

УДК 517.955.8

УСРЕДНЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ
ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Назаров А. К.

AVERAGING OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

Nazarov A. K.

School no. 26, Novorossiysk, 353982, Russia
e-mail: arturnazarov7@yandex.ru

Abstract. This article confirmed by the Krylov–Bogolyubov averaging for systems of partial differential equations of the first order, containing oscillating in time with the frequency $\omega \gg 1$ terms, among which there are large proportional to $\sqrt{\omega}$ with zero mean. Previously, for a narrower range of problems similar result was obtained in the joint work of the author of this article and V. B. Levenshtam. They considered the system of the same type, but do not depend on number equation coefficients. In this paper, it is a hard limit is removed.

Upon confirmation of the averaging method used by the Krylov–Bogolyubov proved earlier by the author and V. B. Levenshtam averaging theorem Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with large high-frequency terms, as well as the method of characteristics, allows to move from consideration of partial differential equations of the first order ordinary differential equations.

Proven in this article theorem extends the theory of the averaging method Krylov–Bogolyubov to new classes of semilinear evolution systems of partial differential equations of the first order. Note that there are now quite a lot of work on the development of the theory of the averaging method for different classes of differential equations with large high-frequency terms.

Keywords: averaging method, first-order partial differential equations, large high-frequency summands, method of characteristics, Cauchy problem

Введение

В данной статье метод усреднения [1, 2] применен и обоснован для эволюционных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, содержащих осциллирующие по времени с частотой $\omega \gg 1$ слагаемые, среди которых имеются большие — пропорциональные $\sqrt{\omega}$ — с нулевым средним.

Для систем того же вида, но с не зависящими от номеров уравнений старшими коэффициентами аналогичные вопросы исследованы в [3].

Данная работа, как и [3], вызвана [4], где метод усреднения обоснован для систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными без больших слагаемых.

Отметим, что в настоящее время имеется много работ, посвященных развитию теории метода усреднения для различных классов

дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми [5–9].

Система уравнений с частными
производными первого порядка.
Метод усреднения

Пусть m и n — натуральные числа, D_0 — любой открытый ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. Рассмотрим задачу Коши для системы m уравнений первого порядка, зависящих от большого параметра ω

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n [\lambda_{ij}(\mathbf{x}, t, \omega t) + \\ + \sqrt{\omega} \mu_{ij}(\mathbf{x}, t, \omega t)] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \\ = f_i(\mathbf{x}, t, \omega t, \mathbf{u}) + \sqrt{\omega} \varphi_i(\mathbf{x}, t, \omega t, \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$1 \leq i \leq m,$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (2)$$

где

$$t \in [0, T], \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in D_0$$

Звездочка означает операцию транспонирования. Здесь $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ — непрерывно дифференцируемая при $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ вектор-функция со значениями в $\mathbb{R}^m$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m)^*$ — искомая вектор-функция, компоненты которой зависят от переменных $\mathbf{x}$ и t . Эту задачу будем называть задачей (1), (2) в параллелепипеде $\Pi_0 = D_0 \times [0, T]$.

Будем предполагать, что данные задачи (1), (2) удовлетворяют следующим условиям.

Пусть U_0 — некоторый открытый шар в $\mathbb{R}^m$, D — любой ограниченный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$,

$$\Pi = \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad \Omega = \Pi \times [0, +\infty),$$

$$G = \Omega \times U_0, \quad \Omega_1 = D \times [0, T] \times [0, +\infty),$$

$$G_1 = \Omega_1 \times U_0.$$

Тогда:

1) компоненты

$$\lambda_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) \text{ и } \mu_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau)$$

$$(1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m)$$

вектор-функций

$$\boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x}, t, \tau) \text{ и } \boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{x}, t, \tau) \quad (1 \leq i \leq m)$$

вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными

$$\frac{\partial^2 \mu_{ij}}{\partial x_k \partial x_\ell}(\mathbf{x}, t, \tau) \quad (1 \leq j, k, \ell \leq n, \quad 1 \leq i \leq m)$$

2-го порядка определены и непрерывны на множестве Ω ;

2) компоненты

$$f_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \text{ и } \varphi_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \quad (1 \leq i \leq m)$$

вектор-функций $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})$ и $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})$ вместе с их частными производными по всем аргументам 1-го порядка и производными

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial u_k}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial u_j \partial x_\ell}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}),$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x_\ell \partial x_r}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}),$$

$$(1 \leq i, j, k \leq m, \quad 1 \leq \ell, r \leq n)$$

2-го порядка определены и непрерывны на множестве G ;

