

УДК 539.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО АКТУАТОРА/СЕНСОРА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛИНОМОВ ЧЕБЫШЕВА

Шпак А. Н.

PIEZOELECTRIC ACTUATOR/SENSOR MODELING WITH FINITE ELEMENT METHOD USING CHEBYSHEV POLINOMIALS

Shpak A. N.*

* Kuban State University, Krasnodar, 350001, Russian Federation
e-mail: alisashpak7@gmail.com

Abstract. Piezoelectric sensors are widely used in the structural health monitoring applications. The failure of a number of the actuators can result in the wrong answer of the whole monitoring system. Therefore dynamic behaviour of the damaged sensors should be investigated. For this purpose a coupled mathematical model of the sensor attached to the composite layer must be developed. In such a model the actuator could be simulated with a high precision finite element method. In this paper the usage of the Chebyshev and Gauss–Legendre–Lobatto polynomials in the high precision finite element model is discussed. The convergence of the displacements and discrepancy between the solution and the boundary conditions are analyzed. The resonance properties of the actuator are studied. The advisability of the Chebyshev polynomials usage for the finite element actuator model is discussed in the conclusion.

Keywords: high precision finite element method, Chebyshev polynomials, Gauss–Legendre–Lobatto polynomials, piezoelectricity, sensor, resonance, integral approach, coupled model.

Введение

В настоящее время пьезоэлектрические сенсоры и актуаторы широко применяются в различных системах мониторинга целостности и работоспособности конструкций. Одним из способов получения информации о состоянии конструкции является возбуждение упругих волн с последующим сравнением отклика системы, записанного с помощью набора пьезоактивных элементов, с эталонным откликом. Такой метод позволяет судить о реальном состоянии конструкции в данный момент времени. В данной схеме пьезоэлектрическим элементам отводится важная роль, выход из строя ряда актуаторов может привести к недостоверной работе всей системы мониторинга. Поврежденные сенсоры могут принимать «здоровый» отклик за сигнал о дефектах в конструкции, и наоборот. Поэтому контроль состояния самих пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов является неотъемлемой частью всей системы мониторинга состояния конструкции.

Отслоение актуатора можно рассматривать как обобщенный вид дефектов — чем

сильнее отслоение от поверхности, тем более поврежден сенсор. Для изучения влияния отслоения актуатора или сенсора на возбуждаемый и принимаемый им сигналы необходима связанная математическая модель, описывающая взаимодействие пьезоэлектрического сенсора с упругим композитом. В [1] для описания актуатора на слое авторы использовали пленочную модель, хорошо работающую для достаточно тонких пьезоактуаторов. Можно использовать еще более простую, несвязанную модель, описанную авторами в [2, 3]. Здесь действие актуатора на упругий слой заменяется точечными силами, величины которых рассчитываются с учетом напряжений, упругих и диэлектрических констант материала и размеров актуатора. Для моделирования реальных актуаторов сложной формы одним из наиболее удобных является метод конечных элементов [4–6], который можно использовать совместно с полуаналитическим интегральным подходом [7, 8], позволяющим эффективно описывать волновые поля в слоистых композитах.

Шпак Алиса Николаевна, младший научный сотрудник Институт математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: alisashpak7@gmail.com

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-08-00370).

Метод конечных элементов высокого порядка точности (МКЭ ВПТ) предполагает использование интерполяционных полиномов специального вида. Для обеспечения эффективности связанной модели необходимо оценить сходимость МКЭ ВПТ и целесообразность использования тех или иных интерполяционных полиномов. В [4] для описания перемещений и напряжений в пьезоэлектрическом актуаторе/сенсоре был использован МКЭ ВПТ на основе полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто. В настоящей статье рассматривается возможность использования полиномов Чебышева для решения аналогичной задачи. Кроме того, производится оценка сходимости метода при использовании разных интерполяционных полиномов в зависимости от их степени и числа элементов, рассчитываются резонансные частоты пьезоактуатора, оценивается их зависимость от геометрии сенсора.

Постановка задачи

Рассматривается пьезоэлектрический актуатор, занимающий область $\Omega = [0, w] \times [0, h]$ с границей $\partial S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$, см. рис. 1. Динамическое поведение пьезоактуатора описывается уравнениями движения для пьезоупругого материала $\forall i, j = \overline{1, 2}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} &= \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial D_i}{\partial x_i} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k},$$

и компоненты вектора электрических смещений

$$D_i = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 e_{ikl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \sum_{k=1}^2 \varepsilon_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial x_k}$$

выражаются посредством вектора перемещений u_k вдоль осей Ox_k , компонент тензора деформаций $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$, электрического потенциала ϕ , и компонент вектора электрического поля $\frac{\partial \phi}{\partial x_k}$. Свойства материала задаются тензором упругих констант C_{ijkl} , тензором констант пьезоэлектрических напряжений e_{kij} , тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik} и плотностью ρ .

