

УДК 533.6

## ДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОЙ ПЛАСТИНЫ В АКУСТИЧЕСКОМ ПОТОКЕ

Лукащик Е. П.

DYNAMIC INSTABILITY OF FLEXIBLE PLANE INTO ACOUSTIC FLOW

Lukashchik E. P.

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: lep\_9091@mail.ru

*Abstract.* As a feedback system a flexible lifting structure may be dynamically unstable for certain relations between speed, bending stiffness, density and material of the structure. Dynamic aeroelasticity phenomena are caused by interaction of the inertia, aerodynamic and elastic forces. This work presents the mathematical model of the oscillatory motion in the subsonic flow as a mixed boundary value problem of aeroelasticity of the elastically deformable thin plate. The aerodynamic approach has been applied to solve the represented problem, namely the problem of bending the plate was considered as an auxiliary problem to determine the perturbed velocity of the plate points, forming a distribution of fluid pressure on the plate.

The basic idea of the approach to the solving of the coupled problem is to ensure equivalence and keep the specific character for the methods developed in the basic sciences (aerodynamics, elasticity theory). In the case of hinge for any distribution of the transverse load the solution of the problem of cylindrical bending of plate was obtained by the method of Green's functions using Krylov's beam functions. In the space of generalized functions of slow growth the aerodynamic part of the related problems is reduced to a singular integral equation by using of integral calculus and the theory of complex variable functions.

The results of numerical experiments confirm the existence of the critical conditions in which there is a sharp change in the aerodynamic load on the plate. Values of critical numbers at which loss of stability occurs depend on the properties of the plate (hardness, weight), the properties of the liquid and the oscillation frequency. Each eigenvalue corresponds to the normal function defining the shape deformations related to certain type of natural fluctuations. Behavior of obtained own deformation forms is consistent with the character of the normal functions described in the Bisplingoff's monograph "Aeroelasticity".

The questions of the dynamic interaction quality of the system "elastic plane – compressible flow" considering in this work are part of a comprehensive study of aeroelastic behavior of the lifting structure in motion in continuous medium.

*Keywords:* aeroelasticity, aerodynamic, dynamic instability, generalized function

### Введение

Успешное развитие технологий производства высокопрочных мягких материалов открывает новые возможности по созданию более легких и совершенных несущих конструкций, по реализации более высокого уровня требований к гибким крыльевым системам, по расширению областей и способов их применения.

Однако как система с обратной связью гибкая несущая поверхность при определенных соотношениях между скоростью, изгибной жесткостью, плотностями жидкости и

материала конструкции может стать динамически неустойчивой, что приводит к необходимости исследования имеющих место явлений аэроупругости.

Динамические явления аэроупругости обусловлены взаимодействием сил инерции, аэродинамических и упругих сил. Сложность совместной задачи объясняется необходимостью одновременного учета особенностей аэродинамических и упругих явлений. С одной стороны, возмущенные аэродинамические характеристики при неустановившемся движении зависят от предыстории обтекания, которая определяется всеми законами движе-

ний и деформаций. С другой стороны, движение летательного аппарата, деформации его поверхности определяются и его аэродинамическими нагрузками. Таким образом, математическое моделирование нестационарного движения упруго-деформируемой пластины в дозвуковом потоке непременно приводит к смежной контактной краевой задаче. В качестве инструмента математических исследований в работе использовалась теория обобщенных функций.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим обтекание дозвуковым потоком со скоростью  $V_0$  колеблющейся гибкой пластины бесконечного размаха на расстоянии  $h$  от твердой границы ( $a$  — полухорда).

Ось  $Ox$  направим вдоль хорды по направлению скорости  $V_0$ , а ось  $Oy$  проведем через центр хорды и направим вверх. Таким образом, профилю пластины соответствует на оси  $Ox$  отрезок  $[-a, a]$ . В уравнении  $y = f_0(x, t) + f(x, t)$ , определяющем форму тонкого упругого профиля,  $f(x, t)$  — упругие смещения относительно заданной первоначальной формы профиля  $f_0(x, t)$ .

Качественные характеристики поведения гибкой пластины в акустической среде можно получить, исследуя ее устойчивость при малых возмущениях. Поэтому многие задачи аэроупругости можно изучать в линейной постановке. Линеаризация допустима, если местные углы атаки и линейные перемещения малы по сравнению с хордой [1].

Скачок давления в точках профиля определяет аэродинамическую нагрузку и согласно интегралу Коши–Лагранжа выражается через потенциал возмущенных скоростей  $\varphi(x, y, t)$  следующим линейным соотношением:

$$p(x) = \rho \left[ V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right],$$

где  $\rho$  — плотность жидкости.

Условие неразрывности представляется волновым уравнением в подвижной системе координат

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{2M}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0,$$

где  $c$  — скорость звука,  $M = \frac{V_0}{c}$  — число Маха.

Граничные условия, принимают следующий вид:

– непротекание пластины

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0, t) = v_y(x, t), \quad |x| \leq a, \quad y = 0;$$

– непрерывность давления в вихревом следе за профилем

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)(x, 0_+, t) = \\ = \left( \frac{\partial \varphi}{\partial t} + V_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)(x, 0_-, t), \quad x > a, \end{aligned}$$

– непротекание твердой границы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, -h, t) = 0.$$

Перед фронтом волны возмущения скорости и давления должны отсутствовать. На бесконечности также должно выполняться условие излучения.

Вертикальная составляющая скорости точек пластины

$$v_y(x, t) = v_0(x, t) + \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} + V_0 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

состоит из заданного возмущения (кинематическое возмущение) и составляющей, вызванной упругими перемещениями профиля.

Для определения прогибов  $f(x, t)$  колеблющегося профиля используем линейное дифференциальное уравнение изгиба пластины при наличии заданных постоянных усилий в срединной плоскости [2]. Перемещения пластины определяются влиянием гидродинамических сил, а также силы инерции

$$D \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} = p(x) - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

где  $D$  — изгибная жесткость пластины,  $h_0$  — толщина пластины,  $\rho_0$  — плотность материала пластины.