3) компоненты вектор-функций $\boldsymbol{\lambda}_i(\mathbf{x}, t, \tau)$, $\boldsymbol{\mu}_i(\mathbf{x}, t, \tau)$,

$$\chi_i(\mathbf{x}, t, \tau) \equiv \frac{\partial \mu_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau) \int_0^\tau \mu_i(\mathbf{x}, t, \theta) d\theta$$

и матриц-функций

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau), \quad \frac{\partial \mu_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau) \quad (1 \leq i \leq m)$$

равномерно ограничены на множестве Ω_1 ;

4) компоненты вектор-функций $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})$, $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})$,

$$\psi_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) =$$

$$= \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \int_0^\tau \varphi(\mathbf{x}, t, \theta, \mathbf{u}) d\theta +$$

$$+ \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \int_0^\tau \mu_i(\mathbf{x}, t, \theta) d\theta$$

$$(1 \leq i \leq m)$$

и матриц-функций

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}),$$

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}), \quad \frac{\partial \psi_i}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})$$

$$(1 \leq i \leq m)$$

равномерно ограничены на множестве G_1 ;

5) производные

$$\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}$$

$$(1 \leq j, k \leq n, \quad 1 \leq i \leq m)$$

удовлетворяют условиям Липшица по $\mathbf{x}$ с постоянной, не зависящей от $(\mathbf{x}, t, \tau) \in \Omega_1$;

6) производные

$$\frac{\partial f_i}{\partial u_j}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$$

$$(1 \leq i, j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n)$$

удовлетворяют условиям Липшица по $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ с постоянной, не зависящей от $(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \in G_1$;

7) функции

$$\lambda_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) \text{ и } \chi_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) \\ (1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m)$$

непрерывны по $t \in [0, T]$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t, \tau) \in \Omega_1$;

8) функции

$$f_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \text{ и } \varphi_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \quad (1 \leq i \leq m)$$

непрерывны по $t \in [0, T]$ равномерно относительно $(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) \in G_1$;

9) равномерно относительно

$$(\mathbf{x}, t) \in D \times [0, T]$$

существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int_0^N \mu_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int_0^N \frac{\partial \mu_{ij}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \tau) d\tau = 0,$$

$$1 \leq j, k \leq n, \quad 1 \leq i \leq m;$$

10) равномерно относительно

$$(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \in D \times [0, T] \times U$$

существуют пределы

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int_0^N \varphi_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) d\tau = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial u_j}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) d\tau = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/4}} \int_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) d\tau = 0,$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{1/2}} \int_0^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) d\tau = 0,$$

$$1 \leq i, j \leq m, \quad 1 \leq k \leq n;$$

11) существуют такие вектор-функции $\Lambda_i(\mathbf{x}, t)$, определенные на Π со значениями в $\mathbb{R}^n$, что равномерно относительно $(\mathbf{x}, t) \in D \times [0, T]$ справедливы предельные равенства для ее компонент Λ_{ij}

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{x}, t) = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N (\lambda_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau) + \chi_{ij}(\mathbf{x}, t, \tau)) d\tau, \\ 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m;$$

12) существует такая вектор-функция $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t, \mathbf{u})$, определенная на множестве $\Pi \times U_0$ со значениями в $\mathbb{R}^m$, что для ее компонент F_i справедливы предельные равенства

$$F_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) = \\ = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \int_0^N (f_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u}) + \psi_i(\mathbf{x}, t, \tau, \mathbf{u})) d\tau, \\ 1 \leq i \leq m$$

равномерно относительно

$$(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}) \in D \times [0, T] \times U_0;$$

13) для любого начального условия $(\mathring{\mathbf{y}}, t_0) \in \Pi$ и любого i такого, что $1 \leq i \leq m$, задача

$$\frac{d\mathbf{y}^i}{dt} = \Lambda_i(\mathbf{y}^i, t), \quad \mathbf{y}^i(t_0) = \mathring{\mathbf{y}} \quad (3)$$

имеет на участке $t \in [0, T]$ решение $\mathbf{y}^i(t)$.

Наряду с возмущенной задачей (1), (2) в параллелепипеде Π_0 рассмотрим во всем слое Π усредненную задачу

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \Lambda_{ij}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_i(\mathbf{x}, t, \mathbf{v}), \quad (4)$$

$$1 \leq i \leq m,$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)|_{t=0} = \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad (5)$$

относительно которой предположим следующее:

14) данная задача имеет решение

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \subset U_0.$$

Ниже символом $|\mathbf{a}|$ будем обозначать какую-либо норму векторов $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$.