Для записи вариационной формулировки уравнения (1) необходимо домножить на некоторые тестовые функции $v_i(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$ и проинтегрировать по заданной области Ω [9]. После применения формулы интегрирования по частям и с учетом свойства тензора упругих постоянных $C_{ijkl} = C_{ijlk} = C_{jilk} = C_{jikl}$ можно записать

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \left[\oint_{\partial \Omega} v_i^s \sigma_{ij} \nu_j dS - \int_{\Omega} \frac{\partial v_i^s}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \right] = \\ = \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} v_j^s \rho \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} d\Omega, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^2 \left[\oint_{\partial \Omega} \psi D_i \nu_i dS - \int_{\Omega} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} D_i d\Omega \right] = 0 \quad (3)$$

Рассматриваются установившиеся колебания $u_k(x_1, x_2, t) = u_k(x_1, x_2) \exp(i\omega t)$ с круговой частотой ω и задаются следующие граничные условия:

- нормальные и касательные напряжения отсутствуют на 2-х границах:

$$\sigma(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3; \quad (4)$$

- напряжения на нижней границе равны некоторой функции $\mathbf{q}(\mathbf{x})$:

$$\sigma(\mathbf{x})\boldsymbol{\nu} = \mathbf{q}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1; \quad (5)$$

- перемещения отсутствуют на границе S_4 :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_4; \quad (6)$$

- на нижней и верхней границах задан электрический потенциал:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) &= V_1, \quad \mathbf{x} \in S_1, \\ \phi(\mathbf{x}) &= V_2, \quad \mathbf{x} \in S_3; \end{aligned} \quad (7)$$

- электрическое поле на боковых границах отсутствует:

$$D \cdot \boldsymbol{\nu} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4. \quad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{\nu}$ — вектор нормали к границе.

В качестве интерполяционных полиномов используются полиномы $\varphi_i(x)$ [10], определенные на интервале $[-1, 1]$ и равные нулю за пределами этого интервала

$$\begin{aligned} \varphi_i(x) &= \frac{2}{N} \sum_{k=0}^N \frac{1}{c_i c_{k-1}} T_k(x_i) T_k(x) = \\ &= \sum_{k=0}^N \beta_{ki} T_k(x), \end{aligned} \quad (9)$$

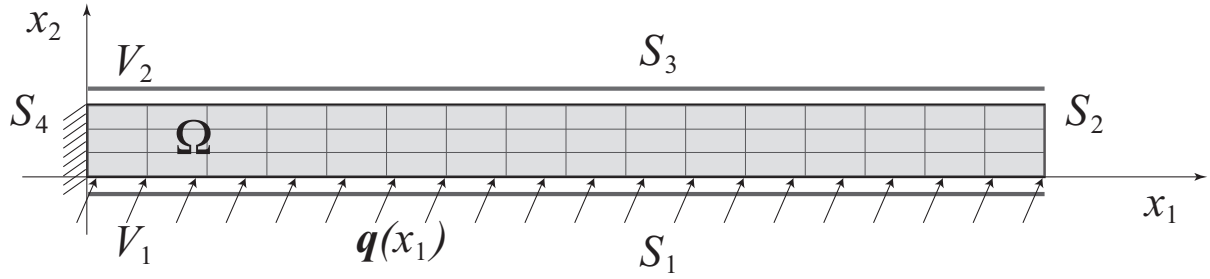


Рис. 1. Постановочная картинка

где $T_k(x)$ — полиномы Чебышева первого рода степени k ,

$$\beta_{ki} = \frac{2}{N c_i c_{k-1}} T_k(x_i),$$

N — максимальная степень интерполяционных полиномов, $i = \overline{1, N+1}$, коэффициенты c_i задаются формулой

$$c_i = \begin{cases} 2, & i = 1, N+1; \\ 1, & i \neq 1, N+1, \end{cases}$$

а x_i — узловые точки, определяемые соотношением [11]

$$x_i = -\cos\left(\frac{\pi(i-1)}{N}\right) \quad i = \overline{1, (N+1)},$$

причем узловые точки x_i , $i = \overline{2, N}$ определяются как корни полиномов Чебышева второго рода $U_{N-1}(x)$ степени $N-1$, а в качестве x_1 , x_{N+1} добавляются крайние точки интервала $[-1, 1]$.

Необходимо отметить следующее важное свойство полиномов $\varphi_i(x)$ [10]

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij},$$

здесь δ — символ Кронекера.

Для построения точного решения уравнений (2), (3) искомую область следует разбить на конечные элементы, на каждом из которых находится численное решение, после чего производится его сшивка на границах конечных элементов. Таким образом, область Ω разбивается на M_i элементов по оси Ox_i

$$\begin{aligned} [0, w] \times [0, h] = \\ = \bigcup_{l_1=1}^{M_1} [x_1^{l_1}, x_1^{l_1+1}] \times \bigcup_{l_2=1}^{M_2} [x_2^{l_2}, x_2^{l_2+1}]. \end{aligned}$$

Поскольку интерполяционные полиномы (9) ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, необходимо ввести следующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} \xi_i^{l_i} &= \frac{2x_i - x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}, \\ x_i &= \frac{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}{2} \xi_i^{l_i} + \frac{x_i^{l_i+1} + x_i^{l_i}}{2}, \\ \frac{d}{dx_i} &= S_i^{l_i} \frac{d}{d\xi_i^{l_i}}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$S_i^{l_i} = \frac{2}{x_i^{l_i+1} - x_i^{l_i}}, \quad (i = 1, 2),$$

связывающее глобальные переменные x_i и локальные переменные $\xi_i^{l_i}$ на элементе l_i , где $l_i = \overline{1, M_i}$ — номер элемента по оси Ox_i .

Решение системы интегральных уравнений (2-3) находится в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left\{ \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \times \right. \\ \left. \times \varphi_{i_1}(\xi_1^{l_1}) \varphi_{i_2}(\xi_2^{l_2}) \right\}, \end{aligned}$$

$$k = \overline{1, 2},$$

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}) = \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} \phi^{l_1 l_2 i_1 i_2} \times \\ \times \varphi_{i_1}(\xi_1^{l_1}) \varphi_{i_2}(\xi_2^{l_2}), \end{aligned} \quad (11)$$

при этом вводятся следующие тестовые функции:

$$\begin{aligned} v_i^s(\mathbf{x}) &= \delta_{is} \varphi_{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi_{p_2}(\xi_2^{t_2}), \\ \psi(\mathbf{x}) &= \varphi_{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi_{p_2}(\xi_2^{t_2}), \\ t_1 &= \overline{1, M_1}, \quad t_2 = \overline{1, M_2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь индекс $i = 1, 2$ указывает на какую из искоемых функций u_1 или u_2 домножается тестовая функция v_i .