Рассмотрим шарнирное закрепление концов профиля. В этом случае кромки профиля оперты и могут свободно поворачиваться, то есть прогиб и изгибающий момент на краях должны быть нулевыми

$$f(\pm a) = f''(\pm a) = 0.$$

По распределению упругих перемещений можно определить изгибающий момент и перерезывающую силу по следующим формулам [2]:

$$M(x) = -D \frac{d^2 f(x)}{dx^2};$$

$$Q(x) = -D \frac{d^3 f(x)}{dx^3}.$$

Достаточно проанализировать только колебания системы определенной частоты, так как все прочие малые движения системы могут быть построены из этого движения с помощью метода наложений. При изучении установившихся колебаний в линейной постановке зависимость от времени для всех величин будет выражаться гармоническими функциями. Для потенциала возмущенных скоростей частиц жидкости используем представление в комплексном виде

$$\varphi(x, y, t) = \varphi(x, y) e^{-i\omega t},$$

где  $\varphi(x, y)$  — комплексная амплитуда потенциала скорости,  $\omega$  — частота колебаний пластины.

При условии, что период деформации профиля совпадает с периодом его колебаний, распределение упругих перемещений представим в виде

$$f(x, t) = f(x) e^{-i\omega t}.$$

Для комплексной амплитуды  $\varphi(x, y)$  имеем следующее уравнение:

$$(1 - M^2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{2M i \omega}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\omega^2}{c^2} \varphi = 0.$$

Линейной заменой перейдем к безразмерным переменным

$$\bar{x} = \frac{1}{a} x, \quad \bar{y} = \frac{\sqrt{1 - M^2}}{a} y, \quad \bar{f} = \frac{1}{a} f.$$

Здесь и в дальнейшем в работе используем обозначения

$$k = \frac{\omega a}{V_0} \text{ — число Струхала,}$$

$$\nu = \frac{k M^2}{1 - M^2}, \quad \varkappa = \frac{k M}{1 - M^2},$$

$m = \frac{\rho_0 h_0}{\rho a}$  — относительная масса крыла;

$\lambda = \frac{\rho a^3 V_0^2}{D}$  — параметр упругости.

В целях упрощения записи для безразмерных переменных дальше в работе не указываем верхнее подчеркивание.

Тогда для функции  $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x, y) e^{i\nu x}$  в новых переменных имеем уравнение Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\varphi}}{\partial y^2} + \varkappa^2 \tilde{\varphi} = 0, \quad (1.1)$$

$$y > -H = \frac{-h\sqrt{1 - M^2}}{a}.$$

Условие непротекания профиля в новых переменных

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{1 - M^2}} e^{i\nu x} v_y(x), \quad (1.2)$$

$$|x| \leq 1.$$

В новых обозначениях скачок давления определяется функцией

$$\tilde{p}(x) = \left[ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} - i\mu \tilde{\varphi} \right], \quad (1.3)$$

$$\text{где } \mu = \frac{k}{1 - M^2}, \quad \tilde{p}(x) = p(x) e^{i\nu x}.$$

Условие непрерывности давления в вихревом следе принимает вид

$$\left[ \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} - i\mu \tilde{\varphi} \right] = 0 \text{ при } x > 1. \quad (1.4)$$

Запишем и уравнение изгиба пластины в безразмерном виде

$$\frac{d^4 f}{dx^4} - \beta^4 f = \lambda \tilde{p}(x) e^{-i\nu x}, \quad (1.5)$$

$$f(\pm 1) = 0; \quad f''(\pm 1) = 0,$$

$$\beta^{4'} = \lambda m k^2.$$

Применим аэродинамический подход к решению полученной смешанной задачи. Задача изгиба пластины будет рассматриваться как вспомогательная для определения возмущенной скорости точек пластины.

## 2. Методика решения

Для определения решения задачи цилиндрического изгиба шарнирно закрепленного профиля для произвольного распределения поперечной нагрузки применим метод функций Грина при использовании балочных функций Крылова [3]

$$\begin{aligned} S(x) &= 0,5 (\operatorname{ch} x + \cos x), \\ V(x) &= 0,5 (\operatorname{sh} x - \sin x), \\ U(x) &= 0,5 (\operatorname{ch} x - \cos x), \\ T(x) &= 0,5 (\operatorname{sh} x + \sin x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

для которых верны соотношения

$$\begin{aligned} S'(x) &= V(x); & V'(x) &= U(x); \\ U'(x) &= T(x); & T'(x) &= S(x). \end{aligned}$$

В результате получим выражение для упругих перемещений при воздействии произвольной периодической аэродинамической нагрузки на пластину

$$f(x) = \int_{-1}^1 \tilde{p}(s) G(x, s) ds.$$

Здесь

$$G(x, s) = \frac{\lambda e^{-i\nu s}}{\beta^3} \left\{ G_0(x, s)' + H(x-s) V(\beta(x-s)) \right\},$$

$$\begin{aligned} G_0(x, s) &= \frac{1}{V^2(2\beta) - T^2(2\beta)} \times \\ &\times \left\{ V(\beta(1+x)) [T(2\beta)T(\beta(1-s)) - V(2\beta)V(\beta(1-s))] + \right. \\ &+ T(\beta(1+x)) [T(2\beta)V(\beta(1-s)) - V(2\beta)T(\beta(1-s))] \left. \right\}. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Здесь  $H(x)$  — ступенчатая функция Хэвисайда.

Для нахождения решения аэродинамической задачи применим методы операционного исчисления, что возможно, если решение задачи определять в пространстве обобщенных функций медленного роста [4].

