (n &= 1, \dots, N) \end{aligned}$$

являются либо однородными

$$\rho_n(r_n) = \rho_n, \quad \lambda_n(r_n) = \lambda_n, \quad \mu_n(r_n) = \mu_n,$$

либо функционально градиентными

$$\rho_n(r_n) = f_\rho^{(n)}(r_n), \quad \lambda_n(r_n) = f_\lambda^{(n)}(r_n),$$

$$\mu_n(r_n) = f_\mu^{(n)}(r_n).$$

Полагаем, что колебания вызваны действием гармонической нагрузки, режим колебаний — установившимся.

При исследованиях колебаний неоднородного трубопровода со слоистой (многослойной) стенкой традиционно используют безразмерные параметры: линейные величины относят к характерному линейному размеру  $l_0$  (например, толщине одного из слоев  $l_0 = h_n = R_n - R_{n-1}$  стенки цилиндра, толщине стенки цилиндра  $l_0 = h_N = R_N - R_0$ , или полуширине бандажа  $l_0 = 0,5|z_2 - z_1|$ ), напряжения и усилия — к значению модуля сдвига «опорного» материала слоя  $\mu_0$  ( $l^* = ll_0^{-1}$ ,  $\lambda^* = \lambda\mu_0^{-1}$ ,  $\mu^* = \mu\mu_0^{-1}$ ), плотность — к значению плотности «опорного» материала слоя  $\rho_0$  ( $\rho^* = \rho\rho_0^{-1}$ ). В качестве частоты использован безразмерный параметр  $\kappa_2 = \omega h V_S^{-1}$ , где  $V_S = \sqrt{\mu_0 \rho_0^{-1}}$  — скорость сдвиговой волны в однородной среде с параметрами  $\lambda_0, \mu_0, \rho_0$ . Далее звездочки опущены.

При сделанных предположениях краевая задача описывается системой уравнений

$$\nabla \Theta^{(n)} = \rho_n \frac{\partial^2 \mathbf{u}^{(n)}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

и граничными условиями

$$r = R_N : \quad \mathbf{n}_r^{(N)} \Theta^{(N)} = \begin{cases} \mathbf{q}(r, \phi, z) e^{-i\omega t}, & z_1 \leq z \leq z_2; \\ 0, & z < z_1, z > z_2, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$r_n = R_n, |z| \leq \infty : \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_r^{(n)} \Theta^{(n)} &= \mathbf{n}_r^{(n+1)} \Theta^{(n+1)}, \\ \mathbf{u}^{(n)} &= \mathbf{u}^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$n = 1, \dots, N-1,$$

$$r = R_0, |z| \leq \infty : \quad \mathbf{n}_r^{(1)} \Theta^{(1)} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\Theta^{(n)} = \{\theta_{rr}^{(n)}, \theta_{rz}^{(n)}, \theta_{r\phi}^{(n)}\}$  — тензор, определяющий напряженное состояние среды  $n$ -го слоя стенки трубопровода,  $\theta_{rr}^{(n)}, \theta_{rz}^{(n)}, \theta_{r\phi}^{(n)}$  — его компоненты в цилиндрической системе координат,  $\mathbf{u}^{(n)}(r, \phi, z, t) = \{u_r^{(n)}, u_\phi^{(n)}, u_z^{(n)}\}$  — вектор смещения в упругой среде,  $\rho_n$  и  $\mathbf{n}_r^{(n)}$  — плотность материала  $n$ -го слоя стенки трубопровода и нормаль к его поверхности,  $\omega$  — частота колебаний.

Используя представление компонент  $\Theta^{(n)}$  [15–17] уравнения движения (1.1) для *однородных цилиндров, составляющих стенку*, имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{L}_r^{(n)} [u_r^{(n)}] + \\ & + \left[ a_1^{(n)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} - a_3^{(n)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] u_\phi^{(n)} + \\ & + a_1^{(n)} \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial r \partial z} = 0, \\ & \frac{a_3^{(n)}}{r^2} \frac{\partial u_r^{(n)}}{\partial \phi} + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2 u_r^{(n)}}{\partial r \partial \phi} + \\ & + \mathbf{L}_\phi^{(n)} [u_\phi^{(n)}] + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial \phi \partial z} = 0, \\ & a_1^{(n)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \right] u_r^{(n)} + \\ & + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2 u_\phi^{(n)}}{\partial z \partial \phi} + \mathbf{L}_z^{(n)} [u_z^{(n)}] = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.5)$$

Приняты обозначения

$$a_1^{(n)} = (\lambda_n + \mu_n), \quad a_2^{(n)} = (\lambda_n + 2\mu_n), \\ a_3^{(n)} = (\lambda_n + 3\mu_n) :$$

Уравнения движения *функционально градиентных цилиндров, составляющих стенку*, имеют вид

$$\left\{ \begin{aligned} & \mathbf{L}_r^{\mathbf{r}(n)} [u_r^{(n)}] + \\ & + \left[ \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} + \left( \frac{\lambda_n'}{r} - \frac{a_3^{(n)}}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] u_\phi^{(n)} + \\ & + a_1^{(n)} \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial r \partial z} + \lambda_n' \frac{\partial u_z^{(n)}}{\partial z} = 0, \\ & \left[ \left( \frac{a_3^{(n)}}{r^2} + \frac{\mu_n'}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} \right] u_r^{(n)} + \\ & + \mathbf{L}_\phi^{\mathbf{r}(n)} [u_\phi^{(n)}] + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2 u_z^{(n)}}{\partial \phi \partial z} = 0, \\ & \left[ a_1^{(n)} \frac{\partial^2}{\partial z \partial r} + \left( \frac{a_1^{(n)}}{r} + \mu_n' \right) \frac{\partial}{\partial z} \right] u_r^{(n)} + \\ & + \frac{a_1^{(n)}}{r} \frac{\partial^2 u_\phi^{(n)}}{\partial z \partial \phi} + \mathbf{L}_z^{\mathbf{r}(n)} [u_z^{(n)}] = 0. \end{aligned} \right. \quad (1.6)$$

Здесь  $\mathbf{L}_r^{(n)}, \mathbf{L}_\phi^{(n)}, \mathbf{L}_z^{(n)}$  и  $\mathbf{L}_r^{\mathbf{r}(n)}, \mathbf{L}_\phi^{\mathbf{r}(n)}, \mathbf{L}_z^{\mathbf{r}(n)}$  — дифференциальные операторы, определенные в  $n$ -м цилиндре пакета, составляющего стенку, имеют вид

– в случае однородного  $n$ -го цилиндра:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_r^{(n)} &= a_2^{(n)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] + \\ &\quad + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_\phi^{(n)} &= a_2^{(n)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \\ &\quad + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] - \\ &\quad - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.7) \\ \mathbf{L}_z^{(n)} &= a_2^{(n)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\ &\quad + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