При подстановке (11), (12) в (2), (3) производится умножение локально-заданных функций (отличных от нуля только на элементе). Соответственно произведения обращаются в нуль, если функции заданы на разных элементах, т.е.

$$\varphi_{i_1}(\xi_1^{t_1})\varphi_{i_2}(\xi_2^{t_2})\varphi_{p_1}(\xi_1^{t_1})\varphi_{p_2}(\xi_2^{t_2}) = 0, \quad (13)$$

$$l_1 \neq t_1 \vee l_2 \neq t_2.$$

В зависимости от граничных условий выбирается конкретный вид тестовых функций v_i^s и ψ . Например, для выполнения условий (6) тестовые функции выбираются таким образом, что $v_i^s = 0$ при $p_1 = 1, t_2 = 1$ (при $\mathbf{x} \in S_4$). Более подробно способ выбора v_i^s, ψ описан в [4].

Подставляя (11), (12) в (2), (3) можно получить систему линейных алгебраических уравнений для решения задачи с учетом граничных условий (4)–(8). Система имеет вид $A_1 \mathbf{u} = f_1$ для уравнения (2) и $A_2 \mathbf{u} = f_2$ – для уравнения (3), где для удобства принято $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, \phi\}$. Описание построения подобной системы приведено в [4]. Разница заключается в том, что в [4] для расчета определенных интегралов используются квадратурные формулы Гаусса, а в данном случае интегралы считаются аналитически. Для удобства дальнейших преобразований вводятся следующие обозначения:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx = \\ & = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 T_m(x) T_r(x) dx = R_{ij}^I, \\ & \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \varphi_j(x) dx = \\ & = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 \frac{\partial T_m(x)}{\partial x} T_r(x) dx = \\ & = R_{ij}^{ID}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{\partial \varphi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j(x)}{\partial x} dx = \\ & = \sum_{m=0}^N \sum_{r=0}^N \beta_{mi} \beta_{rj} \int_{-1}^1 \frac{\partial T_m(x)}{\partial x} \frac{\partial T_r(x)}{\partial x} dx = R_{ij}^D. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл по контуру из уравнения (2) при подстановке в него (11), (12)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial \Omega} v_i^s \left[\sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^2 e_{kij} \frac{\partial \phi}{\partial x_k} \right] \nu_j dS = \\ & = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \oint_{\partial \Omega} v_i^s \sigma_{ij} \nu_j dS. \quad (15) \end{aligned}$$

С учетом граничных условий (4) этот интеграл равен нулю на границах $S_2 \cup S_3$. Ввиду граничных условий (6) строки матрицы системы, относящиеся к узловым точкам на границе S_4 , заполняются нулями за исключением диагональных элементов, которые приравняются единице, компоненты вектора правой части также приравняются нулю. Таким образом, значения $u_k^{1l_2 1i_2}$ напрямую задаются равными нулю на границе S_4 , поэтому интеграл (15) на этой границе можно не учитывать. На S_1 этот интеграл рассматривается с учетом условий (5). Нормаль к этой границе имеет вид $\boldsymbol{\nu} = \{0, -1\}$. Все коэффициенты, относящиеся только к границе S_1 , содержат дополнительный множитель $\delta_{t_2 1}$. Тогда с учетом преобразования координат (10) можно перейти к интегралу

$$\begin{aligned} & - \sum_{i=1}^2 \int_{S_1} v_i^s(\mathbf{x}) q_i(\mathbf{x}) dS_1 = - \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \delta_{t_2 1} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \varphi_{p_1}(\xi_1^{t_1}) \varphi_{p_2}(\xi_2^{t_2}) q_i(X, 0) \frac{1}{S_1^{t_1}} d\xi_1^{t_1} \Big|_{\xi_2^{t_2} = -1} = \\ & = - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2 1} \delta_{t_2 1} \sum_{m=0}^N \beta_{mp_1} \hat{q}_i^{mt_1}, \end{aligned}$$

где

$$X = \frac{x_1^{t_1+1} - x_1^{t_1}}{2} \xi_1^{t_1} + \frac{x_1^{t_1+1} + x_1^{t_1}}{2},$$

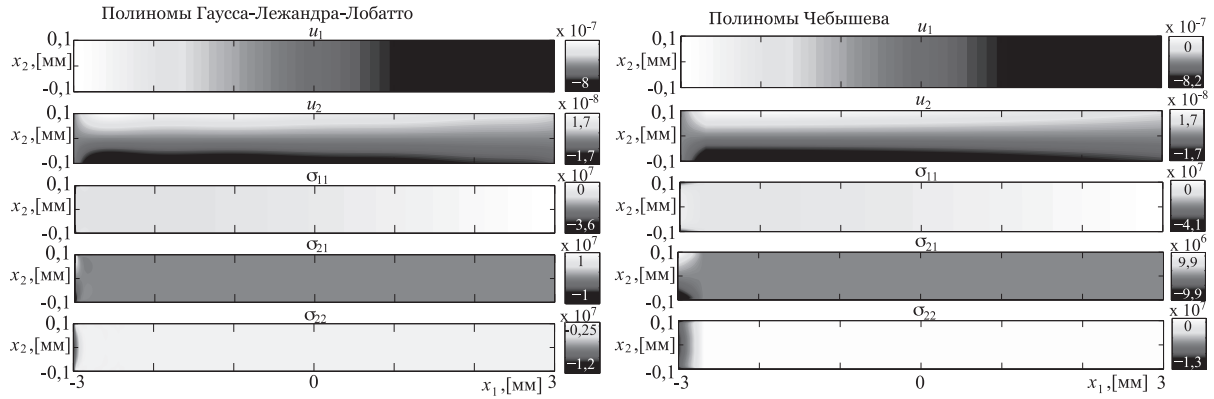


Рис. 2. Перемещения и напряжения на частоте 100кГц с использованием интерполяционных полиномов Гаусса-Лежандра-Лобатто (слева) и Чебышева (справа)

$$\hat{q}_i^{mt_1} = \int_{-1}^1 T_m(\xi_1^{t_1}) q_i(\nu, 0) d\xi_1^{t_1}. \quad (16)$$

При заданных значениях m , i и t_1 интеграл в (16) можно посчитать аналитически, для удобства он обозначен как $\hat{q}_i^{mt_1}$.

