

УДК 536.22

ТЕРМОГРАВИТАЦИОННЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Батищев В. А.

THERMO-GRAVITATIONAL BOUNDARY LAYER NEAR THE FREE SURFACE
OF INHOMOGENEOUS FLUID

Batishchev V. A.

Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: batishev-v@mail.ru

Abstract. We study a steady axially-symmetric thermogravitational flow of an inhomogeneous fluid in the horizontal layer caused by an uneven heating of the free boundary. Asymptotic expansions of boundary value problem solutions are constructed for the equations of motion in Oberbeck–Boussinesq approximation at small diffusion coefficients of viscosity and thermal conductivity. We obtained a self-similar solution when the free boundary temperature depends on the radial coordinate by the square law. The principal member of asymptotic expansions describes a non-linear thermogravitational boundary layer near the free surface. Thermocapillary effect is not taken into account. We analyzed two cases. In the first case the boundary layer induces itself by the external flow. In the second case the external flow is set, where the speed order in the boundary layer and outside the layer is equal. We calculated two types of modes near the axis of symmetry — basic and rotational. Basic modes describe fluid flow without rotation. We constructed asymptotic formulae for these modes at small temperature gradient values defined along the free boundary. The rotational modes are due to the bifurcation of the basic modes. The rotational modes have current and countercurrent flotation zones near the free boundary. According to the parameters of the problem the temperature in the boundary layer is either monotonic or has one or two points of the local extremum. When the free boundary is heated, there is only one basic mode near the axis of symmetry. When it is cooled, there are either two basic or two rotational modes. Basic modes exist only if the external flow rate exceeds a critical value. There are only rotating modes when the speed does not exceed this value. At the fluid rotation the heat flow in the boundary layer is directed towards the axis of symmetry. The fluid rotation is absent outside the boundary layer.

Keywords: Oberbeck–Boussinesq approximation, free surface, boundary layer, rotation, bifurcation.

Введение

Нелинейные пограничные слои, возникающие вблизи свободной границы, могут быть вызваны различными причинами, в том числе и термокапиллярным эффектом Марангони в результате воздействия градиента температуры вдоль свободной поверхности. Впервые результаты расчетов пограничного слоя Марангони опубликованы в статье Л. Г. Наполитано в 1979 г. [1]. После этой публикации появился цикл статей по слоям Марангони, что связано с экспериментальными исследованиями в космосе. Отметим работу В. В. Пухначева [2], посвященную групповому анализу уравнений нестационарного термокапиллярного пограничного слоя. Ветровые нагрузки, действующие на свободную поверхность, могут со-

здавать поверхностные касательные напряжения, приводящие к возникновению нелинейного пограничного слоя. Впервые этот слой рассчитан В. Я. Шкадовым [3]. Касательные напряжения на свободной границе могут возникать при неравномерном распределении примеси на этой поверхности, что приводит к образованию концентрационного пограничного слоя. Отметим, что в случае однородной жидкости уравнения пограничного слоя совпадают с уравнениями Прандтля, так как течение жидкости описывается системой уравнений Навье–Стокса. Итак, в перечисленных случаях в однородной жидкости пограничный слой вызван воздействием касательных напряжений на свободную границу. В неоднородной жидкости, движение

которой описывается системой уравнений в приближении Обербека–Буссинеска, возникает иная ситуация. Нелинейный пограничный слой может сформироваться как при наличии поверхностных касательных напряжений, так и при их отсутствии. Это связано с обратным влиянием поля температур на поле скоростей внутри слоя жидкости, так как температура входит в уравнения движения в члене с силой тяжести. Отметим, что при учете внешнего потока жидкости в случае небольших поверхностных градиентов температуры, скорость этого потока может значительно превосходить погранслоиную поправку к скорости жидкости, что приводит к возможности линеаризации уравнений движения в пограничном слое. В этом случае при проведении расчетов сначала определяется поле температур из линейного уравнения, а затем рассчитывается поле скоростей. Теперь поверхностные касательные напряжения не являются основной причиной возникновения пограничного слоя, как это имеет место в однородной жидкости. Ниже приведены результаты расчетов термогравитационного осесимметричного пограничного слоя вблизи свободной границы при отсутствии поверхностных касательных напряжений. Поверхностный градиент температуры направлен либо к оси симметрии, либо в противоположную сторону. В первом случае найдено одно автомодельное решение уравнений движения жидкости. Во втором случае рассчитаны два режима с вращением жидкости и два режима без вращения.