– в случае функционально градиентного  $n$ -го цилиндра:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_r^{r(n)} &= a_2^{(n)} \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] + a_2^{(n)'} \frac{\partial}{\partial r} + \\ &\quad + \frac{\lambda_n'}{r} + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \mathbf{L}_\phi^{r(n)} &= a_2^{(n)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \\ &\quad + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] + \\ &\quad + \mu_n' \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad (1.8) \\ \mathbf{L}_z^{r(n)} &= a_2^{(n)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \\ &\quad + \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right] + \\ &\quad + \mu_n' \frac{\partial}{\partial r} - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Граничные условия (1.2)–(1.4) принимают вид

$$\begin{cases} r = R_N : \\ \theta_{rr}^{(N)} = a_2^{(n)} \frac{\partial u_r^{(N)}}{\partial r} + \\ \quad + \lambda_n \left( \frac{u_r^{(N)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi^{(N)}}{\partial \phi} + \frac{\partial u_z^{(N)}}{\partial z} \right) = \\ \quad = q_r(r, \phi, z), \quad z_1 \leq z \leq z_2; \\ \theta_{r\phi}^{(N)} = \\ \quad = \mu_n \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(N)}}{\partial \phi} + \frac{\partial u_\phi^{(N)}}{\partial r} - \frac{u_\phi^{(N)}}{r} \right) = \\ \quad = q_\phi(r, \phi, z), \quad z_1 \leq z \leq z_2; \\ \theta_{rz}^{(N)} = \mu_n \left( \frac{\partial u_r^{(N)}}{\partial z} + \frac{\partial u_z^{(N)}}{\partial r} \right) = \\ \quad = q_z(r, \phi, z), \quad z_1 \leq z \leq z_2; \\ \theta_{rr}^{(N)} = \theta_{r\phi}^{(N)} = \theta_{rz}^{(N)} = 0, \\ \quad \quad \quad z < z_1, \quad z > z_2, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} r_n = R_n, |z| \leq \infty : \quad \theta_{rr}^{(n)} &= \theta_{rr}^{(n+1)}, \\ \theta_{r\phi}^{(n)} &= \theta_{r\phi}^{(n+1)}, \quad \theta_{rz}^{(n)} = \theta_{rz}^{(n+1)}, \\ u_r^{(n)} &= u_r^{(n+1)}, \quad u_\phi^{(n)} = u_\phi^{(n+1)}, \\ u_z^{(n)} &= u_z^{(n+1)}, \quad (1.10) \\ n &= 1, \dots, N-1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r = R_0, |z| \leq \infty : \\ \theta_{rr}^{(1)} &= \theta_{r\phi}^{(1)} = \theta_{rz}^{(1)} = 0. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Соотношения (1.5) и (1.6) представляет собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными (1.5) и переменными (1.6) коэффициентами, для решения которых используем либо традиционные численно-аналитические [12, 15, 17, 18], либо только численные методы [10, 11, 13–15].

### 1.1. Торсионные колебания трубопровода толстостенного полого цилиндра с многослойной стенкой

Рассматриваются крутильные колебания неоднородного трубопровода со стенкой из

пакета вложенных друг в друга круговых, бесконечных однородных или функционально-градиентных цилиндров. Колебания стенки трубопровода удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_r^{(n)} = u_z^{(n)} = 0, \quad u_\phi^{(n)} = u_\phi^{(n)}(r, z), \\ \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \phi} = 0, \end{aligned} \quad (1.12)$$

где  $u_\phi^{(n)}$  — тангенциальная компонента вектора перемещений в  $n$ -ом цилиндре,  $n = 1, \dots, N$ . Ненулевые компоненты тензора напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \theta_{r\phi}^{(n)} = \theta_{\phi r}^{(n)} = \mu^{(n)} \left( \frac{\partial u_\phi^{(n)}}{\partial r} - \frac{u_\phi^{(n)}}{r} \right), \\ \theta_{z\phi}^{(n)} = \theta_{\phi z}^{(n)} = \mu^{(n)} \frac{\partial u_\phi^{(n)}}{\partial z}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Уравнение движения  $n$ -го слоя запишется

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{\phi r}^{(n)}}{\partial r} + \frac{\theta_{r\phi}^{(n)} + \theta_{\phi r}^{(n)}}{r} + \frac{\partial \theta_{\phi z}^{(n)}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_\phi^{(n)}}{\partial t^2}, \quad (1.14) \\ n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Граничные условия (1.9)–(1.11) с учетом (1.12) принимают вид

$$\begin{aligned} r = \mu_N : \\ \left\{ \begin{aligned} \theta_{r\phi}^{(N)} = \mu_N \left( \frac{\partial u_\phi^{(N)}}{\partial r} - \frac{u_\phi^{(N)}}{r} \right) = \\ = q(r, z), \quad z_1 \leq z \leq z_2; \\ \theta_{r\phi}^{(N)} = 0, \quad z < z_1, z > z_2, \end{aligned} \right. \quad (1.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_n = R_n, \quad |z| \leq \infty, \quad (n = 1, \dots, N-1) : \\ \theta_{r\phi}^{(n)} = \theta_{r\phi}^{(n+1)}, \quad u_\phi^{(n)} = u_\phi^{(n+1)}, \quad (1.16) \end{aligned}$$

$$r = R_0, \quad |z| \leq \infty : \quad \theta_{r\phi}^{(1)} = 0. \quad (1.17)$$

С учетом (1.12), (1.13) система уравнений движения (1.14) неоднородного трубопровода со стенкой из пакета  $N$  однородных цилиндров представляется

$$\mathbf{L}_\phi^{\mathbf{t}(n)} \left[ u_\phi^{(n)} \right] = 0, \quad (1.18)$$

$\mathbf{L}_\phi^{\mathbf{t}(n)}$  — дифференциальные операторы вида

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\phi^{\mathbf{t}(n)} = \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] - \\ - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.19) \end{aligned}$$

В случае неоднородного цилиндра со стенкой из пакета ФГМ цилиндров (1.14) принимает вид

$$\mathbf{L}_\phi^{\mathbf{rt}(n)} \left[ u_\phi^{(n)} \right] = 0, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_\phi^{\mathbf{rt}(n)} = \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] + \\ + \mu_n' \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] - \rho_n \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (1.21) \end{aligned}$$

Системы уравнений (1.18) и (1.20) в обозначениях (1.19) и (1.21) с граничными условиями (1.15)–(1.17) представляют собой краевую задачу о крутильных колебаниях неоднородного трубопровода со стенкой из пакета однородных или неоднородных слоев.