Учитывая (14) и (16), итоговая система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{l_1 t_1} \delta_{l_2 t_2} \times \\ & \times \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(\sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} C_{i1k1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \right. \right. \\ & - C_{i1k2} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - C_{i2k1} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \\ & \left. \left. - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} C_{i2k2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{S_1^{l_1} S_2^{l_2}} \rho \omega^2 \delta_{ks} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^I \right) + \\ & + \delta_{k3} \sum_{i=1}^2 \delta_{is} \left[-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1i1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \\ & - e_{2i1} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - e_{1i2} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \\ & \left. \left. - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2i2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right] \right\} = \\ & = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{S_1^{t_1}} \delta_{is} \delta_{p_2, 1} \delta_{t_2, 1} \sum_{m=0}^N \beta_{mp_1} \hat{q}_i^{mt_1}, \quad (17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \sum_{l_1=1}^{M_1} \sum_{l_2=1}^{M_2} \sum_{i_1=1}^{N+1} \sum_{i_2=1}^{N+1} u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2} \delta_{l_1 t_1} \delta_{l_2 t_2} \times \\ & \times \left\{ (\delta_{k1} + \delta_{k2}) \left(-\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} e_{1k1} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I - \right. \right. \\ & - e_{1k2} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} - e_{2k1} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} - \\ & \left. \left. - \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} e_{2k2} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right) + \right. \\ & + \delta_{k3} \left(\frac{S_1^{l_1}}{S_2^{l_2}} \varepsilon_{11} R_{p_1 i_1}^D R_{p_2 i_2}^I + \varepsilon_{12} R_{p_1 i_1}^{ID} R_{i_2 p_2}^{ID} + \right. \\ & \left. + \varepsilon_{21} R_{i_1 p_1}^{ID} R_{p_2 i_2}^{ID} + \frac{S_2^{l_2}}{S_1^{l_1}} \varepsilon_{22} R_{p_1 i_1}^I R_{p_2 i_2}^D \right) \left. \right\} = 0. \quad (18) \end{aligned}$$

Численный анализ

Для верификации модели было выполнено сравнение с результатами, описанными в [4]. При проведении численного анализа использованы характеристики пьезоактуатора из материала PIC 155 производства PI Ceramic GmbH (Германия). Все приведенные ниже результаты получены при значениях электрических потенциалов $V_1 = 50$ В и $V_2 = 0$ В и с приложением к нижней границе актуатора поверхностной нагрузки $q_1 = 5$ Н/м² и $q_2 = 10$ Н/м². На рис. 2–7 представлены результаты моделирования сенсора размером $6 \times 0,2$ мм на разных частотах.

На рис. 2 показаны графики перемещений и напряжений для пьезоактуатора, рассчитанные для частоты 100 кГц с использованием полиномов Чебышева (описываемая в работе модель) и Гаусса-Лежандра-Лобатто [4]. Можно видеть, что оба вида интерполяцион-

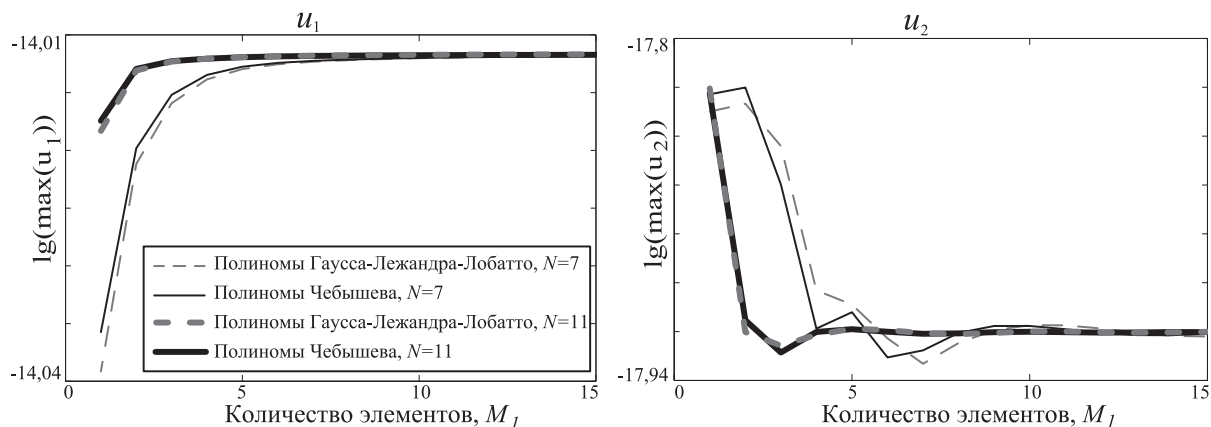


Рис. 3. Оценка сходимости в перемещениях при использовании разного числа элементов

