УДК 624.131

К ЗАДАЧЕ О ВЗРЫВЕ ПЛОСКОГО ЗАРЯДА В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

Камалян С. Р., Камалян Р. З.

TOWARDS TO TASK ABOUT FLAT CHARGE EXPLOSION IN DOUBLE-LAYER ENVIRONMENT

Kamalyan S. R.*, Kamalyan R. Z.**

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Academy of marketing and socially-information technologies, Krasnodar, 350010, Russia
e-mail: kasarub@gmail.com

Abstract. There is considered the problem of the explosion of a flat charge in two-layer medium, while the plane of the charge is close to the environment's contact in a much more rigid half-space. Considered only the time interval in which there is a medium wave Riemann's load. An exact solution of a quasilinear wave equation with zero initial and inhomogeneous boundary conditions is obtained by the method of characteristics. The problem is reduced to a nonlinear integral-differential equation for the pressure acting on the half-contact. In general, non-linear models of physical environments found Lagrange coordinate place of origin of the shock wave from a simple load. Under the assumption that the behavior of the medium is described by the Prandtl model with rigid load, the contribution of wave loading and unloading in the value of the half-space contact's displacement. If the numerical values of the parameters characteristic of the conditions of underground mining, the contribution of the wave load is approximately 6 %, which makes it quite acceptable accuracy to solve more simple problem of the unloading wave impact. With the removal of the charge from the contact plane of the half-wave contribution to the load begins to increase. The proposed solution of a quasilinear wave equation different physical clarity, allowing, for example, is easy to solve the problem of wave loads in a heterogeneous environment of hardening.

Keywords: load wave, massif, shock, displacement, half-space

Задаче распространения пластических деформаций в полубесконечном упругопластическом стержне, вызванных приложенной к концу стержня динамической нагрузкой в различных постановках, посвящено достаточно много исследований [1]. В некотором смысле, процессы аналогичные удару по концу стержня, имеют место при взрывной отбойке горного массива на так называемую зажимающую среду (ЗС) [2].

Взрывная отбойка горного массива в ЗС сопровождается их динамическим взаимодействием, в результате которого массив разрушается, а зажимающая среда уплотняется. В [3] был рассмотрен удар жесткого слоя по полупространству жесткопластической упрочняющейся среды. Если роль жесткого слоя играет взорванный массив, то это означает, что в [3] пренебрегали взаимодействием массива со средой в тот период, когда в ней существовала волна нагрузки. В отличии от [3], будем рассматривать процесс разгона массива и образование в уплотняющейся среде волны нагрузки, для чего модель массива и процесса его метаниявозьмем из [3]. Фактически имеем задачу о взрыве плоского заряда в двухслойной среде, когда плоскость заряда находится вблизи контакта полупространств в массиве (массив — значительно более жесткое полупространство).

Согласно принятой модели [3], с одной стороны на взорванный слой массива действует давление продуктов детонации

$$P = P_0(1 + ay/S)^{-\gamma}, \qquad (1)$$

Камалян Самвел Рубенович, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой математики и прикладной информатики Краснодарского филиала Российского государственного торгово-экономического университета, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: karuzav@mail.ru

Камалян Рубен Завенович, д-р техн. наук, профессор, зав. кафедрой общей и прикладной математики Академии маркетинга и социально-информационных технологий; e-mail: kasarub@gmail.com

где P_0, S — давление продуктов детонации и площадь поперечного сечения цилиндрической зарядной полости в начале метания; γ — показатель адиабаты продуктов детонации; y — перемещение метаемого массива.

С учетом (1), запишем уравнение движения слоя

$$\rho W \frac{d^2 y}{dt^2} = P_0 (1 + ay/S)^{-\gamma}, \qquad (2)$$

где ρ — плотность массива, a — расстояние между скважинами в ряду, W — толщина взорванного слоя.

Из (2) для скорости массива можно получить [3]

$$V_0 = W^{-1} \frac{2SP_0 \left[1 - (1 + yW/S)^{1-\gamma}\right]}{\rho\,(\gamma - 1)^{1/2}}. \qquad (3)$$

В (3) принято, что $a = W$.