1. Уравнения движения

Рассматривается осесимметричное стационарное течение неоднородной жидкости при малых диффузионных коэффициентах вязкости ν и температуропроводности χ . Жидкость заполняет горизонтальный слой толщины h , ограниченный снизу твердой стенкой S , а сверху свободной границей Γ . Течение жидкости вызвано неравномерным распределением температуры на поверхности Γ , причем поверхностный градиент температуры вблизи оси симметрии либо отрицателен, либо положителен. Расчет течений жидкости основан на системе уравнений движения в приближении Обербека–Буссинеска

$$(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} - \mathbf{g} \beta T, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь $\mathbf{v} = \{v_r, v_\theta, v_z\}$ — вектор скорости, r, θ, z — цилиндрические координаты. p — давле-

ние. $\mathbf{g} = \{0, 0, -g\}$, g — ускорение свободного падения. Обозначим через T_* постоянную среднюю температуру слоя жидкости. В уравнениях (1.1) температура T отсчитывается от значения T_* . Параметр β — коэффициент теплового расширения. Осевая симметрия означает, что температура, давление и вектор скорости не зависят от окружной координаты θ . На свободной границе Γ выполняются динамические условия для нормальных и касательных напряжений, кинематическое условие, а также задана температура T_Γ

$$p = 2\nu\rho\mathbf{n}\mathbf{\Pi}\mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad \mathbf{v}\mathbf{n} = 0, \\ 2\nu\rho(\mathbf{\Pi}\mathbf{n} - (\mathbf{n}\mathbf{\Pi}\mathbf{n})\mathbf{n}) = 0, \quad T = T_\Gamma, \quad (r, z) \in \Gamma.$$

На твердой стенке выполняется условие прилипания $\mathbf{v} = 0$ и задана постоянная температура T . В краевых условиях σ — коэффициент поверхностного натяжения. Влиянием термокапиллярного эффекта пренебрегаем, поэтому считаем, что $\sigma = \text{const}$. Давление на свободной поверхности считаем постоянным $p_* = \text{const}$. Через k_1, k_2 обозначены главные кривизны поверхности Γ , \mathbf{n} — вектор внешней нормали к свободной поверхности, $\mathbf{\Pi}$ — тензор скоростей деформации.

Предположим, что распределение температуры вдоль свободной границы вблизи оси симметрии задано по квадратичному закону

$$T_\Gamma = 0,5\tau T_*(r^2/h^2 - \alpha), \quad r \geq 0.$$

Последняя формула содержит два безразмерных параметра τ и α , причем $\alpha > 0$. Параметр τ определяет градиент температуры вдоль свободной границы. Отметим, что при $\tau > 0$ жидкость на свободной границе вблизи оси симметрии охлаждается по сравнению со средней температурой слоя T_* , причем температура границы возрастает с ростом радиальной координаты. В этом случае вблизи оси симметрии может возникать вращательный режим движения жидкости. При $\tau < 0$ свободная граница нагрета вблизи оси симметрии, причем температура границы убывает с ростом координаты r . Вращения жидкости не обнаружено. Факт возникновения вращения при неравномерном нагреве свободной границы обнаружен в работе [4]. В случае однородной жидкости это установлено в [5, 6].

Поместим начало системы координат на свободную поверхность, тогда уравнение твердой стенки представим как $z = -h$. Решение уравнений движения жидкости представим в виде

$$v_r = rF'(s)\nu h^{-2}, \quad v_z = -2\nu h^{-1}F(s),$$

$$v_\theta = rG(s)\nu h^{-2},$$

$$T = T_* h^{-2}(0,5r^2 T_1(s) + h^2 T_2(s)), \quad (1.2)$$

$$p = -\rho\nu^2 h^{-4}(0,5r^2 p_1(s) + h^2 p_2(s)).$$

Переменная сведена по формуле $s = z/h$. Формулы (1.2) описывают термогравитационное течение жидкости в горизонтальном слое с твердой нижней границей и свободной верхней поверхностью только в окрестности оси симметрии Oz и не распространяются на случай больших значений радиальной координаты. Ниже будет показано, что решению (1.2) удовлетворяет горизонтальная свободная граница с уравнением $z = 0$.