В результате преобразования Фурье по переменной  $x$  для образа потенциала  $\Phi(\alpha, y) = F[\tilde{\varphi}(x, y)](\alpha, y)$  имеем следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - (\alpha^2 - \alpha^2) = 0,$$

Решение данного уравнения будем определять в виде пары функций

$$\Phi_+(\alpha, y) = A(\alpha) e^{-\gamma y}, \quad 0 < y < +\infty,$$

$$\Phi_-(\alpha, y) = B(\alpha) e^{-\gamma y} + C(\alpha) e^{\gamma y},$$

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \alpha^2}, \quad -H < y < 0.$$

Нужную ветвь многозначной функции  $\Phi$  комплексного переменного  $\alpha$  определим исходя из принципа излучения ( $\gamma > 0$  при  $|\alpha| > \alpha$ ;  $\gamma = -i\tau$  при  $|\alpha| < \alpha$ ). Используя условие обтекания границы  $y = -H$  и условие совпадения нормальных производных при  $y = 0$ , получим выражения для составляющих решения

$$\Phi_-(\alpha, y) = A(\alpha) (e^{-\gamma y} + e^{-\gamma(2H-y)});$$

$$\Phi_+(\alpha, y) = A(\alpha) (e^{-2\gamma H} - 1) e^{-\gamma y}.$$

В образах по Фурье перепад давления на пластине (1.3) примет вид

$$\begin{aligned} p(\alpha) &= F[\tilde{p}(x)](\alpha) = \\ &= (-i\alpha - i\mu) [\Phi_- - \Phi_+]_{y=0}. \end{aligned}$$

Последние соотношения позволяют установить взаимосвязь между обобщенными функциями  $P(\alpha)$  и  $A(\alpha)$

$$\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{2i} P(\alpha) P \frac{1}{\alpha + \mu} + \\ &+ CP(-\mu) \delta(\alpha + \mu), \quad (2.3) \end{aligned}$$

где  $\delta(s)$  — функция Дирака,  $P \frac{1}{s}$  — обобщенная функция, действующая на основные функции по правилу

$$\begin{aligned} \left( P \frac{1}{s}, f(s) \right) &= VP \int \frac{f(s)}{s} ds = \\ &= \lim_{z \rightarrow 0} \left( \int_{-z}^z + \int_{+z}^z \right) \frac{f(s)}{s} ds, \end{aligned}$$

то есть определяющая главное значение сингулярного интеграла по Коши.

Используя выражение для  $A(\alpha)$  запишем в Фурье-образах условие непротекания на профиле

$$\begin{aligned} &- \gamma (e^{-2\gamma H} - 1) \times \\ &\times \left( \frac{1}{2i} P(\alpha) P \frac{1}{\alpha + \mu} + C \delta(\alpha + \mu) \right) = v_y(\alpha), \end{aligned}$$

где

$$v_y(\alpha) = F \left[ \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}} v_y(x) \right](\alpha).$$

Представим последнее соотношение в виде

$$\begin{aligned} P(\alpha) R(\alpha) + Cp(-\mu) \delta(\alpha + \mu) &= \\ &= v_y(\alpha), \quad (2.4) \end{aligned}$$

где

$$R(\alpha) = \frac{1}{2i} \gamma (1 - e^{-2H\gamma}) P \frac{1}{\alpha + \mu}.$$

При  $|\alpha| < \varkappa$  функция  $R(\alpha)$  совпадает с регулярной функцией. При  $|\alpha| \rightarrow \infty$ ,

$$R(\alpha) \sim O\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}}{\alpha}\right) = O(\text{sign}(\alpha)). \quad (2.5)$$

Множитель

$$\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2} \left(1 - e^{-2H\sqrt{\alpha^2 - \varkappa^2}}\right),$$

вообще говоря, не является мультиплексором [4] из-за нарушения гладкости в точках ветвления. Следуя принципу предельного поглощения, введение в рассмотрение фиктивной вязкости позволит сдвинуть точки ветвления с вещественной оси в направлении разрезов. Получив представление  $r(x) = F^{-1}[R(\alpha)](x)$  предельным переходом можно вернуть точки ветвления на вещественную ось.

Таким образом, первое слагаемое в (2.4) представляет собой произведение образа финитной функции  $\tilde{p}(x)$  и образа функции медленного роста, то есть является Фурье-образом свертки функций [5]. Обратным преобразованием Фурье получаем следующее сверточное уравнение:

$$\tilde{p}r - CP(-\mu) e^{i\mu x} = \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}} v_y(x), \quad (2.6)$$

то есть

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(s) r(x - s) ds - CP(-\mu) e^{i\mu x} = \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1 - M^2}} v_y(x).$$

Константа  $C$  будет определена ниже из условия отсутствия возмущений на бесконечности перед движущимся профилем.

Вначале остановимся на вычислении  $r(x)$ . Заметим, что в пространстве обобщенных функций

$$F^{-1}[\text{sign}(\alpha)](x) = \frac{1}{\pi i} P \frac{1}{x},$$

то есть сверточное уравнение является сингулярным интегральным уравнением 1-го рода. В выражении для  $R(\alpha)$  отдельно выделим сингулярную составляющую

$$R(\alpha) = \frac{1}{2i} \left[ \gamma (1 - e^{-2H\gamma}) \frac{1}{\alpha + \mu} - \text{sign}(\alpha + \text{sign}(x) \varkappa) \right] + \frac{1}{2i} \text{sign}(\alpha + \text{sign}(x) \varkappa).$$

Первое слагаемое представляет собою обобщенную функцию  $R1(\alpha)$ , которая вне окрестности полюса совпадает с регулярной функцией, ведущей себя на бесконечности как  $O\left(\frac{\mu}{|\alpha|}\right)$ . Выделив отдельно в окрестности полюса интеграл в смысле главного значения и применяя известный в теории обобщенных функций факт, что

$$F^{-1}[\text{sign}(\alpha + \varkappa)](x) = \frac{1}{\pi i} e^{i\varkappa x} P \frac{1}{x},$$

для функции  $r(x)$  преобразование Фурье можно выполнить в классическом смысле

$$r(x) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-x}^x e^{-i\alpha x} \left[ \gamma (1 - e^{-2H\gamma}) \frac{1}{\alpha + \mu} - \text{sign}(\alpha + \text{sign}(x) \varkappa) \right] d\alpha - \frac{1}{2\pi} e^{i\varkappa|x|} P \frac{1}{x}. \quad (2.7)$$

Различный сдвиг аргумента в функции  $\text{sign}$  обусловлен различием последующего замыкания контуров интегрирования в плоскости комплексного переменного  $\alpha = \sigma + i\tau$ .