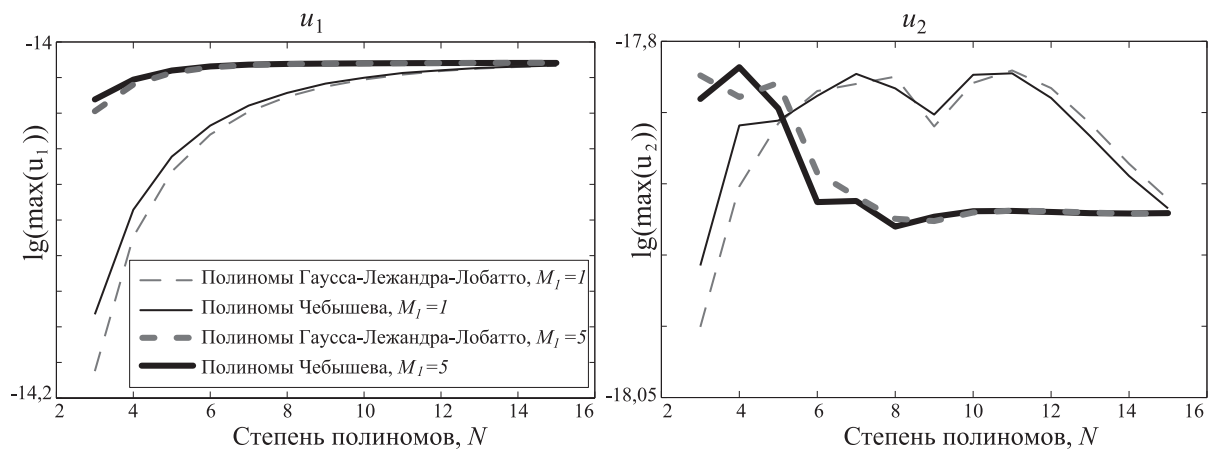
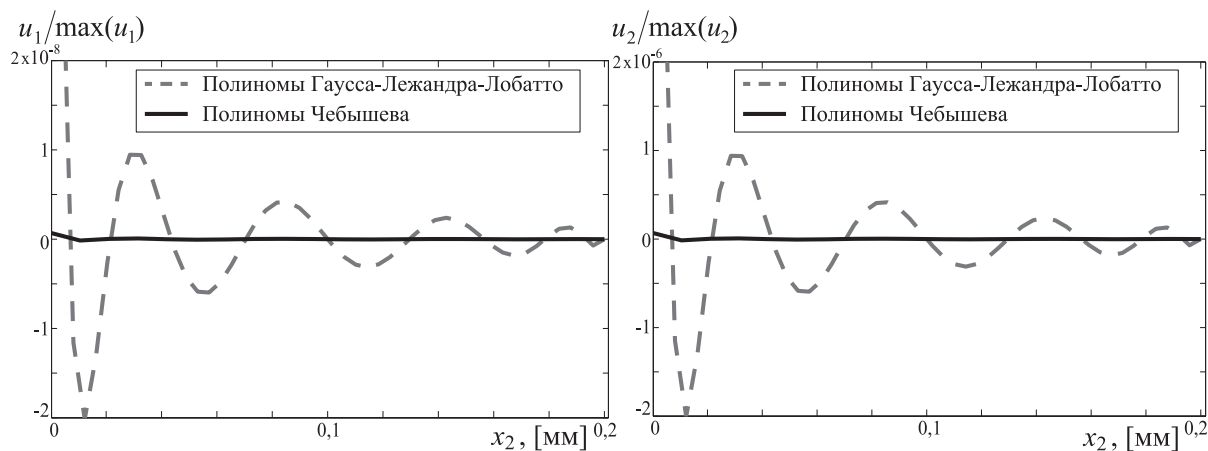
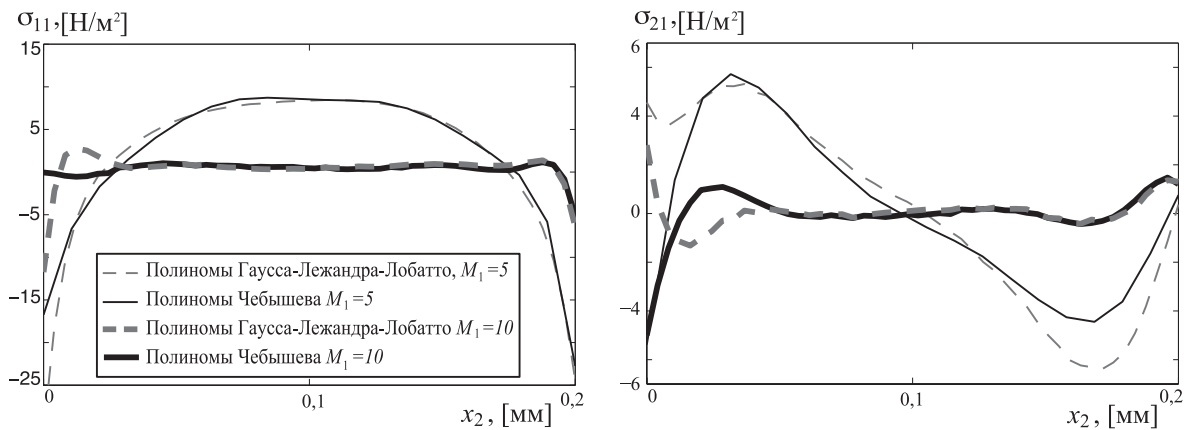
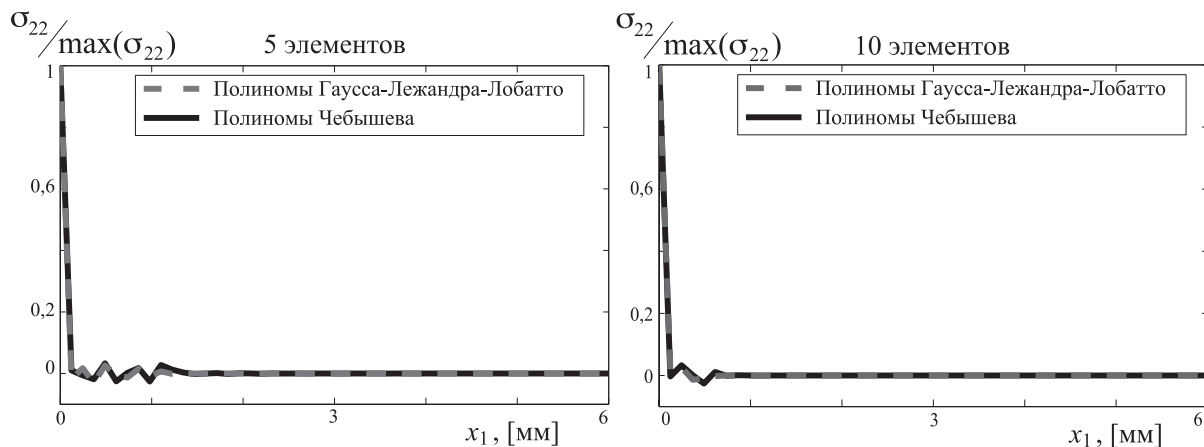