Теорема. При указанных выше предположениях справедливы следующие утверждения.

1. Для любого открытого ограниченного параллелепипеда D_0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\omega_0 > 0$, что при $\omega > \omega_0$ существует решение $\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}, t)$ задачи (1), (2) в Π_0 и для любых $(\mathbf{x}, t) \in \Pi_0$ выполняется неравенство

$$|\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}, t) - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)| < \varepsilon. \quad (6)$$

2. Решение $\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}, t)$ задачи (1), (2) единственно в следующем смысле. Для любого ограниченного параллелепипеда D^0 в $\mathbb{R}^n$ существует число $\omega^0 > 0$ такое, что для любого параллелепипеда D_1 в $\mathbb{R}^n$, содержащего D^0 , сужение на $\Pi^0 = D^0 \times [0, T]$ каждого решения задачи (1), (2) в $\Pi_1 = D_1 \times [0, T]$ при $\omega > \omega^0$ совпадает с $\mathbf{u}_\omega(\mathbf{x}, t)$.

Замечание. Если в теореме речь вести не о любом параллелепипеде D_0 , а о фиксированном, то в условиях 1)–14) параллелепипед D и слой Π можно заменить фиксированными ограниченными параллелепипедами D' и $\Pi' = D' \times [0, T]$ соответственно. Здесь D' — открыт, $D_0 \subset D' \subset \mathbb{R}^n$ и существует замкнутый параллелепипед $D'' \subset D'$ такой, что решение $\mathbf{y}$ задачи (3) при $(\mathbf{y}^0, t_0) \in \Pi_0$ удовлетворяет условию: $\mathbf{y}(t) \in D'', t \in [0, T]$.

Доказательство.

1. Определим характеристики двух задач (1), (2) в Π_0 и (4), (5) в Π . Они находятся соответственно как решения следующих двух задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt} = \lambda_i(\mathbf{x}^i, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \mu_i(\mathbf{x}^i, t, \omega t),$$

$$t \in (0, T),$$

$$\mathbf{x}^i(t_0) = \overset{\circ}{\mathbf{x}}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{x}} \in D_0, \quad t_0 \in [0, T]; \quad (7)$$

$$\frac{d\mathbf{y}^i}{dt} = \Lambda_i(\mathbf{y}^i, t), \quad t \in (0, T),$$

$$\mathbf{y}^i(t_0) = \overset{\circ}{\mathbf{y}}, \quad \overset{\circ}{\mathbf{y}} \in \mathbb{R}^n, \quad t_0 \in [0, T], \quad (8)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

В силу условия 13) и теоремы 1 из [3], примененной к этим задачам при $\overset{\circ}{\mathbf{y}} = \overset{\circ}{\mathbf{x}}$, существуют число $\omega_1 > 0$ и параллелепипед $D^0 \supset D_0$ в $\mathbb{R}^n$ такие, что при $\omega > \omega_1$ задача (7) разрешима при всех $1 \leq i \leq m$ и значения

решений $\mathbf{x}^i(t)$ и $\mathbf{y}^i(t)$, $t \in [0, T]$ задач (7) и (8) принадлежат D^0 .

Зафиксируем произвольную точку (ξ, θ) в Π_0 и обозначим через $\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(t)$ ($1 \leq i \leq m$) решения задач (7) при $\omega > \omega_1$ и $\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \xi$, $t_0 = \theta$. Через $\mathbf{x}^i(t)$ и $\mathbf{y}^i(t)$ обозначим характеристики, отвечающие задачам (1), (2) и (4), (5) соответственно, выходящие из точки $(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(0), 0)$. Перепишем теперь эти задачи в виде задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (рис. 1)

$$\begin{aligned} \frac{du_i}{dt} &= f_i(\mathbf{x}^i(t), t, \omega t, u_1, \dots, u_m) + \\ &+ \sqrt{\omega} \varphi_i(\mathbf{x}^i(t), t, \omega t, u_1, \dots, u_m), \end{aligned}$$

$$\frac{d\mathbf{x}^i}{dt} = \lambda_i(\mathbf{x}^i, t, \omega t) + \sqrt{\omega} \mu_i(\mathbf{x}^i, t, \omega t), \quad (9)$$

$$t \in (0, T),$$

$$\mathbf{x}^i(0) = \overset{\circ}{\xi}^i, \quad u_i(0) = \overset{\circ}{u}_i,$$

$$\frac{dv_i}{dt} = F_i(\mathbf{y}^i(t), t, v_1, \dots, v_m),$$

$$\frac{d\mathbf{y}^i}{dt} = \Lambda_i(\mathbf{y}^i, t), \quad t \in (0, T), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}^i(0) = \overset{\circ}{\xi}^i, \quad v_i(0) = \overset{\circ}{u}_i,$$