Вычисление интеграла  $r(x)$  выполним в рамках теории функций комплексного переменного [1]. Для выделения ветви, соответствующей физической интерпретации решения, в плоскости  $(\alpha)$  достаточно провести два вертикальных разреза в первой и третьей четвертях:  $(\varkappa, \varkappa + i\infty)$  и  $(-\varkappa, -\varkappa - i\infty)$ . Для данной ветви выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}\pi < \arg(\alpha - \varkappa) < \frac{1}{2}\pi, \\ -\frac{1}{2}\pi < \arg(\alpha + \varkappa) < \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

В ходе численного эксперимента было установлено, что более предпочтительным представляется использование не традиционных

разрезов по вертикальным прямым, а ломаных разрезов (аналогичный вариант разреза рассмотрен в работе Б. Нобла [6]). В нашем случае разрезы строятся из отрезков действительной оси  $[\pm \varkappa, 0]$ , лучей вдоль мнимой оси  $(\pm i0, \pm i\infty)$ .

Для вычисления интеграла в (2.7) замкнем контуры интегрирования в верхней полуплоскости ( $\alpha$ ) при  $x < 0$  и в нижней полуплоскости при  $x > 0$ . Деформируем контуры интегрирования так, чтобы при  $x < 0$  полюс  $\alpha = -\mu$  обойти сверху, а при  $x > 0$  снизу, в окрестности полюса интеграл понимаем в смысле главного значения.

На рис. 1 представлен контур интегрирования при  $x < 0$ . Учитывая разрез в верхней полуплоскости, получим два замкнутых контура, каждый из которых состоит из горизонтального участка вещественной оси, соответствующего берега разреза и дуги радиуса  $l$ . Внутри каждого контура подинтегральная функция голоморфна. Следовательно по теореме Коши интеграл по замкнутому контуру равен нулю. Интегралы, входящие в выражение для ядра, будем понимать как пределы при  $l \rightarrow \infty$  интегралов по интервалам  $-l < \alpha < -\text{sign}(x)\varkappa$  и  $-\text{sign}(x)\varkappa < \alpha < l$ .

Используем формулу Сохоцкого [5]

$$\int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha = \mp \pi i f(\mu) + Vp \int_L \frac{f(\alpha)}{\alpha - \mu} d\alpha,$$

где выбирается «-», если контур  $L$  обходит полюс сверху, и «+», если снизу.

Для  $\alpha = \sigma + i\tau$  в верхней полуплоскости  $\tau > 0$ , подинтегральная функция за счет множителя  $e^{\tau x}$  экспоненциально убывает, в силу чего интеграл по дугам  $C_l$  при  $l \rightarrow \infty$  стремится к нулю.

Опуская математические выкладки приведем итоговый результат для обратного преобразования Фурье функции медленного роста  $R1(\alpha)$

$$\begin{aligned} Vp \int_{-\infty}^{+\infty} R1(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = & \\ = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu^2 - \varkappa^2} e^{i\mu x} \left( 1 - e^{-2h\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \right) - & \\ - \left[ \int_0^{\varkappa} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}}{\sigma + \mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2} \right) \times \right. & \\ \left. \times e^{-i\sigma x} d\sigma - \right. & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\tau - i\mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} \right) e^{\tau x} d\tau \Big] + & \\ + \left\{ \frac{1}{i} \int_0^{\varkappa} e^{-i\sigma x} d\sigma - \int_0^{\infty} e^{\tau x} d\tau \right\}. & \quad (2.8) \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} e^{x\tau} d\tau = -P \frac{1}{x},$$

выражение в фигурных скобках, преобразуем к виду  $e^{-ix\nu} P \frac{1}{x}$ , что позволит после подстановки в (2.7) сократить сингулярное слагаемое.

В результате для случая  $x < 0$  получим выражение для ядра

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{1}{4} \sqrt{\mu^2 - \varkappa^2} e^{i\mu x} \left( 1 - e^{-2h\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \right) - & \\ - \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\varkappa} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}}{\sigma + \mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2} \right) \times \right. & \\ \left. \times e^{-i\sigma x} d\sigma - \right. & \\ \left. - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\tau - i\mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} \right) e^{\tau x} d\tau \right]. & \end{aligned}$$

Аналогично для  $x > 0$  имеем

$$\begin{aligned} r(x) = \frac{-1}{4} \sqrt{\mu^2 - \varkappa^2} e^{i\mu x} \left( 1 - e^{-2h\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \right) + & \\ + \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\varkappa} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}}{\sigma + \mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2} \right) \times \right. & \\ \left. \times e^{i\sigma x} d\sigma - \right. & \\ \left. - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\tau - i\mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2} \right) e^{-\tau x} d\tau \right]. & \end{aligned}$$

Т.е. для произвольного значения  $x$

$$\begin{aligned} r(x) = & \\ = \frac{\text{sign}(-x)}{4} \sqrt{\mu^2 - \varkappa^2} e^{i\mu x} \left( 1 - e^{-2h\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}} \right) + & \\ + \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \left[ \int_0^{\varkappa} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}}{\sigma + \mu} \left( 1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2} \right) \times \right. & \\ \left. \times e^{i\sigma|x|} d\sigma - \right. & \end{aligned}$$

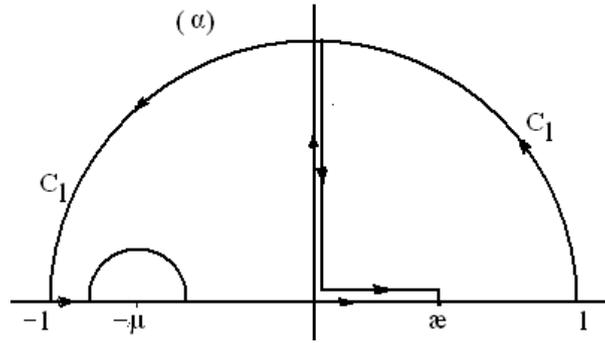


Рис. 1. Контур интегрирования при  $x < 0$

$$-\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\tau - i\mu} \left(1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}\right) \times e^{-\tau|x|} d\tau \quad (2.9)$$

В результате выполненных выше преобразований ядро  $r(x)$  получено в виде суммы интегральной и экспоненциальной составляющих. Интегральная составляющая убывает при  $|x| \rightarrow \infty$ . Свертка экспоненциальной составляющей с финитной функцией  $\tilde{p}(x)$  приводит к слагаемому