Введем параметр ε по формуле $\varepsilon^2 = \nu^2/(g\beta T_* h^3)$. Отметим, что параметр ε является малым для конечных значений параметра h .

Подставляя функции (1.2) в уравнения движения (1.1) и в краевые условия, разделяем переменные. Выводим, что функции F , G , T_1 , T_2 , p_1 , p_2 определяются из краевой задачи, которая содержит малый параметр ε^2 только в уравнении, содержащем ускорение свободного падения. Вводя преобразование $F(s) = f(s)/\varepsilon$, $G(s) = G_c(s)/\varepsilon$, приходим к краевой задаче

$$\varepsilon f^{(4)} = -2(ff''' + G_c G_c') + T_1 \quad (1.3)$$

$$\varepsilon T_1'' = 2\text{Pr}(T_1 f' - f T_1'),$$

$$\varepsilon T_2'' = -2\text{Pr} f T_2, -2\varepsilon T_1,$$

$$\varepsilon G_c'' = 2(f' G_c - f G_c'),$$

$$f = 0, \quad f'' = 0, \quad G_c' = 0 \quad (s = 0)$$

$$T_1 = \tau, \quad T_2 = -\alpha\tau/2 \quad (s = 0),$$

$$f = f' = G_c = T_1 = T_2 = 0 \quad (s = -1).$$

Здесь $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля. В расчетах полагаем $\text{Pr} = 7$. Функции p_1 и p_2 вычисляем по формулам

$$p_1 = -\frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^s T_1 ds,$$

$$p_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(2f^2 + 2\varepsilon f'' - \int_0^s T_2 ds \right) + \text{const}.$$

Полагая $s = 0$ в последних формулах, находим, что давление на свободной границе постоянно, а сама граница горизонтальна: $z = 0$. Учитывая формулу для давления в

соотношениях (1.2), в которой коэффициент ν выражаем через параметр ε , выводим, что вклад функций p_1 и p_2 в давление p имеет порядок $O(1)$.

Отметим, что краевая задача (1.3) распадается на две задачи. Сначала вычисляем функции f , T_1 , G_c , а затем находим $T_2(s)$.

2. Асимптотический метод

Наличие малого параметра перед старшими производными в уравнениях системы (1.3) означает, что вблизи свободной поверхности формируется термогравитационный пограничный слой. Вне этого слоя в главном приближении течение жидкости удовлетворяет уравнениям движения в невязком приближении. Для определения порядков функций f , T_1 , T_2 , G_c , а также порядка толщины пограничного слоя введем преобразования переменных

$$s = \varepsilon^k s_1, \quad f = \varepsilon^n F_1(s_1),$$

$$G_c = \varepsilon^m G_1(s_1). \quad (2.1)$$

Подставляем формулы (2.1) в краевую задачу (1.3), оцениваем порядки главных членов в уравнениях и в краевых условиях и находим параметры k , n , m . Рассмотрим два случая. В первом случае внешний поток индуцируется пограничным слоем, поэтому скорость внешнего потока (вне области пограничного слоя D_Γ) имеет более высокий порядок малости при $\varepsilon \rightarrow 0$, чем скорость жидкости в области D_Γ . Во втором случае рассматривается такое течение жидкости, при котором порядки скоростей одинаковы в пограничном слое и во внешней области. В первом случае находим, что $k = 2/5$, $n = 3/5$ и $m = 1/5$. Толщина пограничного слоя имеет порядок $O(\varepsilon^{2/5})$. Из формул (1.2) и (2.1) следует, что радиальная и окружная компоненты скорости в пограничном слое D_Γ имеют одинаковый порядок $O(\varepsilon^{1/5})$. Порядок осевой компоненты скорости в D_Γ и порядки компонент вектора скорости внешнего течения жидкости равны $O(\varepsilon^{3/5})$. Порядок температуры конечен $O(1)$.