## 2. Решение краевых задач о колебаниях толстостенного полого цилиндра с многослойной стенкой

Краевая задача (1.18)–(1.21), (1.15)–(1.17) в образах Фурье ( $\alpha$  — параметр преобразования,  $U_\phi^{(n)}$  — трансформанты Фурье функций  $u_\phi^{(n)}$ ,  $n = 1, \dots, N$ ) принимает следующий вид:

– уравнения движения однородных цилиндров

$$\mathbf{\Lambda}_\phi^{\mathbf{t}(n)} \left[ U_\phi^{(n)} \right] = 0, \quad (2.1)$$

– уравнения движения функционально-градиентных цилиндров

$$\mathbf{\Lambda}_\phi^{\mathbf{rt}(n)} \left[ U_\phi^{(n)} \right] = 0, \quad (2.2)$$

где дифференциальные операторы  $\mathbf{\Lambda}_\phi^{\mathbf{t}(n)}$  и  $\mathbf{\Lambda}_\phi^{\mathbf{rt}(n)}$  получается из оператора  $\mathbf{L}_\phi^{\mathbf{t}(n)}$  (1.19) и  $\mathbf{L}_\phi^{\mathbf{rt}(n)}$  (1.21) в результате преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_\phi^{\mathbf{t}(n)} = \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] - \\ - \mu_n \sigma_2^{(n)2}, \quad (2.3) \end{aligned}$$

$$\mathbf{A}_\phi^{\text{rt}(n)} = \mu_n \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right] + \mu_n' \left[ \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right] - \mu_n \sigma_2^{(n)2}, \quad (2.4)$$

$$\left( \sigma_2^{(n)} \right)^2 = \alpha^2 - \rho_n \omega^2 (\mu_n)^{-1}.$$

Граничные условия (1.15)–(1.17) в образах Фурье имеют вид ( $n = 1, \dots, N-1$ )

$$r = R_N : \quad \mu_n U_\phi^{(N)'} - \frac{\mu_n}{r} U_\phi^{(N)} = Q(\alpha), \quad (2.5)$$

$$r = R_n : \quad \mu_n U_\phi^{(n)'} - \frac{\mu_n}{r} U_\phi^{(n)} = \mu_{n+1} U_\phi^{(n+1)'} - \frac{\mu_{n+1}}{r} U_\phi^{(n+1)}, \quad (2.6)$$

$$U_\phi^{(n)} = U_\phi^{(n+1)},$$

$$r = R_0 : \quad \mu_1 U_\phi^{(1)'} - \frac{\mu_1}{r} U_\phi^{(1)} = 0. \quad (2.7)$$

Следуя [15, 17], выпишем решение краевой задачи (2.1)–(2.7):

– для однородных цилиндров стенки ( $n$  – номер цилиндра,  $n = 1, \dots, N$ ):

$$U_\phi^{(n)} = c_{p+1} I_1 \left( \sigma_2^{(n)} r \right) + c_{p+2} K_1 \left( \sigma_2^{(n)} r \right), \quad (2.8)$$

$$p = 2(n-1),$$

– для функционально градиентных цилиндров стенки трубопровода:

$$U_\phi^{(n)} = Y_2^{(n)} = c_{p+1} y_{12}^{(n)}(\alpha, r) + c_{p+2} y_{22}^{(n)}(\alpha, r), \quad (2.9)$$

$$p = 2(n-1).$$

Здесь  $I_1(\gamma r)$ ,  $K_1(\gamma r)$  – модифицированные функции Бесселя. Участвующие в представлении (2.9)  $y_{ij}^{(n)}(\alpha, r)$ ,  $i, j = 1, 2$  – линейно независимые решения задачи Коши с начальными условиями  $y_{ij}(\alpha, R_0) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  – символ Кронекера) для уравнения

$$\mathbf{Y}^{(n)'} = \mathbf{M}^{(n)}(\alpha, r) \mathbf{Y}^{(n)},$$

$$\mathbf{Y}^{(n)} = \begin{pmatrix} U_\phi^{(n)'} \\ U_\phi^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^{(n)} \\ Y_1^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

с матрицей  $\mathbf{M}^{(n)} = \left\| m_{ij}^{(n)} \right\|_{i,j=1}^2$ , элементы которой определяются формулами

$$\mathbf{M}^{(n)}(\alpha, r) = \begin{pmatrix} m_{11}^{(n)} & m_{12}^{(n)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

$$m_{11}^{(n)} = -\frac{1}{\mu_n} \left( \frac{\mu_n}{r} + \mu_n' \right),$$

$$m_{12}^{(n)} = \frac{1}{\mu_n r} \left( \frac{\mu_n}{r} + \mu_n' \right) + \left( \sigma_2^{(n)} \right)^2.$$

Неизвестные  $c_k$  в представлениях решения (2.8), (2.9) определяются путем удовлетворения граничных условий (2.5)–(2.7). Представим граничные условия в виде

$$\mathbf{L}_N^t \mathbf{C}_N^t = \mathbf{Q}_N^t \quad (2.12)$$

В данном случае размерность вектора неизвестных  $\mathbf{C}_N^t$  и вектора правых частей  $\mathbf{Q}_N^t$  равна  $2N$  ( $N$  – число слоев в стенке цилиндра), размерность матрицы  $\mathbf{L}_N^t = 2N \times 2N$ .

Пусть  $N = 1$ . Следуя [17], представим матрицу  $\mathbf{L}_N^t$  в виде

$$\mathbf{L}_1^t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11}^t \\ \mathbf{P}_{01}^t \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Здесь двухэлементные векторы ( $[1 \times 2]$ )  $\mathbf{A}_{NN}^t$  и  $\mathbf{P}_{01}^t$  отвечающие граничным условиям соответственно на внешней и внутренней поверхности

$$\mathbf{A}_{NN}^t = \begin{pmatrix} l_{11}^N(R_N) & l_{12}^N(R_N) \\ l_{11}^1(R_0) & l_{12}^1(R_0) \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

с элементами в случае однородного цилиндра

$$l_{11}^n(r) = \sigma_2^{(n)} I_0(r) - \frac{2}{r} I_1(r), \quad (2.15)$$

$$l_{12}^n(r) = \sigma_2^{(n)} K_0(r) + \frac{2}{r} K_1(r),$$

в случае функционально градиентного цилиндра

$$l_{11}^n(r) = \mu_n y_{11}^{(n)}(r) - \frac{\mu_n y_{12}^{(n)}(r)}{r}, \quad (2.16)$$

$$l_{12}^n(r) = \mu_n y_{21}^{(n)}(r) - \frac{\mu_n y_{22}^{(n)}(r)}{r}.$$

Пусть  $N = 2$ , тогда матрица  $\mathbf{L}_N^t$  размерности  $[4 \times 4]$  представима в виде

$$\mathbf{L}_2^t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{22}^t & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_{12}^t & -\mathbf{B}_{11}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{01}^t \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

матрицы  $\mathbf{B}_{km}^t$  и размерности  $[2 \times 2]$  отвечают условиям «стыковки», т.е. условиям на границе раздела цилиндров. Как и раньше, первый из нижних индексов соответствует номеру границы, начиная с внутренней, второй — номеру слоя (цилиндра), упругие параметры которого участвуют в граничных условиях.

Увеличение числа слоев, составляющих стенку цилиндра, увеличивает размерность  $\mathbf{L}_N^t$  за счет роста числа матриц-элементов ее составляющих, однако размерность матриц-элементов не меняется.

Так, в случае пакета из 5 слоев матрица  $\mathbf{L}_N^t$  размерности  $[10 \times 10]$  имеет ленточную структуру

$$\mathbf{L}_5^t = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{55}^t & & \vdots & & 0 \\ \mathbf{B}_{45}^t & -\mathbf{B}_{44}^t & & & \\ & \mathbf{B}_{34}^t & & & \\ & & & \vdots & -\mathbf{B}_{11}^t \\ 0 & & & & \mathbf{P}_{01}^t \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

причем число строк в представлении соответствует числу границ, число столбцов — количеству слоев в пакете.