С другой стороны на этот же слой массива действует некоторое давление среды, зависящее от времени

$$p = p\,(t)\,, \quad \frac{dp}{dt} \geqslant 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \qquad (4)$$

$$\frac{dp}{dt} < 0, \quad t > t_0.$$

Ниже будет рассмотрен только интервал времени $[0, t_0]$, в котором среда находится в состоянии нагрузки.

Пусть среда ведет себя так, что закон ее одноосного сжатия имеет вид

$$\sigma = E\psi(\varepsilon^0 + \varepsilon), \quad \frac{d^2\sigma}{d\varepsilon^2} > 0, \qquad (5)$$

$$\sigma_- = E\psi(\varepsilon^0),$$

где σ_- — начальное упрочнение среды, ε — ее одноосная деформация, E — коэффициент, имеющий размерность давления.

Из (4) и (5) следует, что в некоторый момент времени t_* в среде возникнет ударная волна нагрузки, а до тех пор в ней распространяется только римановская волна нагрузки [1].

На интервале времени $[0, t_*]$ для полупространства (5) поставим следующую задачу с неоднородным краевым и нулевыми начальными условиями для квазилинейного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \theta^2\,(\sigma)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$u\,(x{,}0) = \frac{\partial u\,(x,t)}{\partial t} = 0, \quad t < 0, \quad x \geqslant 0, \quad (6)$$

$$\sigma|_{x=0} = \begin{cases} -\,\sigma_-, & t < 0; \\ -\,p(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$$

где начало координаты Лагранжа x находится на контакте полупространств, а $\theta\,(\sigma)$ — скорость распространения слабых разрывов в функции напряжения.

Уравнение движения слоя массива (2) с учетом (4) примет вид

$$\rho W \frac{d^2 u(0,t)}{dt^2} = \\ = P_0 \left[1 + \frac{au\,(0,t)}{S}\right]^{-5/4} - p\,(t)\,. \quad (7)$$

Из (7) следует, что решение задачи (6) надо искать в перемещениях. Решим (6) методом характеристик [1, 4].

Для уравнения задачи (6) семейство положительных характеристик представляется линиями [4]

$$x = (t - \bar{t})\theta[p(\bar{t})] = (t - \bar{t})\theta(\bar{t}), \qquad (8)$$

где каждое значение параметра $\bar{t}$ определяет свою характеристику, вдоль которой остаются постоянными напряжение, деформация и массовая скорость [4], причем напряжение связано с деформацией уравнением (5), а с массовой скоростью — соотношением на характеристике

$$v = \rho_0^{-1} \int\limits_{\sigma_-}^{p(\bar{t})} \theta^{-1}(\sigma) d\sigma. \qquad (9)$$

Смещение некоторой точки x среды в момент времени t можно найти, зная аспределение деформаций в области $[x, t\theta\,(0)]$

$$u(x,t) = \int\limits_{x}^{t\theta(0)} \varepsilon(\chi) d\chi, \qquad (10)$$

или зная скорость этой точки $\upsilon_x(t)$ с момента прихода в нее фронта волны

$$u(x,t) = \int\limits_{0}^{t} \upsilon_x(\tau) d\tau. \qquad (11)$$

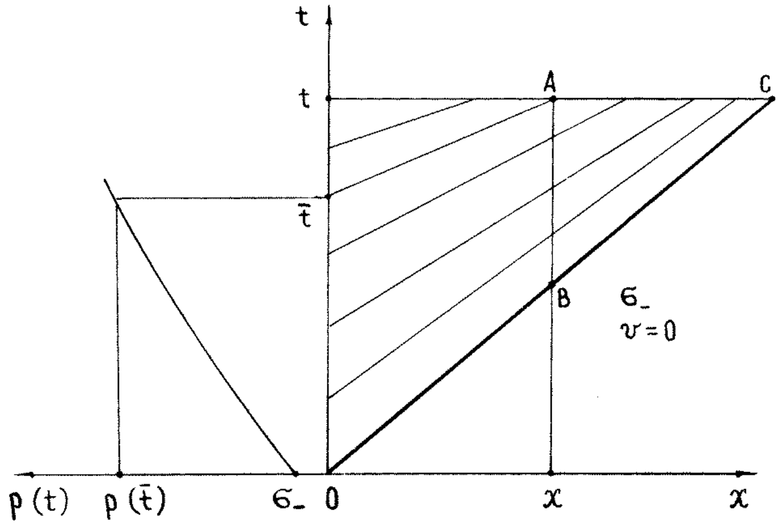

Рис. 1. Характеристики в простой волне нагрузки для случая (5)

В (10) интеграл берется вдоль отрезка АС, а в (11) — вдоль АВ характеристической плоскости (рис. 1).