Во втором случае применяем метод пограничного слоя [7]. Функции f , T_1 , T_2 , G_c представим в виде асимптотических разложений при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$f(s) = \varepsilon^{1/5} f_0(s) + \varepsilon^{3/5} (H(\eta) + f_1(s)) + O(\varepsilon), \quad (2.2)$$

$$T_1 = T_{11}(\eta) + \varepsilon^{2/5} (T_{12}(\eta) + T_{10}(s)) + \dots,$$

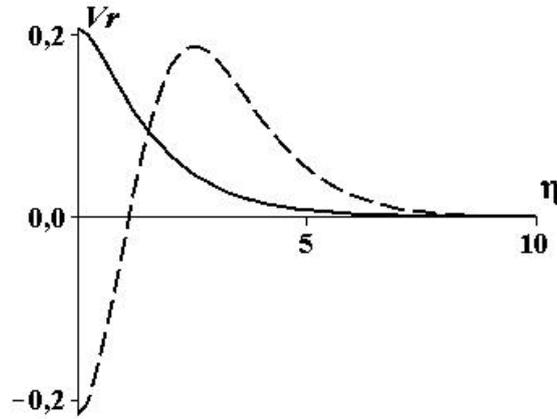


Рис. 1. Распределение радиальной компоненты скорости в пограничном слое

$$T_2 = T_{21}(\eta) + \varepsilon^{2/5}T_{22}(\eta) + \dots,$$

$$\bar{G} = \varepsilon^{1/5}G_0(\eta) + \dots, \quad \eta = -s/\varepsilon^{-2/5}.$$

Отметим, что производная

$$f'(s) = \varepsilon^{1/5}(-H'(\eta) + f'_0(s)) + O(\varepsilon^{3/5})$$

пропорциональна радиальной компоненте скорости. Функции H , T_{11} , T_{12} , T_{21} , T_{22} , G_0 , зависящие от переменной η , определены в пограничном слое D_Γ и исчезают при выходе из этого слоя, кроме функции $H(\eta)$, которая стремится к константе. Условие $G_c \rightarrow 0$ при $\eta \rightarrow +\infty$ означает, что жидкость вращается только в пограничном слое, причем вне этого слоя вращение отсутствует. Функции $f_0(s)$, $f_1(s)$ определены во всей области, пропорциональны осевой компоненте скорости вне D_Γ и описывают внешнее течение жидкости без вращения. Функция $T_{10}(s)$ определяет поправку к значению T_* вне области пограничного слоя. Соответствующая поправка к функции T_2 имеет вид $\varepsilon^{6/5}T_{20}(s)$.

Для определения функций $f_0(s)$, $T_{10}(s)$, $T_{20}(s)$, применяем первый итерационный процесс метода пограничного слоя [7]. Приведем уравнения только для функций $f_0(s)$, $T_{10}(s)$

$$-2f_0f_0'' + T_{10} = 0$$

$$f_0'T_{10} - f_0T_{10}' = 0.$$

Для функции $f_0(s)$ выполняются краевые условия: $f_0(0) = 0$, $f_0(-1) = 0$. Функции $f_0(s)$, $T_{10}(s)$ приводятся к виду $f_0 = Us(s+1)(1+bs)$, $T_{10} = 12Ub f_0(s)$. Здесь параметр U пропорционален скорости внешнего потока на свободной границе. Далее полагаем $b = 0$, что означает $T_{10} = T_{20} = 0$.

Используя разложения (2.2) и применяя второй итерационный процесс [7] к уравнениям Обербека–Буссинеска, выводим систему уравнений пограничного слоя