Разрешая систему (2.12) относительно неизвестных  $c_i$ , получаем решение краевой задачи (2.1)–(2.7). В результате применения обратного преобразования Фурье решение исходной задачи (1.18)–(1.21) с граничными условиями (1.15)–(1.17) принимает вид

$$u_\phi^{(n)}(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{z_1}^{z_2} k^{(n)}(z - \xi, r, \kappa_2) q(\xi) d\xi, \quad (2.19)$$

$$k^{(n)}(s, r, \kappa_2) = \int_{\Gamma} K_{11}^{(n)}(\alpha, r, \kappa_2) e^{-i\alpha s} d\alpha.$$

Функция  $K_{11}^{(n)}(\alpha, r, \kappa_2)$  определяется следующим образом:

– для однородных цилиндров многослойной стенки

$$K_{11}^{(n)} = \Delta_0^{-1} \left[ \Delta_{1p+1} I_1(\sigma_2^{(n)} r) + \Delta_{1p+2} K_1(\sigma_2^{(n)} r) \right], \quad (2.20)$$

$$p = 2(n - 1),$$

– для функционально градиентных цилиндров многослойной стенки

$$K_{11} = \Delta_0^{-1} \left[ \Delta_{1p+1} y_{p+12}^{(n)}(\alpha, r) + \Delta_{1p+2} y_{p+22}^{(n)}(\alpha, r) \right]. \quad (2.21)$$

Здесь  $\Delta_0$  и  $\Delta_{ni}$  — определитель и алгебраическое дополнение элемента  $l_{ni}$  матрицы  $\mathbf{L}_N^t$  (2.12), (2.13), (2.17) и (2.18) в зависимости от геометрии задачи.

Представление (2.19) определяет смещение произвольной точки среды при заданной на поверхности цилиндра нагрузке. В том случае, когда в области  $z_1 \leq z \leq z_2$  известно смещение поверхности, вызванное действием бандажа, соотношение (2.19) представляет интегральное уравнение относительно неизвестной функции  $q(z)$ , определяющей распределение контактных напряжений. При решении интегрального уравнения использованы подходы, подробно описанные в [11–16, 18].

### 3. Численный анализ. Влияние неоднородности многослойной стенки трубопровода на его динамическую жесткость при торсионных колебаниях бандажа

Как уже отмечалось, решение задачи о торсионных колебаниях бандажа на поверхности цилиндра сводится к решению интегрального уравнения (2.19) относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений под бандажом. В зависимости от свойств и геометрии задачи символ ядра интегрального уравнения  $K_{11}(\alpha, R_N, \kappa_2)$  имеет вид (2.20) для однородных слоев стенки или (2.21) для функционально градиентных слоев. Анализ влияния неоднородности стенки цилиндра проводится на примере динамической жесткости цилиндра — реакция среды единичному смещению поверхности

$$Q = \int_{z_1}^{z_2} q(z) dz,$$

$q(z)$  — функция распределения контактных напряжений под бандажом является решением интегрального уравнения (2.19) с заданным на поверхности единичным смещением.

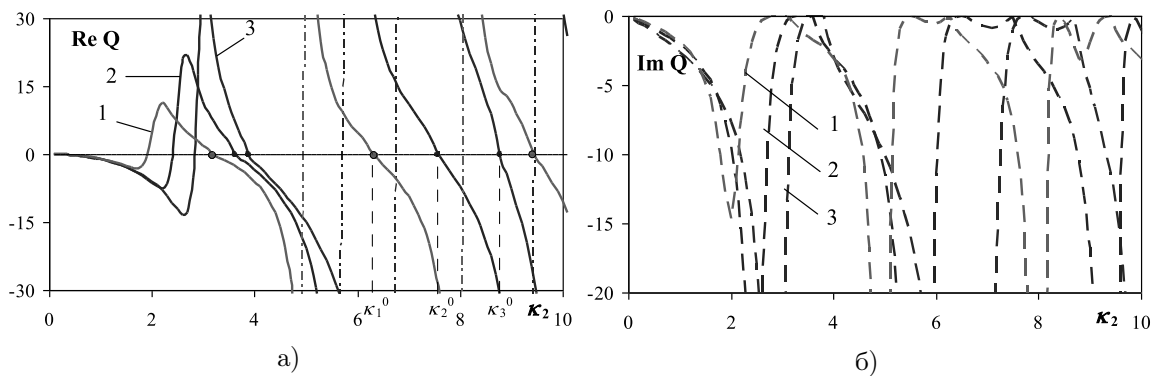


Рис. 2. Влияние жесткости покрытия  $\Delta\mu_2$  на реакцию двухслойного цилиндра при постоянной плотности  $\Delta\rho_2 = 1$

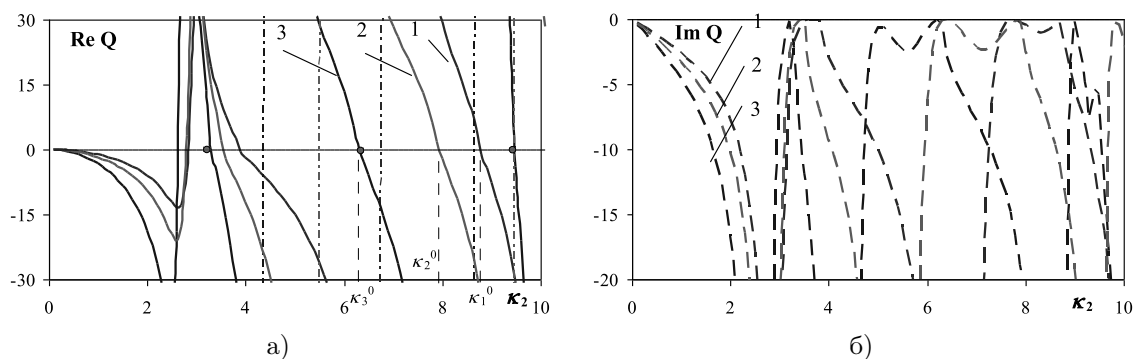


Рис. 3. Влияние интенсивности изменения плотности  $\Delta\rho_2$  внешнего слоя на динамическую жесткость цилиндра,  $\Delta\mu_2 = 4$

### 3.1. Двухслойная стенка полого цилиндра

На рис. 2–3 приведены графики динамической жесткости двухслойного цилиндра с высокоскоростным (жестким) внешним слоем (покрытием). На рис. 2 показано влияние скоростных характеристик  $\Delta\mu_2 = \mu_2/\mu_1$  покрытия на динамическую жесткость (далее  $Re Q$  представлена на рисунках а,  $Im Q$  — на рисунках б) трубопровода, плотность стенки трубопровода постоянна  $\Delta\rho_2 = \rho_2/\rho_1 = 1$ . Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые  $\Delta\mu_2 = 1, 2, 4$  соответственно.

Из рис. 2 видно, что увеличение жесткости внешнего слоя при других равных параметрах приводит к увеличению значения резонансных частот относительно однородного случая, причем с ростом частоты влияние растет.

На рис. 3 показано влияние интенсивности изменения плотности высокоскоростного (жесткого, армирующего) покрытия на реакцию трубопровода. Отношение модулей упругости фиксировано —  $\Delta\mu_2 = 4$ . Цифрами 1, 2

и 3 отмечены случаи  $\Delta\rho_2 = 1, 2$  и 4 соответственно.