Заменим в (10) переменную x по параметру $\bar{t}$. Для этого приравняем (5) к (4) и решим полученное уравнение относительно ε

$$\varepsilon = \psi^{-1}\left[\frac{p(\bar{t})}{E}\right] - \varepsilon^0, \tag{12}$$

где через ψ^{-1} обозначено обращение функции.

Подставив в (10) соотношение (12) и дифференциал

$$dx = \left[(t-\bar{t})\frac{\partial\theta}{\partial\bar{t}} - \theta\right]d\bar{t},$$

найденный из (8), получим

$$u(\bar{t},t) = \int\limits_0^{\bar{t}} \left\{\psi^{-1}\left[\frac{p(\tau)}{E}\right] - \varepsilon^0\right\}\times \\ \times\left[(t-\tau)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} - \theta\right]d\tau, \tag{13}$$

$$\theta^2 = \frac{E}{\rho_0}\frac{d\psi(\varepsilon^0+\varepsilon)}{d\varepsilon}. \tag{14}$$

Система (8), (13) является решением задачи (6) в параметрической форме.

В (11) на параметр $\bar{t}$ необходимо заменить переменную t. Решив (8) относительно t, найдем

$$dt = \left(x\frac{\partial\theta^{-1}}{\partial\bar{t}} + 1\right)d\bar{t}.$$

Используя dt и соотношение (9), получим

$$u(x,\bar{t}) = \rho_0^{-1}\int\limits_0^{\bar{t}}\left[\int\limits_{\sigma_-}^{p(\tau)}\theta^{-1}(\sigma)d\sigma\right]\times \\ \times\left(x\frac{\partial\theta^{-1}}{\partial\tau} + 1\right)d\tau. \tag{15}$$

Система (8), (15) также является решением задачи (6) в параметрической форме.

Заметим, что в [4] задача (6) сведена к функциональному уравнению для деформации.

Найдем смещение поверхности полупространства среды $x = 0$ во времени из (15). Так как $\bar{t} \equiv t$ при $x = 0$, то

$$u(0,t) = \rho_0^{-1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\sigma_-}^{p(\tau)}\theta^{-1}(\sigma)d\sigma. \tag{16}$$

Возвращаясь к уравнению (7), приходим к задаче отыскания давления $p(t)$. Подстановка (16) в (7) сводит эту задачу к решению следующего нелинейного интегродифференциального уравнения

$$\mu\theta^{-1}[p(t)]\frac{dp(t)}{dt} = $$
$$= P_0\left[1+\frac{a}{\rho_0}S\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\sigma_-}^{p(\tau)}\theta^{-1}(\sigma)d\sigma\right]^{-5/4} - p(t),$$
$$\mu = \rho w/\rho_0. \qquad (17)$$

Прежде чем приступить к построению решения уравнения (17), выясним, как скоро из простой волны нагрузки возникнет ударная волна. Для координаты Лагранжа места образования этой волны легко получить [4]

$$x_* = \left.\frac{\theta^2}{\dot\theta}\right|_{t=0},$$

в нашем случае

$$x_* = \left.\frac{\theta^2}{\dot p\, d\theta/dp}\right|_{t=0}, \qquad (18)$$

где точка означает дифференцирование по времени.

Сделав подстановку (5) и обращения (12) в (14), найдем

$$\theta^2 = (E/\rho_0)\left[\frac{d\psi^{-1}(p/E)}{dp}\right]^{-1}, \qquad (19)$$

а отсюда

$$\frac{d\theta}{dp} = -(4\rho_0)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\left[\frac{d\psi^{-1}(p/E)}{dp}\right]^{-3/2}\frac{d^2\psi^{-}(p/E)}{dp^2}. \qquad (20)$$

Производная $\dot p|_{t=0}$ определяется из уравнения (17)

$$\dot p|_{t=0} = \mu^{-1}\,\theta(p)(P_0 - p)|_{t=0}. \qquad (21)$$

Вводя (19)–(21) в (18), окончательно получим

$$x_* = -2\mu\left[\frac{d\psi^{-}(p/E)}{dp}\right]\times$$
$$\times\frac{1}{P_0 - p}\left.\frac{d^2\psi^{-1}(p/E)}{dp^2}\right|_{t=0}, \qquad (22)$$

причем $p_{|t=0} = \sigma_-$ согласно принятой модели среды и краевому условию задачи (6).