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(s) e^{i\mu(x-s)} ds = e^{i\mu x} \int_{-1}^1 \tilde{p}(s) e^{-i\mu s} ds = e^{i\mu x} P(-\mu).$$

В силу этого в выражении для вертикальной скорости появляется экспоненциальное слагаемое вида

$$\left[ \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}}{4} \left(1 - e^{-2H\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}}\right) + C \right] \times e^{i\mu x} P(-\mu).$$

Знак «+» выбирается при  $x < 0$ , знак «-» — при  $x > 0$ . Это слагаемое соответствует волнам вида  $e^{i(\mu x - \omega t)}$ , скорость распространения которых положительна

$$x' = \frac{\omega}{\mu} > 0.$$

Волны с такой скоростью не должны присутствовать в решении при  $x < 0$ , так как

согласно принципу излучения возмущения должны уходить от источника. В силу чего необходимо положить

$$C = -\frac{\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}}{4} \left(1 - e^{-2H\sqrt{\mu^2 - \varkappa^2}}\right).$$

В результате при  $x < 0$  в ядре сверточно-го уравнения останется только интегральная составляющая, а при  $x > 0$  экспоненциальная составляющая удваивается.

Таким образом, вычисление ядра сведено к вычислению интеграла вдоль положительной полуоси с экспоненциально убывающим весом, для численного интегрирования которого могут быть применены квадратурные формулы.

В результате аэродинамическая часть смешанной задачи аэроупругости сведена к сингулярному интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(s) r(x-s) ds = \frac{1}{\sqrt{1-M^2}} e^{ix\nu} v_y(x), \quad (2.10)$$

где ядро имеет вид

$$r(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \times \left[ \int_0^{\varkappa} \frac{\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}}{\sigma + \mu} \left(1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 - \sigma^2}\right) \times e^{i\sigma|x|} d\sigma - \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}}{\tau - i\mu} \left(1 - \cos 2h\sqrt{\varkappa^2 + \tau^2}\right) \times \right]$$

$$\times e^{-\tau|x|} d\tau \left] - \frac{1 + \text{sign}(x)}{2} \times \right. \\ \left. \times \left( \frac{\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}}{2} e^{i\mu x} \left( 1 - e^{-2h\sqrt{\mu^2 - \alpha^2}} \right) \right) \right).$$

Следует отметить, что представление ядра также можно было свести к шести слагаемым, содержащим функции Ханкеля и интегралы от них, однако вычисление последних сопряжено с гораздо большими трудозатратами.

### 3. Численный анализ

Полученное выражение для упругих перемещений (2.2)

$$f(x) = \int_{-1}^1 \tilde{p}(s) G(x, s) ds,$$

используем для определения нормальной скорости на пластине  $v_y(x)$  в правой части уравнения (2.10). Слагаемое, отвечающее за вклад упругих сил в изменение эффективного угла атаки на пластинке, перенесем в левую часть этого уравнения. В результате уравнение (2.10) преобразуется к виду

$$\int_{-1}^1 \tilde{p}(s) \left[ r(x-s) + \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1-M^2}} \left[ ikG(x, s) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, s) \right] \right] ds = \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1-M^2}} v_0(x). \quad (3.1)$$

Тип данного уравнения определяет функция  $r(x)$  (на особенность которой было указано ранее), в силу чего соответствующий интеграл понимается в смысле Коши.

Для численного решения уравнения (3.1) применяем метод дискретных вихрей и получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{2}{N} \sum_{j=1}^N \left[ \tilde{p}(s_j) \left( r(x_i - s_j) - \frac{e^{i\nu(x_i - s_j)}}{\sqrt{1-M^2}} FG(x_i, s_j) \right) \right] = \frac{e^{i\nu x}}{\sqrt{1-M^2}} v_0(x_i), \quad (3.2)$$

$$FG(x, s) = \frac{\lambda}{\beta^3} \left\{ FG_0(x, s)' + H(x-s) [\beta U(\beta(x-s)) - ikV(\beta(x-s))] \right\},$$

$$FG_0(x, s) = \frac{1}{V^2(2\beta) - T^2(2\beta)} \times \\ \times \left\{ [\beta U(\beta(1+x)) - ikV(\beta(1+x))] \times \right. \\ \times \left[ T(2\beta)T(\beta(1-s)) - V(2\beta)V(\beta(1-s)) \right] + \\ \left. + [\beta S(\beta(1+x)) - ikT(\beta(1+x))] \times \right. \\ \left. \times \left[ T(2\beta)V(\beta(1-s)) - V(2\beta)T(\beta(1-s)) \right] \right\}$$

$$x_i = -1 + \left( i - \frac{1}{4} \right) \frac{2}{N}, \quad i = \overline{1, N},$$

$$s_j = -1 + \left( j - \frac{3}{4} \right) \frac{2}{N}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Выбор узлов и точек коллокации обеспечивает нахождение решения сингулярного уравнения в классе функций, неограниченных на передней кромке и конечных на выходной кромке крыла, что характерно для данного типа течения [7].

Определение распределения гидродинамического давления  $\tilde{p}(x)$  позволит определить деформации гибкого крыла, динамику изменения аэродинамических сил, действующих на крыло, в зависимости от его упругих свойств и параметров движения. Так, коэффициент аэродинамической подъемной силы определяется по формуле

$$C_y = \int_{-1}^1 \tilde{p}(x) e^{-i\nu x} dx.$$

### 4. Анализ результатов

Результаты произведенных расчетов позволяют проследить за развитием деформационного процесса и характером изменения нестационарных аэродинамических характеристик.

На рис. 2–4 показано, как наличие сжимаемости жидкости приводит к увеличению колебательности характеристик.