Анализ рис. 3а, 3б показал, что увеличение значения  $\Delta\rho_2$  плотности покрытия приводит к уменьшению значения резонансных частот.

На рис. 4–5 приведены графики динамической жесткости двухслойного цилиндра с низкоскоростным (мягким) покрытием. На рис. 4 показано влияние скорости изменения  $\Delta\mu_2$  (податливости покрытия) на динамическую жесткость трубопровода при постоянной плотности стенки  $\Delta\rho_2 = 1$ . Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые, отвечающие случаям  $\Delta\mu_2 = 1, 2/3, 1/3$ , соответственно. На рис. 5 показано влияние интенсивности изменения плотности  $\Delta\rho_2$  покрытия на динамическую жесткость трубопровода при фиксированном отношении модулей упругости  $\Delta\mu_2 = 1/3$ . Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые соответствующие  $\Delta\rho_2 = 1, 2/3$  и  $1/3$ .

Из рис. 2–5 следует, что как при высокоскоростном, так и при низкоскоростном покрытии увеличение  $\Delta\mu_2$  при постоянной



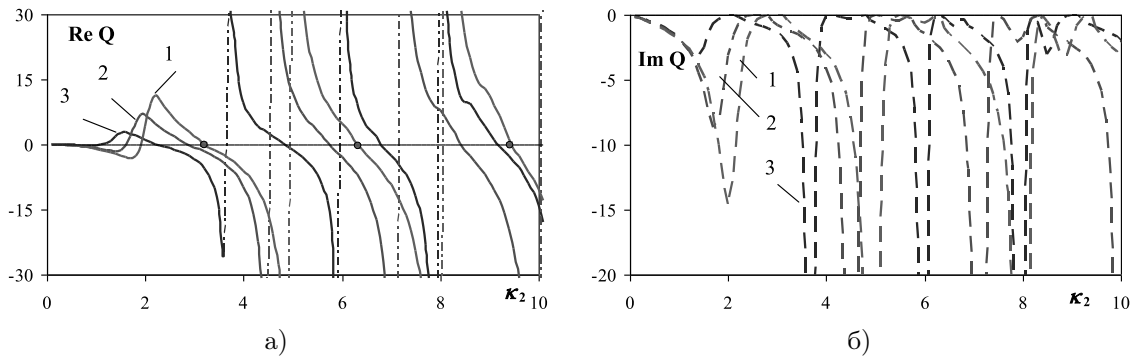


Рис. 4. Влияние податливости  $\Delta\mu_2$  покрытия на динамическую жесткость цилиндра при постоянной плотности стенки  $\Delta\rho_2 = 1$

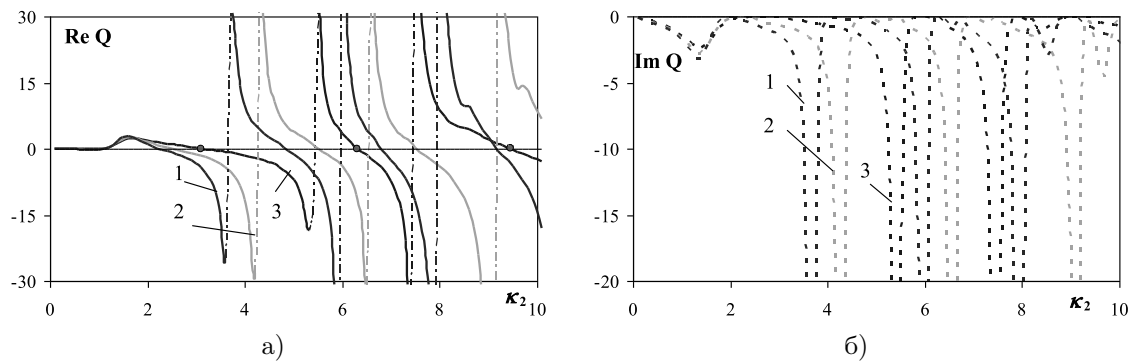


Рис. 5. Влияние интенсивности изменения плотности  $\Delta\rho_2$  покрытия на динамическую жесткость цилиндра,  $\Delta\mu_2 = 1/3$

плотности стенки  $\Delta\rho_2 = 1$  приводит к росту значения резонансной частоты (рис. 2а, 4а). В свою очередь,  $\Delta\rho_2$  при низкоскоростном покрытии приводит к уменьшению значения резонансной частоты (рис. 5а). Кроме того, излучение энергии из зоны контакта, равно как и значение частоты максимального излучения, увеличиваются с ростом  $\Delta\mu_2$ , причем для высокоскоростного покрытия излучение велико даже в низкочастотном диапазоне (рис. 2б, 3б). При низкоскоростном покрытии излучение в низкочастотном диапазоне невелико, влияние  $\Delta\rho_2$  незначительно (рис. 4б, 5б).

На рис. 6 представлены графики динамической жесткости цилиндра с «акустически» однородным покрытием. Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые соответствующие покрытиям с  $\Delta\rho_2 = \Delta\mu_2 = 4, 1$  и  $1/3$ .

Из рис. 6а, 6б видно, что увеличение  $\Delta\mu_2$  «акустически» однородного покрытия приводит к росту амплитуды динамической жесткости и усилению резонансного эффекта (кривая 1), однако частоты пересечения кривой  $ReQ$  с осью не зависят от типа покрытия.

### 3.2. Трехслойная стенка полого цилиндра

На рис. 7–11 показано влияние типа включения (внутренний слой), его скоростных характеристик, интенсивности изменения плотности на динамическую жесткость трехслойного цилиндра в предположении равенства параметров крайних слоев стенки  $\Delta\rho_3 = \Delta\mu_3 = 1$ . На рис. 7 показано влияние интенсивности изменения  $\Delta\mu_2$  включения на динамическую жесткость цилиндра при постоянной плотности стенки  $\Delta\rho_2 = 1$  цилиндра. Цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые соответствующие  $\Delta\mu_2 = 1, 2$  и 4.

Сравнение рис. 2а, 2б и 7а, 7б показывает, что в отличие от двухслойного в случае цилиндра с трехслойной стенкой, хотя и сохраняются общие закономерности — увеличение жесткости включения приводит к увеличению значений резонансных частот, однако изменения носят более сложный и менее выраженный характер.

На рис. 8 показано влияние интенсивности изменения плотности  $\Delta\rho_2$  включения на реакцию трехслойного трубопровода с высокоскоростным (жестким) включением  $\Delta\mu_2 = 4$ .