Момент времени образования ударной волны нагрузки, очевидно,

$$t_* = \frac{x_*}{\theta}p(0).$$

Положим для примера $\psi(\varepsilon^0+\varepsilon) = (\varepsilon^0+\varepsilon)^n$. Тогда формула (22) примет вид

$$x_* = \frac{2\mu}{1-n^{-1}}\left(\frac{P_0}{\sigma_-} - 1\right). \qquad (23)$$

При следующих характерных для взрывания в ЗС значениях входящих в (23) параметров $n = 2$, $\mu = 4$ м, $\sigma_- = 375$ kН/м^2, $P_0 = 385$ мН/м^2 эта формула дает $x_* = 0{,}02$ м, т.е. ударная волна нагрузки образуется практически сразу с началом движения массива. Интересно отметить, что в формулу (23) не входит коэффициент E, т.е. для координаты x_* важен только сам факт нелинейности (5).

Оценим вклад волны нагрузки в величину остаточного смещения контакта среды с массивом. Для оценки обратим внимание на то, что при $d^2\psi^{-1}/dp^2 = 0$ из (22) и при $n = 1$ — из (23) следует тот известный факт, что в физически линейной среде ударная волна образоваться не может. Тогда уравнение (17) значительно упрощается

$$\left(\frac{\mu\dot p}{\theta} + p\right)\left[1 - a\theta\varepsilon^0\frac{t}{S} + \frac{a\theta}{SE}\int\limits_0^t p(\tau)d\tau\right]^{5/4} =$$
$$= P_0. \qquad (24)$$

Численное решение (24) методом Рунге–Кутта [5] проиллюстрировано на рис. 2. В расчетах было принято $a = W = 2{,}5$ м, $\theta = 274$ м/с, $E = 150$ мН/м^2, $P_0 = 385$ мН/м^2, $\sigma_- = 0{,}1$ мН/м^2. Соответственно значениям d_s длительность процесса нагрузки составила 3 и 2,6 мс, что говорит о слабом влиянии на эту величину диаметра заряда.

Более сильная зависимость обнаруживается между d_s и максимальным значением давления $p(t)$. Можно отметить довольно плавный переход от нагрузки к разгрузке, о чем свидетельствует наличие пологих участков линий 1 и 2.

Из (16) соответственно зависимостям 1 и 2 (рис. 2) к началу разгрузки поверхность $x = 0$ смещена на 0,087 м и 0,05 м и имеет скорость $\upsilon_0 = 35{,}8$ м/с и 23,1 м/с.

Определим остаточное смещение поверхности среды при ударе по ней с такими же скоростями жестким слоем толщиной W и плотностью ρ. Будем считать, что поведение

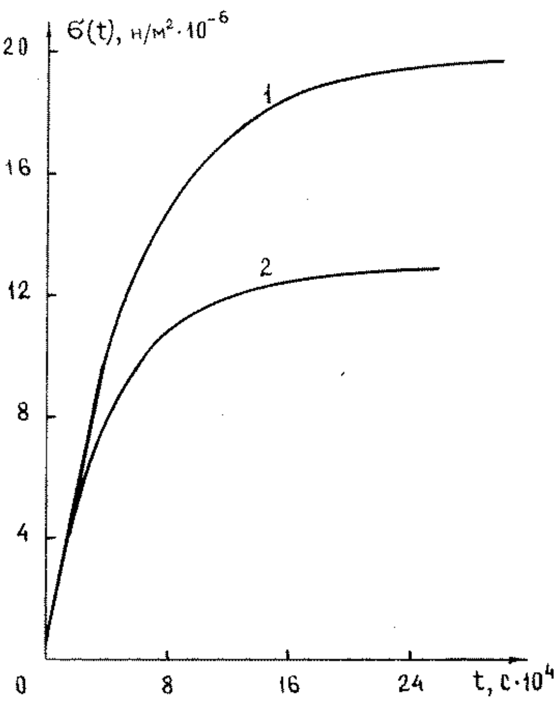

Рис. 2. Зависимость $p = p(t)$, определяемая уравнением (24) при значениях d_s — 0,105 м; 2 — 0,065 м