Поведение гидродинамической подъемной силы при обтекании гибкого профиля с различной скоростью (разные числа Маха) показано на рис. 5 и 6 в зависимости от числа

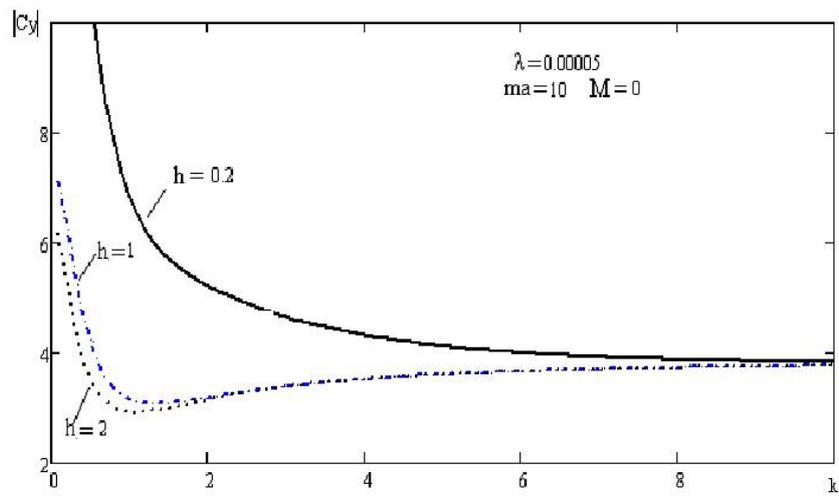


Рис. 2

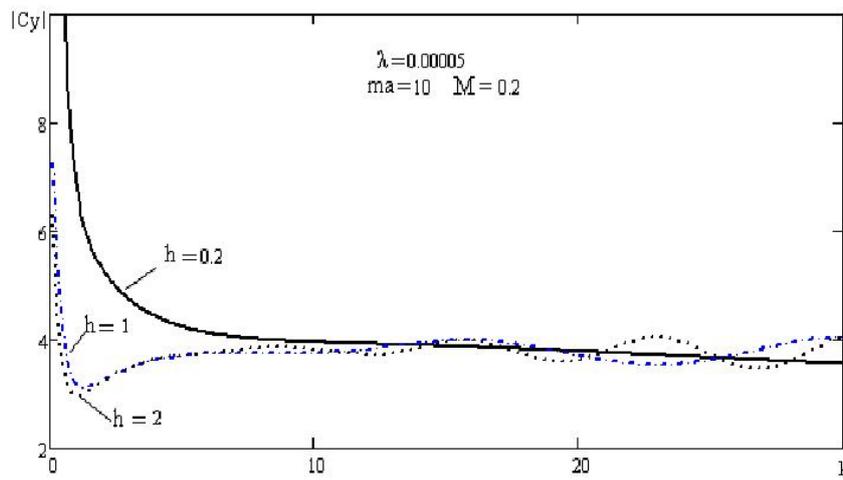


Рис. 3

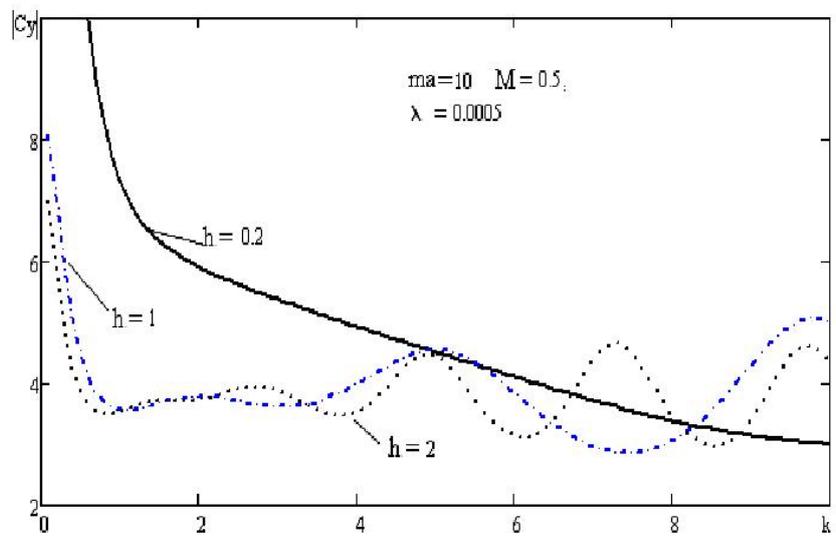


Рис. 4

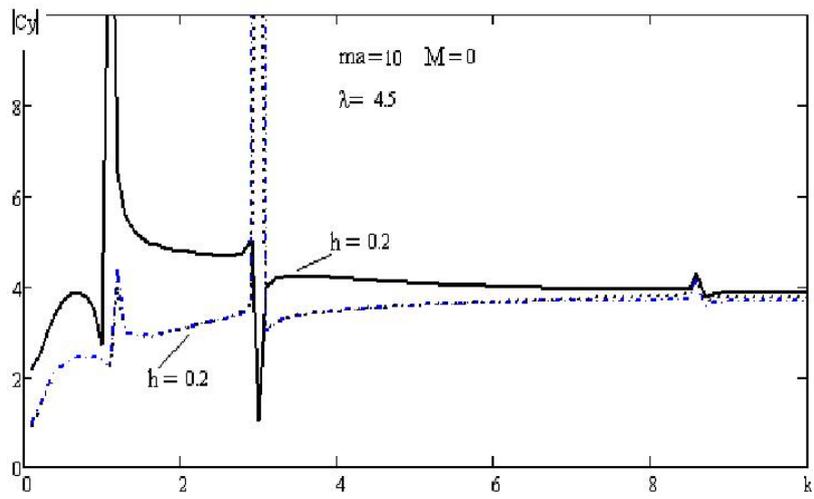


Рис. 5

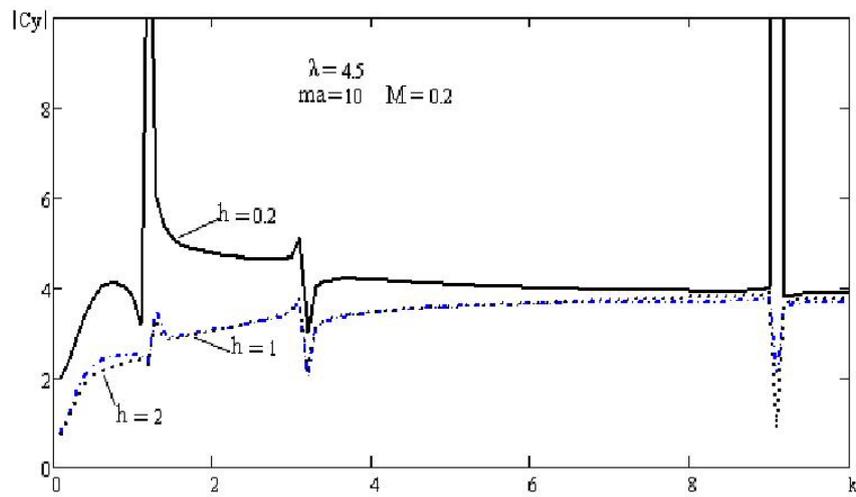


Рис. 6

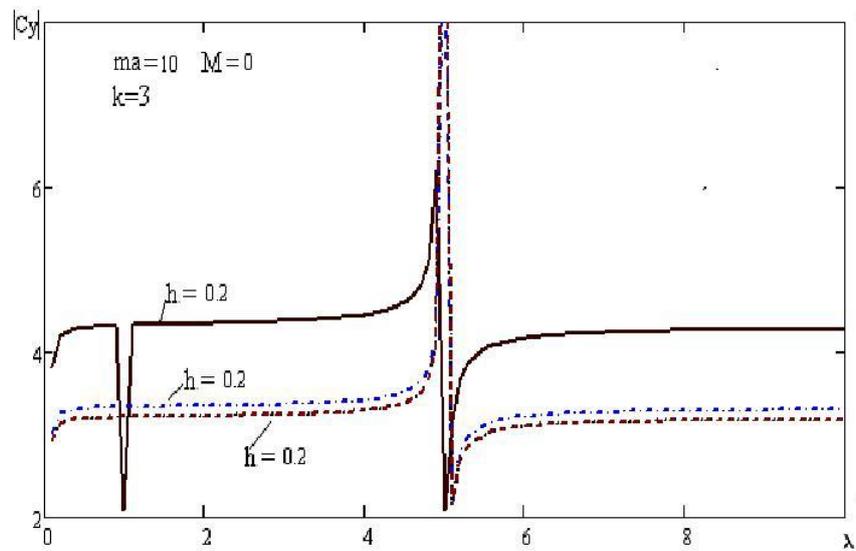


Рис. 7

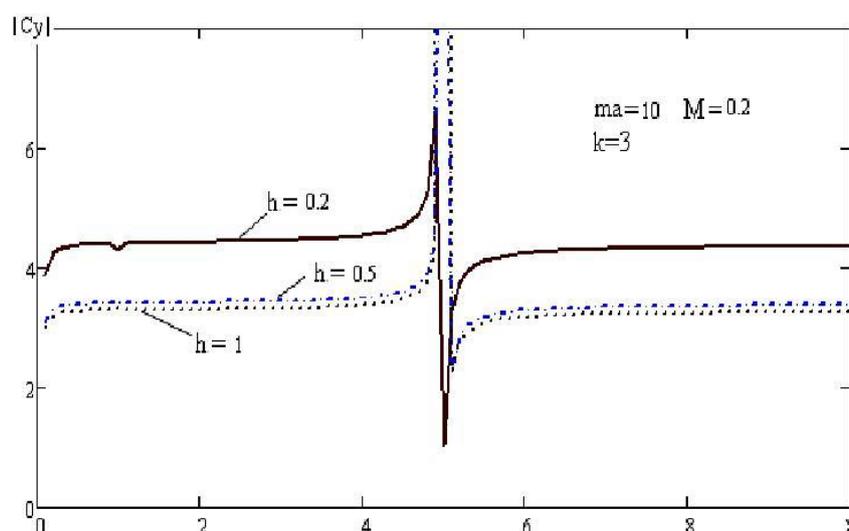


Рис. 8

Струхалю, на рис. 7 и 8 при изменении упругих свойств профиля.

Обращает внимание наличие критических точек на графике, при которых происходит резкое изменение значений подъемной силы. Значения критических чисел, при которых происходит потеря устойчивости, зависят от свойств профиля (жесткости, массы), свойств жидкости и частоты колебаний.

Каждому собственному числу соответствует нормальная функция, определяющая форму деформаций, отвечающих некоторому естественному типу колебаний.

На рис. 9–14 показаны собственные формы деформаций, соответствующие собственным значениям, наблюдаемым на рис. 6: первая форма (рис. 9), вторая форма (рис. 10, 11), третья форма (рис. 12, 13) и четвертая форма (рис. 14). Характер полученных кривых соответствует виду собственных форм, представленным в монографии Бисплингоффа «Аэроупругость» [8]. Обращает внимание тот факт, что в критической точке происходит как бы всхлопывание поверхности, деформационная кривая меняется на зеркально противоположную.

Результаты численного эксперимента подтвердили, что при фиксированных упругих свойствах профиля (жесткости) изменение других параметров системы «упругий профиль – сжимаемая жидкость», например, частоты колебаний, также может перевести систему из окрестности одного неустойчивого состояния в окрестность другого неустойчи-

вого состояния, что повлечет качественное изменение поведения всех характеристик системы.

Рассматриваемые в работе вопросы качества динамического взаимодействия системы «упругое крыло – поток сжимаемой жидкости» являются частью комплексного исследования упругого летательного аппарата, совершающего нестационарное движение в сплошной среде. Исследования такой направленности представляют интерес для систем автоматического управления полетом и подавления упругих колебаний.

## Литература

1. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
2. Тимошенко С.П., Войновски-Кригер С.А. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1963. 636 с.
3. Бабаков И.М. Теория колебаний. М.: Наука, 1968. 560 с.
4. Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
5. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
6. Нобл Б. Метод Винера-Хопфа. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 280 с.
7. Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г. Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 768 с.
8. Бисплингофф Р.Л., Эшли Х., Халфмен Р.Л. Аэроупругость. М.: Иностранная литература, 1958. 801 с.