$$H^{(4)}(\eta) = 2H'''(H - \eta U) + 2G_0G_0' + T_{11},$$

$$T_{11}'' = 2\text{Pr}((H - \eta U)T_{11}' - (H' - U)T_{11}), \quad (2.3)$$

$$T_{21}'' = 2\text{Pr}(H - \eta U)T_{21}',$$

$$G_0'' = 2((H - \eta U)G_0' - (H' - U)G_0).$$

Краевые условия для системы (2.3) приводятся к виду

$$H = 0, \quad H'' = 0, \quad G_0' = 0 \quad (\eta = 0),$$

$$T_{11} = \tau, \quad T_{21} = -\alpha\tau/2 \quad (\eta = 0), \quad (2.4)$$

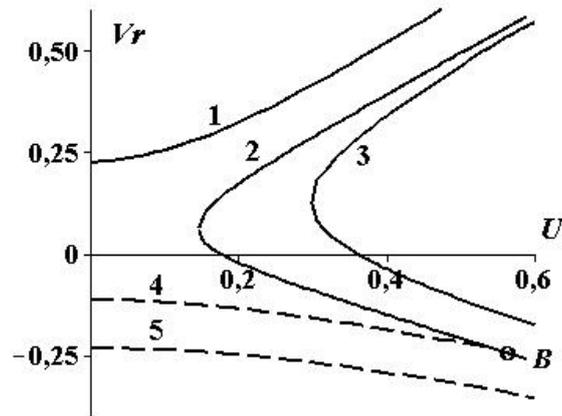
$$H' = H'' = G_0 = T_{11} = T_{21} = 0 \quad (\eta = +\infty).$$

Приведем формулы для расчета осевой q_z и радиальной q_r компонент вектора потока тепла в пограничном слое

$$q_z = \varepsilon^{3/5}q_0 \left(0,5 \left(\frac{r}{h} \right) \frac{dT_{11}}{d\eta} + \frac{dT_{21}}{d\eta} \right), \quad (2.5)$$

$$q_r = -\varepsilon q_0 r T_{11}/h, \quad q_0 = \frac{\sqrt{g\beta T_* h T_*}}{\rho c_p \text{Pr}},$$

Отметим, что эти компоненты имеют разные порядки по параметру ε , так как порядки производных по переменным r и η различны. Радиальная компонента теплового потока q_r


 Рис. 2. Зависимость радиальной компоненты скорости на Γ от параметра U

определяется только функцией $T_{11}(\eta)$ и не зависит от $T_{21}(\eta)$. Приведем главный член асимптотики радиальной компоненты вектора скорости

$$v_r = \varepsilon^{1/5} \sqrt{g\beta T_* h} (U - H'(\eta)) r/h + \dots$$

3. Результаты численных расчетов

Пусть внешний поток индуцируется самим пограничным слоем. В этом случае $U = 0$. Приведем результаты расчетов задачи (2.3)–(2.4), полученные методом пристрелки для $\tau = \pm 1$. На рис. 1 изображена зависимость радиальной компоненты вектора скорости от поперечной координаты в пограничном слое. Значению $\tau = -1$ соответствует сплошная линия. В этом случае при нагреве свободной границы вблизи оси симметрии радиальная компонента вектора скорости положительна и монотонно убывает до нуля при удалении от свободной границы. Вращение жидкости отсутствует. Расчеты профиля температуры в пограничном слое показывают, что при $r \leq r_0$ температура жидкости монотонно убывает при удалении от свободной границы. При $r > r_0$ в профиле температуры имеется одна точка локального максимума. Отметим, что $r_0 \approx 0,7905h$ для $\alpha = 1$.

Пунктирная кривая на рис. 1 соответствует случаю $\tau = 1$. Теперь на свободной границе вблизи оси симметрии жидкость охлаждается по сравнению с областью вне пограничного слоя. Вблизи оси симметрии формируется узкая зона противотечения, в которой жидкость движется к оси симметрии Oz . Вне этой зоны, так же как и в случае $\tau = -1$, жидкость течет от оси Oz . В обоих случаях вне области пограничного слоя D_Γ возникает

медленное невязкое течение, направленное к свободной поверхности. Краевая задача имеет два симметричных решения $H, \pm G_0, T_{11}, T_{21}$ с численными значениями $H'(0) \approx 0,2163$ и $G_0(0) \approx 1,6032$. Этим значениям соответствуют два вращающихся режима, которые отличаются друг от друга только направлением вращения. При удалении от свободной границы Γ окружная компонента вектора скорости монотонно убывает до нуля и вне области пограничного слоя D_Γ вращение отсутствует. Профиль температуры изменяется с ростом радиальной координаты. При $r < r_1$ температура монотонно возрастает, а для $r = r_1$ не убывает с ростом поперечной координаты η . При $r > r_1$ профиль температуры содержит локальный минимум и локальный максимум. Расчеты приводят к значению $r_1 \approx 0,403h$ при $\alpha = 1$. Итак, охлаждение свободной границы вблизи оси симметрии приводит к возникновению вращения жидкости в пограничном слое. В этом случае радиальная компонента потока тепла в пограничном слое направлена к оси симметрии.