Рис. 4. Оценка сходимости в перемещениях при использовании полиномов разной степени

Рис. 5. Относительные значения перемещений u_1 (слева) и u_2 (справа) на границе S_4 , рассчитанные с использованием $N = 10$ элементов


 Рис. 6. Напряжения σ_{11} (слева) и σ_{21} (справа) на границе S_2

 Рис. 7. Относительные значения напряжений σ_{22} на границе S_1 , рассчитанные с использованием 5 (слева) и 10 (справа) элементов

ных полиномов дают очень близкие значения перемещений и напряжений. Небольшое исключение составляют значения касательных напряжений σ_{21} в окрестности границы S_4 .

Более полный анализ предполагает исследование сходимости и оценки выполнения граничных условий для разных базисных функций (полиномов Чебышева и Гаусса-Лежандра-Лобатто). Графики сходимости при разном числе элементов и фиксированной степени интерполяционных полиномов на примере перемещений представлены на рис. 3.

На рис. 4 приведены аналогичные графики, но полученные на основе интерполяционных полиномов разных степеней с использованием одного или пяти элементов. Эти графики демонстрируют, что достаточно хорошая точность достигается уже при использовании 3-х элементов и степени интерполяционных полиномов $N = 11$. Если использовать поли-

номы степени $N = 7$, то следует разбивать искомую область примерно на 8 конечных элементов. Исследуя сходимость, можно заключить, что для получения точного решения необходимо сначала повышать степень N интерполяционных полиномов, а затем увеличивать количество элементов. Аналогичные оценки были получены для уравнения Лапласа в [5] и для анизотропных упругих материалов в работе [11].

Также была исследована сходимость перемещений и напряжений на границах к значениям, определяемым граничными условиями. Относительные значения перемещений на границе S_4 (здесь согласно граничным условиям перемещения равны нулю) представлены на рис. 5. Использование полиномов Чебышева дает немного более точную аппроксимацию перемещений на границе нежели полиномов Гаусса-Лежандра-Лобатто, которые также обеспечивают приемлемую точность.

Таблица 1. Резонансные частоты актуатора f_n , кГц

Номер частоты n	Полиномы Чебышева		Полиномы Гаусса-Лежандра-Лобатто	
	1 элемент	10 элементов	1 элемент	10 элементов
1	3,263	3,253	3,264	3,253
2	20,324	20,268	20,331	20,268
3	56,365	56,220	56,386	56,221
4	109,042	108,718	109,075	108,719
5	127,322	127,027	127,358	127,025
6	177,816	176,779	175,578	176,783

Согласно граничным условиям (4), напряжения σ_{11} и σ_{21} должны быть равны нулю на границе S_2 . На графиках, приведенных на рис. 6 можно видеть, что точность выполнения граничных условий выше при использовании 10 элементов по сравнению с разбиением на 5 элементов.

На границе S_1 напряжения σ_{12} и σ_{22} должны быть равны заданным поверхностным нагрузкам q_1 и q_2 соответственно. Причем на границе S_4 эти величины принимают довольно высокие значения, поскольку здесь не заданы никакие условия на напряжения. Из-за этого при переходе от S_4 к S_1 возникает относительно высокая ошибка в окрестности нижнего левого угла. Для устранения этой погрешности и получения адекватных значений напряжений на границе S_1 необходимо использовать достаточно большое количество элементов (для целей настоящей работы — 10 элементов).

На рис. 7 представлены графики относительных значений напряжений σ_{22} , рассчитанные с использованием 5 (слева) и 10 (справа) элементов. Анализируя графики на рис. 2–7, можно заключить, что решение примерно одинаковой точности может быть получено при использовании как полиномов Чебышева, так и полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто.

Описанный метод позволяет исследовать резонансные свойства актуатора. В данной работе для контроля использовалось два подхода к нахождению резонансных частот актуатора f_n . Для одного конечного элемента резонансные частоты можно определить из условия равенства нулю определителя матрицы СЛАУ (17), (18). В общем случае при использовании произвольного количества конечных элементов резонансные частоты вычислялись как локальный максимум суммы квадратов компонент вектора-решения $u_k^{l_1 l_2 i_1 i_2}$.

В табл. 1 представлены резонансные частоты актуатора размером $6 \times 0,2$ мм, рассчитанные с использованием интерполяционных полиномов Чебышева, и аналогичные данные, полученные в [4] с помощью полиномов Гаусса–Лежандра–Лобатто. При использовании небольшого числа элементов, значения резонансных частот оказываются немного завышены.