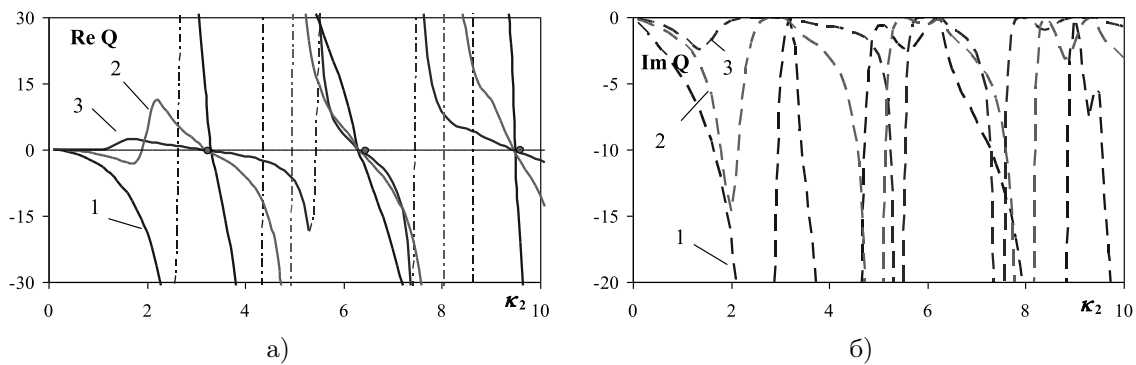
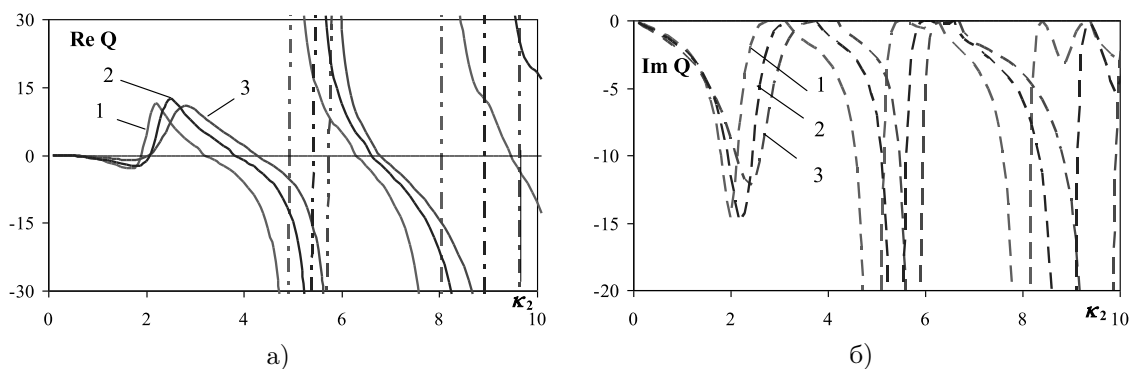


Рис. 6. Влияние типа «акустически» однородного покрытия на динамическую жесткость цилиндра

Рис. 7. Влияние  $\Delta\mu_2$  включения на динамическую жесткость трехслойного цилиндра при постоянной плотности стенки  $\Delta\rho_3 = \Delta\rho_2 = 1$  и равных параметрах крайних слоев  $\Delta\mu_3 = 1$ 

Как и ранее, цифрами 1, 2 и 3 отмечены кривые отвечающие изменениям  $\Delta\rho_2 = 1, 2$  и 4.

Сравнение рис. 3а, 3б и 8а, 8б показывает, что, как и в предыдущем случае, при сохранении общих закономерностей поведение реакции в двух- и трехслойном цилиндре различны. Следует отметить, что основные изменения в поведении реакции касаются частотного диапазона  $1 < \kappa_2 < 4,3$ , до этого диапазона влияние изменения  $\Delta\rho_2$  не сказывается, выше диапазона — общие закономерности сохраняются. Увеличение  $\Delta\rho_2$  при постоянном модуле сдвига приводит к уменьшению скорости сдвиговой волны во внутреннем слое (включении) — этим объясняется, с одной стороны, сохранение общей закономерности, связанной с уменьшением значения резонансных частот, с другой стороны расположение включения внутри стенки объясняет более сложное поведение реакции в среднем частотном диапазоне. Следует особо отметить, что при наличии жесткого (высокоскоростного) включения первая резонансная частота сдвигается в сторону увеличения, причем изменение

$\Delta\rho_2$  незначительно сказывается на ее значении. Излучение из зоны контакта в частотном диапазоне до первой резонансной частоты существует, но значительно меньше, нежели в двухслойном трубопроводе, на частоту максимального выброса изменение  $\Delta\rho_2$  влияет в большей степени в случае трехслойного цилиндра.

На рис. 9, 10 приведены графики динамической жесткости трехслойного цилиндра с мягким (низкоскоростным) включением. На рис. 9 показано влияние изменения податливости  $\Delta\mu_2$  включения на динамическую жесткость трубопровода при постоянной плотности стенки. Кривым, отмеченным цифрами 1, 2 и 3, соответствуют изменения  $\Delta\mu_2 = 1, 2/3$  и  $1/3$ . Влияние интенсивности изменения плотности включения  $\Delta\rho_2$  на реакцию трехслойного цилиндра с мягким (низкоскоростным)  $\Delta\mu_2 = 1/3$  включением показано на рис. 10. Как и ранее, кривые, отмеченные цифрами 1, 2, 3, соответствуют изменениям  $\Delta\rho_2 = 1, 2/3, 1/3$ .

Из рис. 9–10 видно, что наличие низкоскоростного (мягкого) включения сдвигает

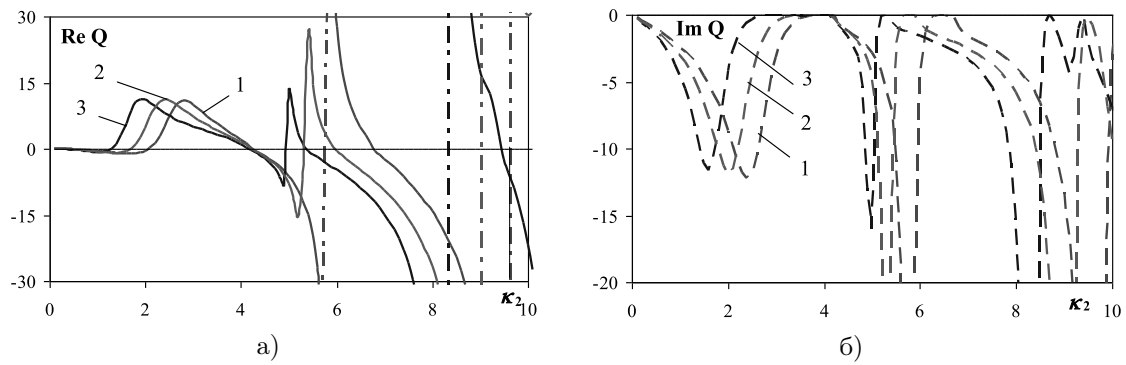


Рис. 8. Влияние  $\Delta\rho_2$  включения на динамическую жесткость трехслойного цилиндра с жестким включением  $\Delta\mu_2 = 4$