Рассмотрим случай когда вне области пограничного слоя имеется внешний поток жидкости со скоростью, пропорциональной параметру U . Режимы течений жидкости находятся путем численного расчета краевой задачи (2.3)–(2.4) при $U > 0$. На рис. 2 представлены графики изменения радиальной компоненты вектора скорости точек свободной границы Γ в зависимости от параметров U и τ . Режимы течений жидкости разделим на основные и вращательные. Основным режимам соответствует течение жидкости без вращения ($v_\theta = 0$). У вращательных режимов $v_\theta \neq 0$. Эти режимы возникают в результате бифур-

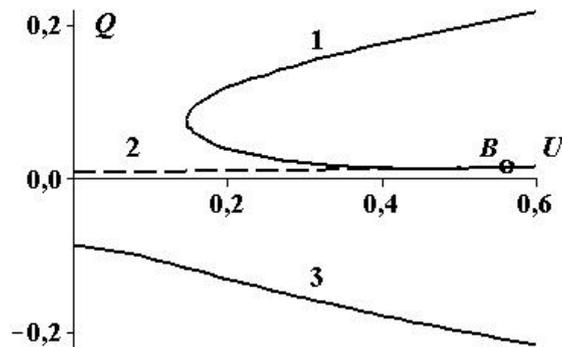


Рис. 3. Зависимость амплитуды теплового потока Q от параметра U

кации основных режимов. На рис. 2 кривым 1–3 соответствуют основные режимы, а кривым 4 и 5 — вращательные. Кривая 1 рассчитана для $\tau = -1,2$. В этом случае для каждого неотрицательного значения параметра U получено только одно решение краевой задачи. Внутри области пограничного слоя при удалении от свободной границы радиальная компонента вектора скорости монотонно убывает до значения U . Температура жидкости либо монотонно убывает с ростом поперечной координаты η , либо имеет один локальный максимум.

Кривая 3 на рис. 2 построена для значения $\tau = 1,2$. Здесь основные режимы существуют только, если параметр U превышает предельное значение U_* , равное приблизительно 0,3004. Для каждого значения $U > U_*$ рассчитано по два решения, отличающиеся друг от друга формами профилей скорости и температуры. Для значений параметра U , для которых на поверхности Γ выполняется условие $V_r < 0$, имеются зоны тока и противотока. В области противотока, примыкающей к свободной границе, жидкость движется к оси симметрии Oz . В области тока в пограничном слое и в области внешнего течения векторы скорости сонаправлены. Для тех точек кривой 3, у которых на свободной границе $V_r > 0$ зона противотока отсутствует. Кривая 2 соответствует значению $\tau = 0,2$. В этом случае $U_* \approx 0,1467$. Во всех случаях профили скоростей монотонны. Численный расчет показал, что при удалении от свободной границы температура изменяется либо монотонно, либо имеет одну или две точки локального экстремума.

Радиальная q_r и осевая q_z компоненты вектора теплового потока в пограничном слое вычисляются формулам (2.5). Введем безраз-

мерную амплитуду Q осевой компоненты q_z вектора потока тепла на свободной границе по формуле

$$Q = 0,5(r/h)^2 dT_{11}/d\eta + dT_{21}/d\eta(\eta = 0).$$

На рис. 3 представлен график изменения этой величины при $r = 0,2$ в зависимости от скорости внешнего течения U на свободной границе для $\tau = 0,2$ (кривые 1 и 2) и для $\tau = -0,2$ (кривая 3). Основные режимы изображены сплошными линиями, а вращательные — пунктирной. При нагреве свободной поверхности ($\tau < 0$) поперечный тепловой поток на этой границе отрицателен, а при охлаждении положителен. Вращение жидкости возникает только при охлаждении свободной поверхности. При увеличении скорости внешнего течения модуль амплитуды Q растет при $\tau < 0$ однако, при $\tau > 0$ имеются области параметров, в которых амплитуда Q либо растет, либо убывает.