где

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(\mathbf{y}(t), t),$$

$$\overset{\circ}{\xi}^i = \overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(0), \quad \overset{\circ}{u}_i = g_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(0)),$$

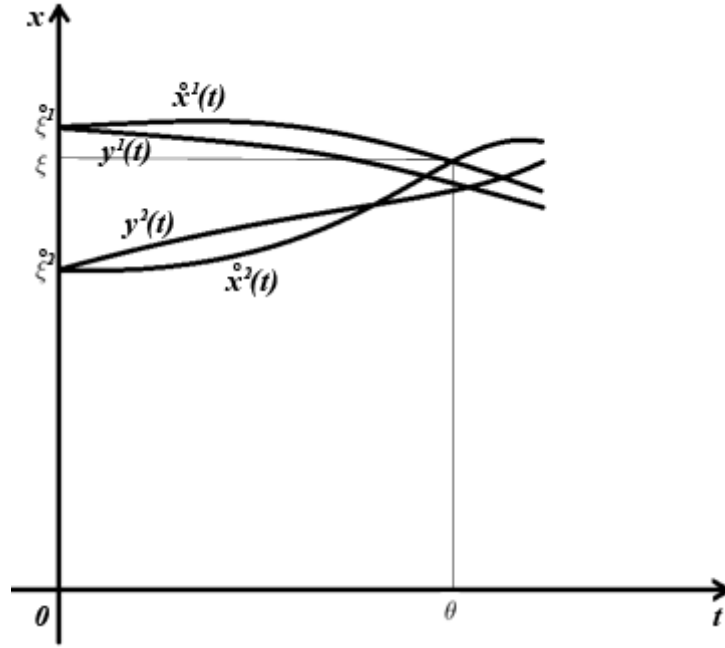
$$1 \leq i \leq m.$$

Пусть U^0 замкнутый шар в $\mathbb{R}^m$ такой, что $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \in U^0 \subset U_0$ при всех $\mathbf{x} \in D^0$.

В силу условий 13), 14) и теоремы 1 из [3], примененной к задачам (9) и (10) при $\overset{\circ}{\xi}^i \in D^0$, $\overset{\circ}{\mathbf{u}} = (\overset{\circ}{u}_1, \dots, \overset{\circ}{u}_m)^* \in U^0$, существует такое число $\omega_2 \geq \omega_1$, что при $\omega > \omega_2$ задача (9) разрешима при всех $(\xi, \theta) \in \Pi_0$. Тогда при $\omega > \omega_2$ разрешима и задача (1), (2) в Π_0 .

Докажем теперь оценку (6) при $(\mathbf{x}, t) = (\xi, \theta) \in \Pi_0$. Согласно определению вектор-функции $\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(t)$ имеем

$$\begin{aligned} u_i(\xi, \theta) - v_i(\xi, \theta) &= \\ &= u_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta) - v_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta) = \\ &= u_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta) - v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta) + \\ &+ v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta) - v_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta), \end{aligned}$$

Рис. 1. Случай $n=1, m=2$

где $\mathbf{y}^i(t)$ определяется задачей (10), $1 \leq i \leq m$. Отсюда в силу неравенства треугольника следует

$$\begin{aligned} |u_i(\xi, \theta) - v_i(\xi, \theta)| &\leq |u_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta) - v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta)| + \\ &+ |v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta) - v_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta)| = \\ &= |u_i(\theta) - v_i(\theta)| + |v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta) - v_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta)| \equiv \\ &\equiv A_1 + A_2, \quad (11) \end{aligned}$$

$$1 \leq i \leq m.$$

Согласно теореме 1 из [3], примененной к задачам (9) и (10), получаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\omega_3 \geq \omega_2$, что при $\omega > \omega_3$

$$A_1 \equiv |u_i(\theta) - v_i(\theta)| < \varepsilon/2, \quad (12)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