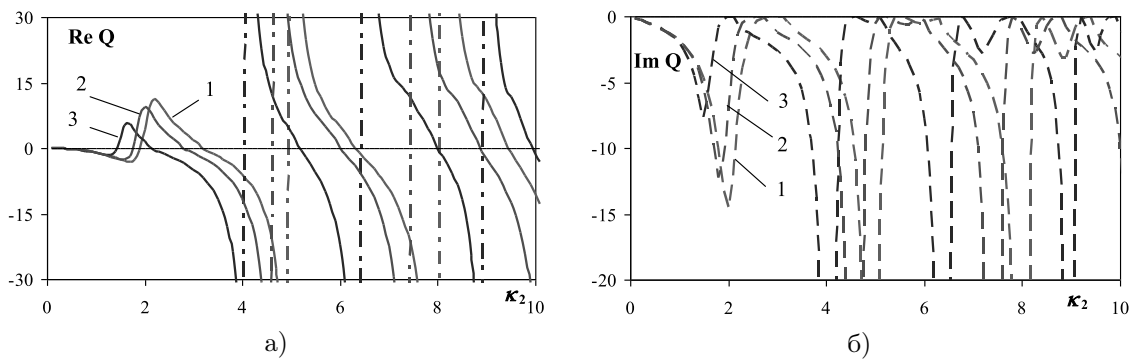


Рис. 9. Влияние  $\Delta\mu_2$  включения на динамическую жесткость трехслойного цилиндра при постоянной плотности стенки  $\Delta\rho_2 = 1$

значение резонансных частот в более низкую область, уменьшаются излучение из зоны контакта и значение частоты максимального выброса. Изменение плотности  $\Delta\rho_2$  мало сказывается на значении первой резонансной частоты, однако на более высоких частотах увеличение  $\Delta\rho_2$  по-прежнему приводит к уменьшению значений резонансных частот.

На рис. 11а, 11б приведены графики динамической жесткости «акустически» однородного трехслойного цилиндра с мягким  $\Delta\rho_2 = \Delta\mu_2 = 1/3$  (кривые 1), однородным  $\Delta\rho_2 = \Delta\mu_2 = 1$  (кривые 2) и жестким  $\Delta\rho_2 = \Delta\mu_2 = 4$  (кривые 3) включением.

Влияние типа включения на динамическую жесткость акустически однородного цилиндра частотно зависимо. Из сравнения рис. 6а, 6б и 11а, 11б видно, что влияние типа включения на реакцию акустически однородной стенки цилиндра в низко- и среднечастотном диапазоне различны. Наличие мягкого (демпфирующего) включения характерно «растягиванием» первых двух резонансных частот в разные стороны, увеличивая тем самым «спокойный» диапазон рабочих

частот с  $3 < \kappa_2 < 5,5$  в однородном цилиндре до  $2,1 < \kappa_2 < 5,6$  (рис. 11б). Значения частот пересечения  $ReQ$  с осью в случае с мягким включением также расходятся (рис. 11а). Совершенно иное поведение реакции характерно для акустически однородного цилиндра с жестким включением: существует частотный диапазон  $\kappa_2 \notin [3, 4,1]$ , в котором  $|Im Q| < 0,1$ , тем самым среднечастотный «спокойный» диапазон смещается в область более высоких частот  $5,3 < \kappa_2 < 8,7$ .

Таким образом, целенаправленно подбирая материал и структуру стенки неоднородного полого цилиндра можно повысить его эксплуатационную безопасность освобождая диапазон рабочих частот от возможных резонансов, сдвигая их в сторону более низких или высоких частот.

### Заключение

В работе обобщен предложенный в [17] метод построения функции Грина полого толстостенного бесконечного кругового цилиндра с многослойной стенкой, совершающего гармонические торсионные колебания, на слу-

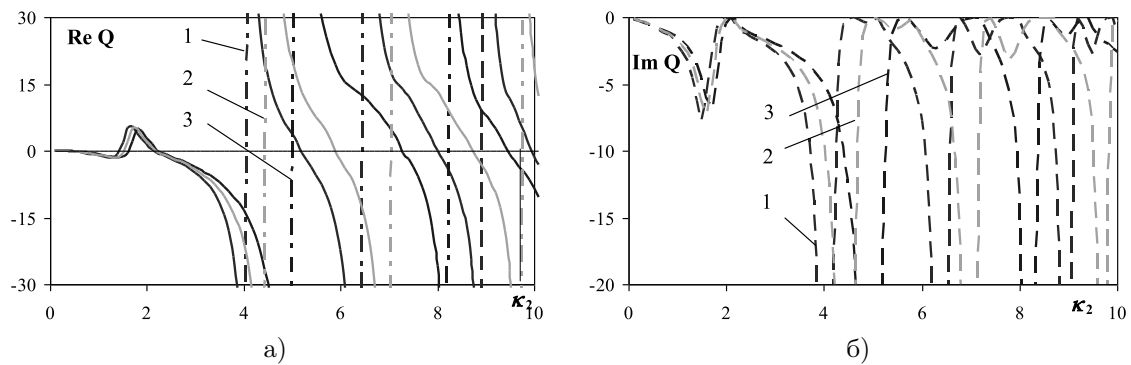


Рис. 10. Влияние  $\Delta\rho_2$  на динамическую жесткость трехслойного цилиндра с низкоскоростным  $\Delta\mu_2 = 1/3$  включением

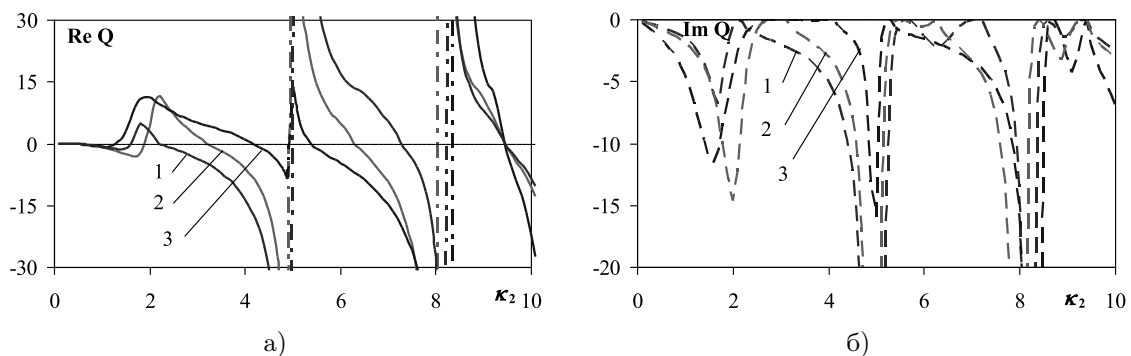


Рис. 11. Влияние типа включения на динамическую жесткость трехслойного акустически однородного  $\Delta\rho_2 = \Delta\mu_2$  цилиндра

чай функционально градиентных составляющих. Предполагается, что стенка моделируется пакетом вложенных как однородных, так и функционально градиентных цилиндров. Такой подход позволяет адекватно учитывать как различия в изменении физико-механических параметров составляющих, так и возможные различия в условиях на границе их раздела. На основе решения смешанных задач о гармонических торсионных колебаниях банджа на поверхности двух- и трехслойного бесконечного кругового цилиндра детально исследовано влияние характера, области локализации и интенсивности изменения свойств стенки полого цилиндра на его динамическую жесткость. Установлены закономерности, показано, как за счет изменения структуры и свойств стенки трубопровода можно улучшить его технико-эксплуатационные и прочностные качества.