Радиальная компонента потока тепла q_r внутри области пограничного слоя положительна для $\tau < 0$. При удалении от свободной поверхности Γ эта компонента монотонно убывает до нулевого значения. При $\tau > 0$ радиальная компонента q_r для основных и вращательных режимов отрицательна. При удалении от поверхности Γ эта компонента сначала убывает, затем достигает минимума и далее монотонно возрастает до нулевого значения.

4. Асимптотические решения

Краевая задача (2.3)–(2.4) допускает асимптотические решения для основных режимов в случае конечных значений скорости U и малых значений параметра τ . Пусть $\tau > 0$. При $\tau \rightarrow +0$ и $U = O(1)$ решение

краевой задачи представим в виде асимптотических разложений

$$H_1 = \tau H_{11} + \tau^2 H_{12} + \dots, \quad (4.1)$$

$$T_1 = \tau \theta_{11} + \tau^2 \theta_{12} + \dots$$

Аналогичный ряд записываем и для функции T_2 . Подставляя разложения в задачу (2.3)–(2.4) и приравнивая нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях параметра τ , получаем краевые задачи для определения коэффициентов асимптотических рядов (4.1). Приведем краевые задачи только для функций θ_{11} и H_{11}

$$\begin{aligned} \theta_{11}'' &= 2 \text{Pr}(\theta_{11} - \eta U \theta_{11}'), \\ H_{11}^{(4)} &= \theta_{11} - 2\eta U H_{11}^{(3)}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} \theta_{11}(0) &= 1, & H_{11}(0) &= 0, & H_{11}''(0) &= 0, \\ \theta_{11}(\infty) &= 0, & H_{11}'(\infty) &= 0, & H_{11}''(\infty) &= 0. \end{aligned}$$

Отметим, что в отличие от задачи (2.3)–(2.4), поле температур в задаче (4.2) определяется независимо от результатов расчета поля скоростей. Приведем решение для функции θ_{11} при $U = 1$

$$\theta_{11} = \exp(-\xi^2 \text{Pr}) - \xi \sqrt{\pi \text{Pr}} (1 - \text{erf}(\xi \sqrt{\text{Pr}})).$$

Здесь $\text{erf}(t)$ — интеграл вероятностей.

Асимптотические разложения (4.1) описывают решения задачи (2.3)–(2.4) при $\tau > 0$ только для тех точек кривых на рис. 2, для которых выполняется неравенство $V_r > 0$. Сравнение решений задач (10) и (2.3)–(2.4) показывает что, например, при $\tau = 0,2$ и $U = 1$ у асимптотического (два приближения) и численного значений функции $dT_1/d\eta$ при $\eta = 0$ совпадают первые пять значащих цифр.

5. Вращательные режимы

Для $\tau > 0$ и $U < U_*$ численных решений краевой задачи (2.3)–(2.4) при условии $G_0 = 0$ не найдено. В этом случае существуют вращательные режимы течений жидкости, причем окружная компонента скорости исчезает при выходе из пограничного слоя. Эти режимы возникают в результате бифуркации «основных» режимов. Точки бифуркации находятся при численном интегрировании краевой задачи на собственные значения, которая получается путем линеаризации задачи (2.3)–(2.4) относительно функции G_0 .

Решения линеаризованной задачи найдены численно. Рассчитаны координаты точек бифуркации в зависимости от параметров задачи. Построена зависимость собственных значений параметра τ от скорости внешнего потока на свободной границе. График этой зависимости изображен на рис. 4. С ростом амплитуды скорости U монотонно возрастает и бифуркационное значение параметра τ . При $U = 1$ приведем это значение $\tau \approx 0,9081$.

Вращательные режимы рассчитаны численно. Эти режимы изображены пунктирными линиями на рис. 1–3. Крестик B на рис. 2 и 3 обозначает точку бифуркации. Отметим, что вблизи свободной границы возникает зона противотока. При выходе из области пограничного слоя скорость жидкости асимптотически стремится к значению U . Температура при удалении от свободной границы либо монотонно увеличивается, либо имеет два локальных экстремума.

Заключение

Рассчитано термогравитационное течение неоднородной жидкости в пограничном слое вблизи свободной границы в окрестности оси симметрии. Уравнения пограничного слоя получены на основе уравнений движения в приближении Обербека–Буссинеска. Обнаружено, что вращательные режимы течений жидкости возникают только при охлаждении свободной поверхности вблизи оси симметрии. В этом случае появляется радиальный поток тепла, направленный к оси вращения. При нагреве свободной границы вращение жидкости не возникает.