Установим аналогичную оценку для слагаемого A_2 в (11). А именно, докажем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\omega_4 \geq \omega_3$, что при $\omega > \omega_4$ выполняется оценка

$$A_2 \equiv |v_i(\mathbf{y}^i(\theta), \theta) - v_i(\overset{\circ}{\mathbf{x}}^i(\theta), \theta)| < \varepsilon/2, \quad (13)$$

$$1 \leq i \leq m.$$

Зафиксируем произвольные точки (ξ'_i, θ) и $(\xi''_i, \theta) \in \Pi_0$ ($1 \leq i \leq m$) такие, что $|\xi'_i - \xi''_i| < \delta$, и проведем через них характеристики $\mathbf{y}^i(\theta; \xi'_i, \theta)$ и $\mathbf{y}^i(\theta; \xi''_i, \theta)$ ($1 \leq i \leq m$) соответственно. Здесь δ — любое малое положительное число. Тогда

$$\begin{aligned} |v_i(\xi'_i, \theta) - v_i(\xi''_i, \theta)| &\equiv \\ &\equiv |v_i(\mathbf{y}^i(\theta; \xi'_i, \theta), \theta) - v_i(\mathbf{y}^i(\theta; \xi''_i, \theta), \theta)| \equiv \\ &\equiv |v'_i(\theta) - v''_i(\theta)|, \quad (14) \end{aligned}$$

где v'_i и v''_i — решения следующих систем:

$$\begin{aligned} \frac{dv'_i}{dt} &= F_i(\mathbf{y}^i(t; \xi'_i, \theta), t, v'_1, \dots, v'_m), \\ \frac{d\mathbf{y}^i}{dt} &= \mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{y}^i, t), \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{y}^i(0) &= \mathbf{y}^i(0; \xi'_i, \theta), \\ v'_i(0) &= g_i(\mathbf{y}^i(0; \xi'_i, \theta)) \end{aligned} \quad (15)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{dv''_i}{dt} &= F_i(\mathbf{y}^i(t; \xi''_i, \theta), t, v''_1, \dots, v''_m), \\ \frac{d\mathbf{y}^i}{dt} &= \mathbf{\Lambda}_i(\mathbf{y}^i, t), \quad t \in (0, T), \\ \mathbf{y}^i(0) &= \mathbf{y}^i(0; \xi''_i, \theta), \\ v''_i(0) &= g_i(\mathbf{y}^i(0; \xi''_i, \theta)) \end{aligned} \quad (16)$$

$$(1 \leq i \leq m)$$

соответственно. В силу условий 2) и 4) по теореме о непрерывной зависимости решения от начальных условий и правой части системы получим

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} |v'_i(\theta) - v''_i(\theta)| = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \quad (17)$$

Положим теперь

$$\xi'_i \equiv y^i(\theta) \text{ и } \xi''_i \equiv \overset{\circ}{x}^i(\theta) \quad (1 \leq i \leq m).$$

Тогда по теореме 1 из [3], примененной для характеристик $\overset{\circ}{x}^i(\theta)$ и $y^i(\theta)$, получим, что при достаточно больших ω условие $|\xi'_i - \xi''_i| < \delta$ будет выполняться. Таким образом, для указанных ξ'_i и ξ''_i верна оценка (17). Откуда с учетом (14) следует оценка (13).

Тогда из (11), (12) и (13) следует неравенство (6). Утверждение 1 теоремы доказано.

2. Утверждение 2 теоремы очевидно. При этом фигурирующий в данном утверждении параллелепипед D^0 определен при доказательстве утверждения 1.

Теорема доказана. $\square$

Автор выражает большую признательность своему научному руководителю В. Б. Левенштаму за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике. Львов: Изд. АН УССР, 1945. 139 с.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 504 с.
3. Капикян А. К., Левенштам В. Б. Уравнения в частных производных первого порядка с большими высокочастотными слагаемыми // Жур. выч. мат. и мат. физ. 2008. Т. 48. № 11. С. 2024–2041.
4. Хома Г. П. Теорема об усреднении для гиперболических систем первого порядка // Укр. мат. журн. 1970. Т. 22. № 5. С. 699–704.
5. Юдович В. И. Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями. Части I–III // Успехи механики. 2006. Т. 4. № 3. С. 26–158.
6. Левенштам В. Б. Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами. I, II // Дифференц. уравнения. 2005. Т. 41. № 6, 8. С. 761–770, 1084–1091.