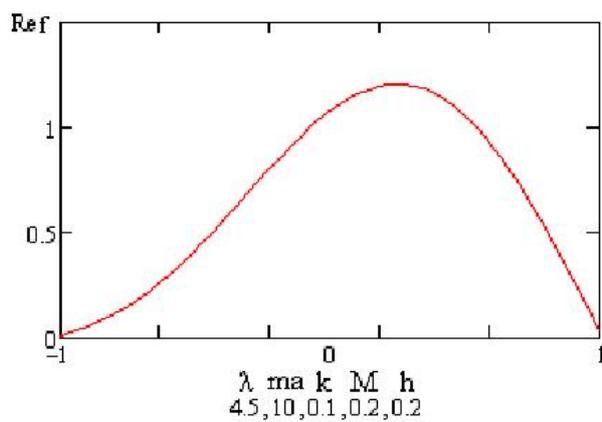


Рис. 9

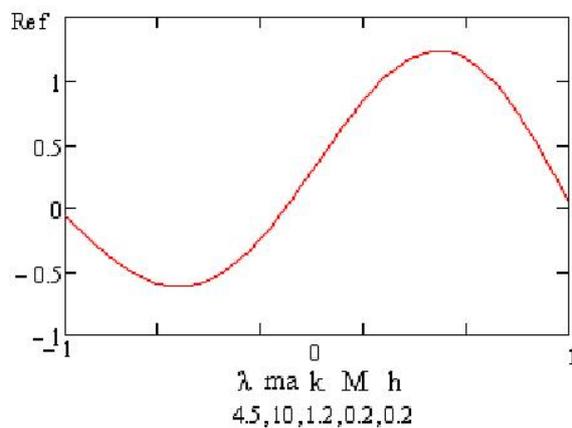


Рис. 10

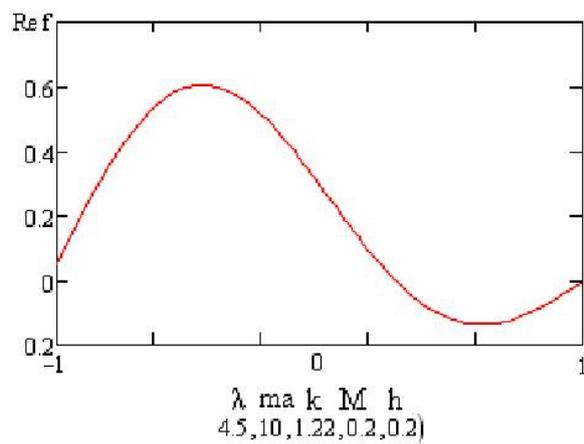


Рис. 11

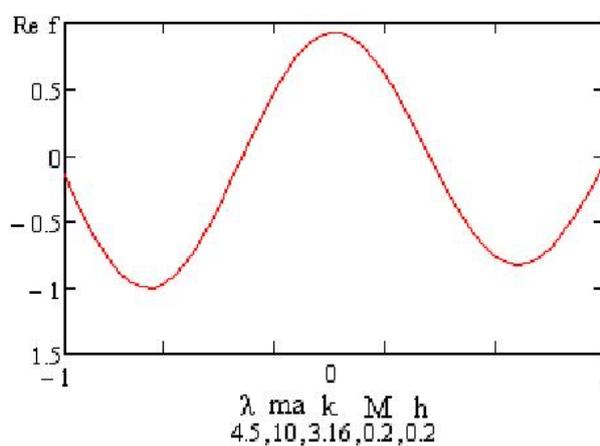


Рис. 12

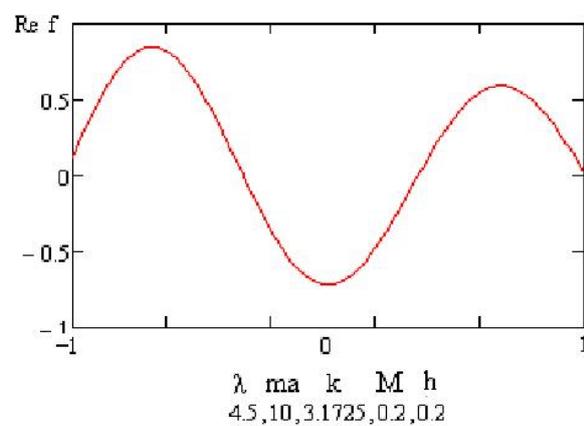


Рис. 13

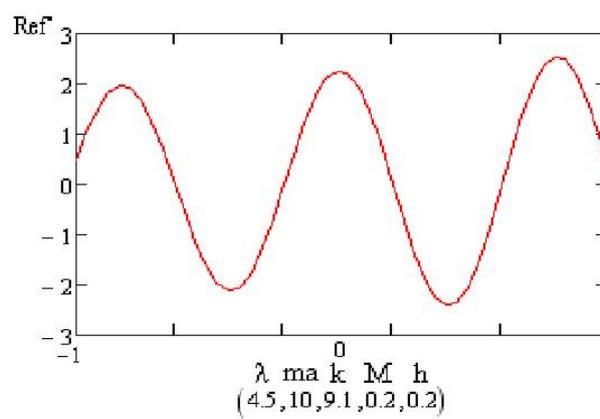


Рис. 14

**References**

1. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linear-elastic media]. Moscow, Nauka Publ, 1989, 344 p.
2. Timoshenko S.P., Voynovski-Kriger S.A. *Plastinki i obolochki* [Plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1963, 636 p.
3. Babakov I.M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 560 p.
4. Vladimirov V.S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 280 p.
5. Brychkov Yu.A., Prudnikov A.P. *Integral'nye preobrazovaniya obobshchennykh funktsiy* [Integral transforms of generalized functions]. Moscow, Nauka Publ., 1977, 288 p.
6. Nobl B. *Metod Vinera-Khopfa* [The Method Of Wiener-Hopf]. Moscow, Izdatelstvo inostrannoy literatury Publ., 1962, 280 p.
7. Belotserkovskiy S.M., Skripach B.K., Tabachnikov V.G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [Wing in unsteady gas flow]. Moscow, Nauka Publ.. 1971, 768 p.
8. Bisplinghoff R.L., Eshli Kh., Khalfmen R.L. *Aerouprugost'* [Aeroelasticity]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1958, 801 p.

---

Статья поступила 1 октября 2015 г.

© Лукащик Е. П., 2015