Аналогичная зависимость наблюдается и для расчетов в среде Comsol [4]. Табл. 1 демонстрирует, что выбор интерполяционных полиномов практически не влияет на рассчитываемое значение резонансной частоты, чего нельзя сказать о выборе количества конечных элементов.

На рис. 8–9 представлены графики изменения резонансных частот в зависимости от размеров актуатора в диапазоне частот до 150 кГц. При увеличении ширины актуатора резонансные частоты сгущаются и смещаются в сторону более низких частот. А при увеличении высоты сенсора (рис. 9) резонансные частоты смещаются в сторону более высоких. На этих графиках можно видеть два семейства резонансных частот, обозначенных сплошными и пунктирными линиями. Траектории изменения резонансных частот не имеют точек пересечения, за исключением частоты, пересекающей все остальные, она обозначается пунктирной линией на рис. 8–9.

Следует отметить, что на второе семейство резонансных частот очень мало влияет изменение высоты актуатора. Тем не менее при изменении ширины актуатора все значения резонансных частот f_n сдвигаются в сторону более низких частот. Аналогичный эффект был описан в [12], где рассматривалось влияние ширины и глубины залегания полосовой трещины в упругом слое на резонансные свойства.

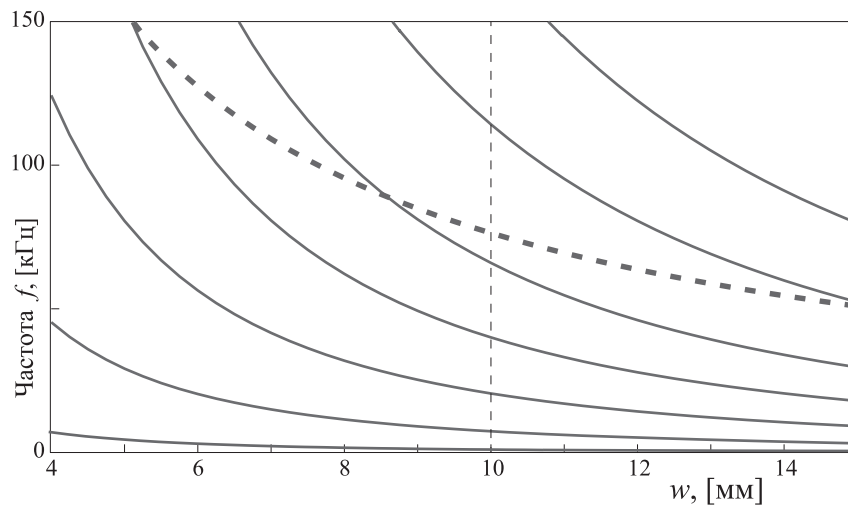


Рис. 8. Резонансные частоты актуатора высотой 0,2 мм

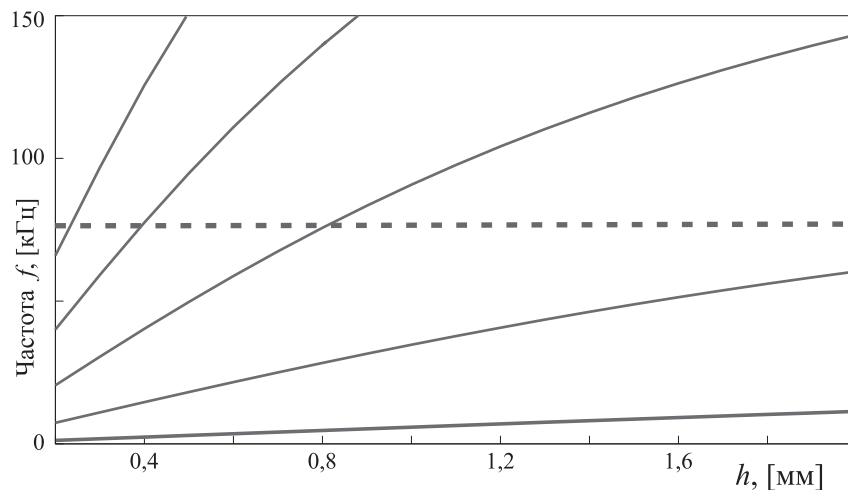


Рис. 9. Резонансные частоты актуатора шириной 10 мм

Закключение

В данной работе описан подход к моделированию пьезоэлектрического актуатора МКЭ ВПТ с использованием полиномов Чебышева, проведена оценка сходимости метода и степени выполнения граничных условий при использовании разного количества конечных элементов и интерполяционных полиномов разной степени, а также выполнено сравнение результатов моделирования с аналогичными результатами, полученными в [4], где для расчета использовались полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто. В качестве выводов можно отметить, что, во-первых, для достижения оптимальной точности решения необходимо сначала повышать степень N интерполяционных полиномов, а затем увеличивать количество элементов. Во-вторых, было

показано, что интерполяционные полиномы Чебышева, как и интерполяционные полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто могут быть использованы для моделирования сенсора МКЭ ВПТ, причем точность решения слабо зависит от вида используемых полиномов. В работе исследованы резонансные свойства актуатора: рассчитаны резонансные частоты и проанализирована их зависимость от изменения размеров сенсора.