Литература

1. *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proc. III European Symp. on Material Sci. in Space. Grenoble. 1979. P. 313–315.
2. *Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Маранго-ни // ДАН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061–1064.
3. *Шкадов В.Я.* К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133–137.
4. *Батмицев В.А., Хорошунова Е.В.* Возникновение вращательных режимов при термокапиллярном течении неоднородной жидкости в слое // Прикладная математика и механика. 2000. Т. 64. Вып. 4. С. 560–568.

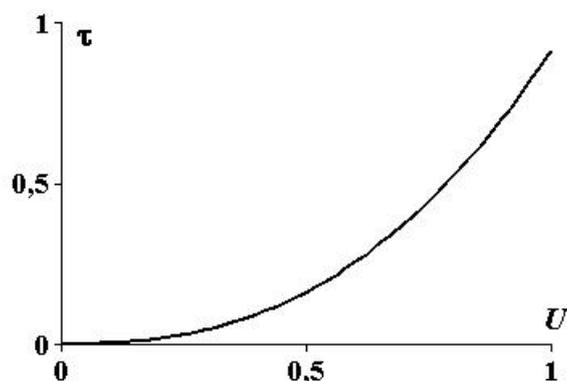


Рис. 4. Бифуркационная диаграмма

5. Батищев В.А. Автомодельные решения, описывающие нестационарные термокапиллярные течения жидкости // Прикладная математика и механика. 1995. Т. 59. Вып. 6. С. 1003–1009.
6. Батищев В.А. Ветвление автомодельных решений, описывающих термокапиллярные течения жидкости в тонком слое // Прикладная механика и техническая физика. 1999. Т. 40. № 3. С. 137–143.
7. Батищев В.А. Асимптотика неравномерно нагретой свободной границы капиллярной жидкости при больших числах Марангони // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 53. Вып. 3. С. 425–432.
4. Batishchev V.A., Khoroshunova E.V. Vozniknovenie vrashchatel'nykh rezhimov pri termokapillyarnom techenii neodnorodnoi zhidkosti v sloe [The formation of rotational regimes in the thermocapillary flow of a non-uniform fluid in a layer]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2000, vol. 64, no. 4, pp. 560–568. (In Russian)
5. Batishchev V.A. Avtomodel'nye resheniya, opisyvayushchie nestatsionarnye termokapillyarnye techeniya zhidkosti [Self-similar solutions describing unsteady thermocapillary flow of the liquid]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. [Applied mathematics and mechanics], 1995, vol. 59, no. 6, pp. 1003–1009. (In Russian)
6. Batishchev V.A. Vetvlenie avtomodel'nykh reshenii, opisyvayushchikh termokapillyarnye techeniya zhidkosti v tonkom sloe [The branching self-similar solutions describing a thermocapillary flow in a thin layer]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics], 1999, vol. 40, no. 3, pp. 137–143. (In Russian)
7. Batishchev V.A. Asimptotika neravnomerno nagretoi svobodnoi granitsy kapillyarnoi zhidkosti pri bol'shikh chislakh Marangoni [Asymptotics of non-uniformly heated capillary free boundary fluid at high Marangoni numbers]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 1989, vol. 53, no. 3, pp. 425–432. (In Russian)

References

1. Napolitano L.G. Marangoni boundary layers. In *Proc. III European Symposium on Material Science in Space*, Grenoble, 1979, pp. 313–315.
2. Pukhnachev V.V. Gruppovoi analiz uravnenii nestatsionarnogo pogranichnogo sloya Marangoni [Group analysis of unsteady boundary layer equations of Marangoni]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1984, vol. 279, no.5, pp. 1061–1064. (In Russian)
3. Shkadov V.Ya. K obrazovaniyu voln na poverkhnosti vyazkoi tyazheloi zhidkosti pod deistviem kasatel'nogo napryazheniya [To the formation of waves on the surface of heavy viscous fluid under shear stress]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Fluid Dynamics], 1970, no. 3, pp. 133–137. (In Russian)

Статья поступила 29 февраля 2016 г.

© Батищев В. А., 2016