среды описывается моделью Прандтля с жесткой разгрузкой. Смещение поверхности такой среды при ударе по ее полупространству жестким слоем даст выражение [3]

$$U = \frac{I}{\rho_0}\theta\left[\left(1+\varepsilon_-\frac{\theta}{V_0}\right)\ln\left(1+\frac{V_0}{\theta}\varepsilon_-\right)-1\right].$$

Отсюда для тех же числовых значений $U(35{,}8) = 2{,}11$ м и $U(23{,}1) = 1{,}23$ м. Таким образом, волна нагрузки вносит весьма незначительный вклад в величину окончательного смещения поверхности полупространства. Поэтому можно ограничиться рассмотрением только волны разгрузки при ударе, а рассмотренную выше задачу использовать для определения скорости удара, так как она заметно уменьшается относительно случая свободного разгона слоя массива. Так, если в (3) в качестве y взять величины смещений 0,087 и 0,05 м, то скорость удара составила бы соответственно 41,3 и 38,2 м/с, т.е. превысила бы более близкую к действительности на 13,4 и 40 %.

Нетрудно сделать вывод, что с увеличением W вклад волны нагрузки в величину окончательного смещения поверхности полупространства возрастает. Это следует уже из того, что при $W = 0$ волна нагрузки вообще отсутствует.

Ранее работа в сокращенном варианте была доложена на всероссийской конференции [6].

Авторы посвящают эту работу светлой памяти выдающегося ученого-механика академика РАН Григоряна Самвела Самвеловича

Литература

1. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности. М.: Мир, 1978. 307 с.
2. *Камалян Р.З., Королев К.Д.* О математическом моделировании и оптимизации геометрических параметров выпуска руды // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1990. № 3. С. 102–107.
3. *Королев К.Д.* К ударному уплотнению грунтов и сыпучих тел // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых. 1984. № 1. С. 24–31.
4. *Рахматулин Х.А., Демьянов Ю.А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М.: Физматгиз, 1961. 399 с.
5. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1970. 664 с.
6. *Камалян Р.З., Камалян С.Р.* О взрыве плоского заряда в двухслойной среде // Обозре-

ние прикладной и промышленной математики. 2001. Т. 8. Вып. 1. С. 203.

References

1. Novatskiy V.K. *Volnovye zadachi teorii plastichnosti* [Wave problems of the theory of plasticity]. Moscow, Mir Publ., 1978, 307 p.
2. Kamalyan R.Z., Korolev K.D. O matematicheskom modelirovanii i optimizatsii geometricheskikh parametrov vypuska rudy [Mathematical modeling and optimization of the geometric parameters of the issue of ore]. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh* [Physical and technical problems of mining], 1990, no. 3, p. 102–107.
3. Korolev K.D. K udarnomu uplotneniyu gruntov i sypuchikh tel [By the shock compaction of soils and granular materials]. *Fiziko-tekhnicheskie problemy razrabotki poleznykh iskopaemykh* [Physical and technical problems of mining], 1984, no. 1, pp. 24–31.
4. Rakhmatulin Kh.A., Dem'yanov Yu.A. *Prochnost' pri intensivnykh kratkovremennykh nagruzkakh* [Strength of short intensive loads]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1961, 399 p.
5. Demidovich B.P., Maron I.A. *Osnovy vychislitel'noy matematiki* [Fundamentals of computational mathematics]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 664 p.
6. Kamalyan R.Z., Kamalyan S.R. O vzryve ploskogo zaryada v dvukhsloynoy srede [On the flat explosion of a charge in a two-layer medium]. *Obozrenie prikladnoy i promyshlennoy matematiki* [Review of Applied and Industrial Mathematics], 2001, vol. 8, iss. 1, p. 203.

Статья поступила 17 мая 2015 г.