### Литература

1. Kalinchuk V.V., Poliakova I.B. On the excitation of a prestressed cylinder // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1981. Vol. 45. Iss. 2. P. 282–285.
2. Akbarov S.D., Guz A.N. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders // International Journal of Engineering Science. 2004. Vol. 42. P. 769–791.
3. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite prestrained compound circular cylinder made from compressible materials // CMES: Computer Modeling in Engineering and Science. 2009. Vol. 39. No. 2. P. 155–177.
4. Ozturk A., Akbarov S.D. Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder // Mechanics of Composite Materials. 2008. Vol. 44. No. 1. P. 77–86.
5. Ozturk A., Akbarov S.D. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder // Journal of Applied Mathematics and Mechanics/ Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2009. Vol. 89. No. 9. P. 754–766.
6. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства поверхностных волн в упругом полом цилиндре // Акустичний вісник. 2004. Т. 7. № 3. С. 39–48.
7. Гринченко В.Т., Комиссарова Г.Л. Свойства

- нормальных волн в упруго-жидкостных цилиндрических волноводах // Акустичний вісник. 2000. Т. 3. № 3. С. 44–55.
8. Комиссарова Г.Л. Распространение нормальных волн в заполненных жидкостью тонкостенных цилиндрах // Прикладная механика. 2002. Т. 38. № 1. С. 124–134.
  9. Комиссарова Г.Л. Свойства поверхностных волн в заполненном жидкостью упругом цилиндре // Акустический журнал. 2009. Т. 55. № 3. С. 315–325.
  10. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Лыжов В.А. К проблеме моделирования динамических процессов в нефтегазотрубопроводах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 4. С. 5–13.
  11. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Об одном подходе к исследованию динамики преднапряженного цилиндра, заполненного жидкостью // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2003. (Спецвыпуск). С. 227–230.
  12. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамическая контактная задача для заполненного несжимаемой жидкостью бесконечного цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 33–38.
  13. Белянкова Т.И., Анджигович И.Е., Калинин В.В. О динамической жесткости неоднородного, заполненного идеальной жидкостью цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 16–23.
  14. Белянкова Т.И., Калинин В.В. Динамическая контактная задача для заполненной жидкостью преднапряженной цилиндрической трубы // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. № 2. С. 289–302.
  15. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит. 2009. 312 с.
  16. Белянкова Т.И., Каламбет В.Б., Калинин В.В. Торсионные колебания преднапряженного цилиндра // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 3. С. 9–14.
  17. Белянкова Т.И., Богомолов А.С., Калинин В.В., Лыжов В.А. Особенности волнового поля на поверхности полой цилиндрической трубы с покрытием // Вестник Южного научного центра РАН. 2015. Т. 11. № 1. С. 16–23.
  18. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука. 1984. 256 с.
  19. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in pre-stressed compound circular cylinders. *International Journal of Engineering Science*, 2004, vol. 42. pp. 769–791. doi:10.1016/0021-8928(81)90049-6
  20. Akbarov S.D., Guliev M.S. Axisymmetric longitudinal wave propagation in a finite pre-strained compound circular cylinder made from compressible materials. *CMES: Computer Modeling in Engineering and Science*, 2009, vol. 39. no. 2. pp. 155–177.
  21. Ozturk A., Akbarov S.D. Propagation of torsional waves in a pre-stretched compound circular cylinder. *Mechanics of Composite Materials*, 2008, vol. 44. no. 1. pp. 77–86.
  22. Ozturk A., Akbarov S.D. Torsional wave dispersion relations in a pre-stressed bi-material compounded cylinder. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics/ Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 2009, vol. 89. no. 9. pp. 754–766.
  23. Grinchenko V.T., Komissarova G.L. Svoystva poverkhnostnykh voln v uprugom polom tsilindre [The properties of surface waves in an elastic hollow cylinder]. *Akustichniy visnik [Acoustic Bulletin]*, 2004, vol. 7, no. 3, pp. 39–48. (In Russian)
  24. Grinchenko V.T., Komissarova G.L. Svoystva normal'nykh voln v uprugozhidkostnykh tsilindricheskikh volnovodakh [Properties of normal waves in an elastic-liquid cylindrical waveguides]. *Akustichniy visnik [Acoustic Bulletin]*, 2000, vol. 3, no. 3, pp. 44–55. (In Russian)
  25. Komissarova G.L. Propagation of normal waves through a fluid contained in a thin-walled cylinder. *International Applied Mechanics*, 2002, vol. 38, no. 1, pp. 103–112.
  26. Komissarova G.L. Properties of surface waves in an elastic cylinder filled with a liquid. *Acoustical Physics*, 2009, vol. 55, no. 3, pp. 319–328.
  27. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I., Lyzhov V.A. K probleme modelirovaniya dinamicheskikh protsessov v neftegazotruboprovodakh [On the problem of modeling the dynamic processes in the oil and gas pipelines]. *Ekologicheskiiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2005, no. 4, pp. 5–13. (In Russian)
  28. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. Ob odnom podkhode k issledovaniyu dinamiki prednapryazhennogo tsilindra, zapolnennogo zhidkost'yu [An approach to the study of the dynamics for prestressed cylinder filled with liquid]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennyye nauki*. [Izvestiya Vuzov. The North Caucasus region. Natural science], 2003, Special Issue, pp. 227–230. (In Russian)
  29. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. Dinamicheskaya kontaktnaya zadacha dlya zapolnennogo

## References

1. Kalinchuk V.V., Poliakova I.B. On the excitation of a prestressed cylinder. *Journal of Applied*

- neszhimayemoy zhidkost'yu beskonechnogo tsilindra [Dynamic contact problem for an infinite cylinder filled with incompressible fluid]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2006, no. 1, pp. 33–38. (In Russian)
13. Belyankova T.I., Andzhikovich I.E., Kalinchuk V.V. O dinamicheskoy zhestkosti neodnorodnogo, zapolnennogo ideal'noy zhidkost'yu tsilindra [About dynamic rigidity of inhomogeneous cylinder filled with an ideal fluid]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2007, no. 1, pp. 16–23. (In Russian)
  14. Belyankova T.I., Kalinchuk V.V. The dynamic contact problem for a prestressed cylindrical tube filled with a fluid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, no. 2, pp. 209–219. doi:10.1016/j.jappmathmech.2009.04.011
  15. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred.* [Dynamics of the inhomogeneous media surface]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2009, 312 p. (In Russian)
  16. Belyankova T.I., Kalambet V.B., Kalinchuk V.V. Torsionnyye kolebaniya prednapryazhennogo tsilindra [Torsional oscillations of prestressed cylinder]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva*. [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2009, no. 3, pp. 9–14. (In Russian)
  17. Belyankova T.I., Bogomolov A.S., Kalinchuk V.V., Lyzhov V.A. Osobennosti volnovogo polya na poverkhnosti poloy tsilindricheskoy trubyy s pokrytiyem [Specific features of wave field on the surface of a hollow cylindrical tube with a coating]. *Vestnik Yuzhnogo nauchnogo tsentra [Vestnik SSC RAS]*, 2015, vol. 11, no. 1, pp. 16–23. (In Russian)
  18. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachah teorii uprugosti.* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 256 p. (In Russian)

---

Статья поступила 19 декабря 2015 г.

© Белянкова Т. И., Калинин В. В., Лыжов В. А., 2015