7. Левенштам В. Б. Обоснование метода усреднения для параболических уравнений, содержащих быстроосциллирующие слагаемые с большими амплитудами // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. Т. 70. № 2. С. 25–56.
8. Левенштам В. Б. Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ, 2010. 415 с.
9. Басистая Д. А., Левенштам В. Б. Асимптотика решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Математика и механика сплошной среды. 2004. С. 46–48.
10. Боголюбов Н. Н. Теория возмущений в нелинейной механике // Сб. института строит. механики АН УССР. 1950. Вып. 4. С. 9–34.
11. Митропольский Ю. А. Методы усреднения в нелинейной механике. Киев.: Наукова думка, 1971. 440 с.
12. Капица П. Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т. 21. № 5. С. 588–599.
13. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 472 с.
14. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1964. 272 с.

References

1. Bogolyubov N. N. *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike* [On some statistical methods in mathematical physics]. Lviv, Izdatelstvo AN USSR Publ., 1945, 139 p. (In Russian)
2. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskie metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 504 p. (In Russian)
3. Kapikyan A. K., Levenshtam V. B. *Uraveneniya v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka s bol'shimi vysokochastotnymi sлагаemymi* [Partial differential equations of the first order with large high-frequency terms]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [J. of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 2008, vol. 48, no. 11, pp. 2024–2041. (In Russian)
4. Khoma G. P. *Teorema ob usrednenii dlya giperbolicheskikh sistem pervogo poryadka* [Averaging theorem for hyperbolic systems of first order]. *Ukrainskiy matematicheskii zhurnal* [Ukrainian Mathematical Journal], 1970, vol. 22, no. 5, pp. 699–704. (In Russian)
5. Yudovich V. I. *Vibrodinamika i vibrogeometriya mekhanicheskikh sistem so svyaziyami*. Chasti

- I–III [Vibrodinamika vibration and the geometry of mechanical systems with constraints. Part I–III]. *Uspekhi mekhaniki* [The success of mechanics], 2006, vol. 4, no. 3, pp. 26–158. (In Russian)
6. Levenshtam V.B. Asimptoticheskoe integrirovaniye differentsial'nykh uravneniy, sodержashchikh bystroostsilliruyushchie slagaemye s bol'shimi amplitudami. I, II [The asymptotic integration of differential equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes. I, II]. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], 2005, vol. 41, no. 6, 8, pp. 761–770, 1084–1091. (In Russian)
 7. Levenshtam V.B. Obosnovaniye metoda usredneniya dlya parabolicheskikh uravneniy, sodержashchikh bystroostsilliruyushchie slagaemye s bol'shimi amplitudami [Justification of the averaging method for parabolic equations containing rapidly oscillating terms with large amplitudes]. *Izvestiya RAN. Seriya matematicheskaya* [Izvestiya RAN. A series of mathematical], 2006, vol. 70, no. 2, pp. 25–56. (In Russian)
 8. Levenshtam V.B. *Differentsial'nye uravneniya s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi* [Differential equations with large high-frequency terms]. Rostov-on-Don, Izd. YuFU Publ., 2010, 415 p. (In Russian)
 9. Basistaya D.A., Levenshtam V.B. Asimptotika resheniy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy s bol'shimi vysokochastotnymi slagaemymi [The asymptotic behavior of the solutions of ordinary differential equations with large high-frequency terms]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. Spetsvy-pusk. Matematika i mekhanika sploshnoy sredy* [Math. universities. North-Caucasus region. Nature Science. Special Issue. Mathematics and continuum mechanics], 2004, pp. 46–48. (In Russian)
 10. Bogolyubov N.N. Teoriya vozmushcheniy v nelineynoy mekhanike [The perturbation theory in nonlinear mechanics]. *Sbornik instituta stroitel'noy mekhaniki AN USSR* [Proc. of the Institute of the USSR Academy of structural mechanics], 1950, iss. 4, pp. 9–34. (In Russian)
 11. Mitropol'skiy Yu.A. *Metody usredneniya v nelineynoy mekhanike* [Methods of averaging in nonlinear mechanics]. Kiev, Naukova dumka Publ., 1971, 440 p. (In Russian)
 12. Kapitsa P.L. Dinamicheskaya ustoychivost' mayatnika pri koleblyushcheysya tochke podvesa [Dynamic stability of a pendulum with a vibrating point of suspension]. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of Experimental and Theoretical Physics], 1951, vol. 21, no. 5, pp. 588–599. (In Russian)
 13. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on mathematical theory of stability]. Moscow, Nauka Publ., 1967, 472 p. (In Russian)
 14. Petrovskiy I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Lectures on the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 272 p. (In Russian)