Настоящая работа служит основой для создания связанной математической модели, описывающей динамическое поведение пьезоактуатора на упругой многослойной подложке и возбуждаемые им волновые поля. В таком гибридном подходе актуатор будет описываться МКЭ ВПТ, а перемещения в слое — полуаналитическим интегральным подходом [7]. Решение будет строиться в частотной области,

после чего с использованием преобразования Лапласа будет рассчитываться нестационарное решение. Учитывая данную схему, для достижения непрерывности в перемещениях и напряжениях в области контакта актуатора со слоем будет необходимо использовать преобразование Фурье от поверхностной нагрузки. В таком случае для моделирования актуатора МКЭ ВПТ значительно выгоднее использовать полиномы Чебышева, поскольку для их преобразования Фурье имеются аналитические выражения, и, как показано в настоящей работе, они дают точность решения, не меньшую, чем полиномы Гаусса–Лежандра–Лобатто.

Автор выражает благодарность канд. физ.-мат. наук М. В. Голубу за активное обсуждение данной работы и ряд ценных замечаний.

Литература

1. Glushkov E., Glushkova N., Kvasha O., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate // *Smart Materials and Structures*. 2007. No. 16. С. 650–664.
2. Giurgiutiu V. Structural health monitoring with piezoelectric wafer active sensors (second edition). Elsevier Academic Press, 2014. 1024 p.
3. Moll J., Fritzen C.-P., Golub M. V., Glushkov E., Glushkova N. Non-axisymmetric lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors // *Sensors and Actuators A:Physical*. 2012. Vol. 174. No. 1. С. 173–180.
4. Голуб М. В., Шпак А. Н., Бюте И., Фритцен К.-П. Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2015. № 4. С. 397–407.
5. Бубенчиков А. М., Попонин В. С., Мельникова В. Н. Математическая постановка и решение пространственных краевых задач методом спектральных элементов // *Вестник томского государственного университета. Математика и механика*. 2008. Vol. 4. № 3. С. 70–76.
6. Iovane G., Nasedkin A. V. Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. II. Finite element simulation // *Applied mathematical modeling*. 2010. Vol. 34. No. 1. С. 47–59.
7. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М: Наука, 1989. 344 с.
8. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in

anisotropic laminate composites // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2011. № 126. С. 2923–2934.

9. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J. M., Sanchez-Sesma F.-J. The spectral element method for elastic wave equations – application to 2-D and 3-D seismic problems // *International journal for numerical methods in engineering*. 1999. № 45. С. 1139–1164.
10. Priolo E., Carlione J. M., Seriani G. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques // *Journal of the Acoustical Society of America*. 1994. Vol. 95. № 2. С. 681–693.
11. Ostachowicz W., Kudela P., Krawczuk M., Zak A. Guided waves in structures for SHM. The time-domain spectral element method. Polish Academy of Sciences. Institute of Fluid Flow Machinery, 2012. 337 с.
12. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Golub M. V., Boström A. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2006. № 119. С. 3589–3598.

References

1. Glushkov E., Glushkova N., Kvasha O., Seemann W. Integral equation based modeling of the interaction between piezoelectric patch actuators and an elastic substrate. *Smart Materials and Structures*, 2007, no. 16, pp. 650–664.
2. Giurgiutiu V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric wafer active sensors (2nd edition). *Elsevier Academic Press*, 2014, 1024 p.
3. Moll J., Fritzen C.-P., Golub M. V., Glushkov E., Glushkova N. Non-axisymmetric lamb wave excitation by piezoelectric wafer active sensors. *Sensors and Actuators A:Physical*, 2012, no. 174(1), pp. 173–180.
4. Golub M. V., Shpak A. N., Bueth I., Fritzen C.-P. Modelirovanie garmonicheskikh kolebaniy i opredelenie rezonansnykh chastot polosovogo p'ezoelektricheskogo aktuatora metodom konechnykh elementov vysokogo poryadka tochnosti [Harmonic motion simulation and resonance frequencies determination of a piezoelectric strip-like actuator using high precision finite element method]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational continuum mechanics], 2015, no. 4, pp. 397–407. (In Russian)
5. Bubenichikov A. M., Poponin V. S., Melnikova V. N. Matematicheskaya postanovka i reshenie prostranstvennykh kraevykh zadach metodom spektral'nykh elementov [The mathematical statement and solution of spatial boundary value problems by means of spectral element method]. *Vestnik tomского gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin

- of Tomskiy State University. Mathematics and Mechanics], 2008, vol. no.3(4), pp. 70–76. (In Russian)
6. Iovane G., Nasedkin A. V. Modal analysis of piezoelectric bodies with voids. II. Finite element simulation. *Applied mathematical modeling*, 2010, vol. 34, no. 1, pp. 47–59.
 7. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Zinchenko Zh. F. *Dinamika neodnorodnykh lineino-uprigih sred* [The dynamics of the heterogeneous linear-elastic solids]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 344 p. (In Russian)
 8. Glushkov E., Glushkova N., Eremin A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *J. of the Acoustical Soc. of America*, 2011, no. 126, pp. 2923–2934.
 9. Komatitsch D., Vilotte J.-P., Vai R., Castillo-Covarrubias J. M., Sanchez-Sesma F.-J. The spectral element method for elastic wave equations — application to 2-D and 3-D seismic problems. *Int. j. for numerical methods in engineering* 1999, no. 45, pp. 1139–1164.
 10. Priolo E., Carlione J. M., Seriani G. Numerical simulation of interface waves by high-order spectral modeling techniques. *The J. of the Acoustical Society of America*, 1994, no. 95(2), pp. 681–693.
 11. Ostachowicz W., Kudela P., Krawczuk M., Zak A. Guided waves in structures for shm. the time-domain spectral element method. *Polish Academy of Sciences. Institute of Fluid Flow Machinery*, 2012. 337 p.
 12. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Golub M. V., Boström A. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack. *The J. of the Acoustical Society of America*, 2006, no. 119, pp. 3589–3598.

Статья поступила 14 декабря 2015 г.

© Шпак А. Н., 2015