УДК 539.3

О СПОСОБАХ ФОРМИРОВАНИЯ БЛОЧНЫХ СТРУКТУР С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Евдокимова О. В.

ABOUT FORMATION METHODS OF BLOCK STRUCTURES WITH INHOMOGENEITY

Evdokimova O. V.

Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: evdokimova.olga@mail.ru

Abstract. Block elements' properties which have different types of approximations and form complex block structures which have inhomogeneity of different nature. Particularly, it referred to opportunity of composition material formation which contain of hardenable inhomogeneity of sheath strained material type. Detailed analysis of different approximations' methods of block elements is given in the work and it is proved that they have two basic forms: bundled and uncoiled one. Uncoiled form of block element coincides with typical solution of boundary tasks. Bundled form has integral approximation and that is it which allows to examine block elements as topological objects and plot quotient topology for junction of block elements in block structure. In the basis of the research approach of block element and factorization method lie. This approach helps to research and to solve boundary problems for systems of differential equations, which can't be researched by means of other approaches.

Keywords: block element, factorization, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems.

1. В работе показано, что блочные элементы проходят при своем построении несколько стадий, на которых их возможности и функции оказываются разными. Установлено, что на некоторых стадиях они наиболее удобны для исследовательских целей и целей конструирования новых блочных структур. Эта стадия названа упаковкой блочного элемента, а элемент называется упакованным. На другой стадии, названной распаковкой или раскрытием блочного элемента, блочные элементы наиболее удобны для проведения расчетов и наглядного исследования решений. Показано, что все исследования граничных задач существующими методами разделения переменных, интегральными преобразованиями, различными подстановками, с точки зрения развиваемой теории были направлены на построение решений именно в форме раскрытого блочного элемента. Именно это сдерживало применение указанных методов к граничным задачам в неклассических областях, не вкладывавшихся в рамки групп преобразований пространства [1, 2]. Метод блочного элемента, как показано в [3], является конвергентным не только в том, что объединяет несколько подходов, но и расширяет возможности исследования граничных задач в неклассических областях. Для применения метода требуется выполнение нескольких шагов преобразований, связанных с привлечением аппаратов внешнего анализа, факторизации, топологии и других разделов математики [4]. В настоящей работе в сопоставлении метода блочного элемента с существующими подходами и более полного выявления связей с ними, а также с целью демонстрации удобств при его применении в практических целях, излагаются три стадии преобразований при построении блочного элемента, упрощающие его построение и применение. Ниже демонстрируется алгоритм применения метода на этих стадиях на примере граничных задач в классической и неклассической областях.

2. Первую стадию целесообразно назвать формированием блочного элемента. Она включает в себя постановку граничной задачи для системы дифференциальных урав-

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2016 г. проект (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377).

нений в частных производных с постоянными коэффициентами, рассматриваемой в пространстве медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H}_s$. Граничную задачу для системы P дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных произвольного порядка дифференцирования в выпуклой трехмерной области Ω в предположении разрешимости, независимо от типа граничной задачи и области рассмотрения, можно записать в виде

$$\begin{gathered}\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \\ = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\varphi_{p,\overset{(m)}{x_1}\overset{(n)}{x_2}\overset{(k)}{x_3}} = 0, \\ s = 1, 2, \ldots, P, \quad A_{sqmnk} = \text{const}, \\ \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_P\}. \\ \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_s\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3), \\ \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \end{gathered} \tag{1}$$

На границе $\partial\Omega$ задаются следующие граничные условия

$$\begin{gathered}\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi = \\ = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P} B_{spmnk}\varphi_{p,\overset{(m)}{x_1}\overset{(n)}{x_2}\overset{(k)}{x_3}} = \\ = f_s, \end{gathered} \tag{2}$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_0 < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$
$$M_1 < M, \quad N_1, < N, \quad K_1 < K.$$

Заметим, что подобно интегральному методу факторизации, в дифференциальном методе факторизации граничная задача решается точно, если Ω является полупространством. В случае, если область Ω является выпуклой — задача сводится к решению системы нормально разрешимых псевдодифференциальных уравнений.

С целью систематизации изложения дифференциального метода факторизации, выделим несколько этапов.

Сведение дифференциальных уравнений преобразованием Фурье или иными интегральными преобразованиями к функциональному уравнению.

Трехмерным преобразованием Фурье вида

$$\Phi_n(\boldsymbol{\alpha}) = \iiint\limits_{\Omega} \varphi_n(\mathbf{x})\, e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x} \equiv F\varphi_n,$$

$$\Phi_m = F\varphi_m,$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}^\nu \mathbf{x}^\nu\rangle = \alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu + \alpha_3^\nu x_3^\nu,$$

она сводится к функциональному уравнению представимому в форме

$$\begin{gathered}\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Phi} = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega} \equiv \sum_{n=1}^{N} \iint\limits_{\partial\Omega_n} \boldsymbol{\omega}^n, \\ \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \\ = \|k_{n\,m}(\boldsymbol{\alpha})\|, \end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $\partial\Omega_n$ — ориентированный элемент топологического разбиения единицы границы $\partial\Omega$, $\boldsymbol{\omega}^n$ — вектор внешней формы, построенный на этом элементе.

Здесь $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ — полиномиальная матрица-функция порядка P.

Вектор внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ имеет в качестве компонент двумерные функции вида

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, P,$$

$$\begin{gathered}\omega_s = P_{12s} dx_1 \Lambda dx_2 + P_{13s} dx_1 \Lambda dx_3 + \\ + P_{23s} dx_2 \Lambda dx_3. \end{gathered} \tag{4}$$

Это же относится и к внешним формам ω^n на элементах $\partial\Omega_n$.

Операции внешней формы имеют обозначения

$$\begin{gathered} dx_1 \Lambda dx_2 = dx_1^1 dx_2^2 - dx_1^2 dx_2^1, \\ dx_1 \Lambda dx_3 = dx_1^1 dx_2^3 - dx_1^3 dx_2^1, \\ dx_2 \Lambda dx_3 = dx_1^2 dx_2^3 - dx_1^3 dx_2^2. \end{gathered}$$

Здесь введены векторы произвольной системы координат из покрытий

касательного расслоения поверхности тела. В декартовой системе координат для касательных векторов произвольного элемента покрытия приняты обозначения:

$$x_1 = \{x_1^1, x_1^2, x_1^3\}, \quad x_2 = \{x_2^1, x_2^2, x_2^3\}.$$

Коэффициенты внешних форм представлены в [4].

Удовлетворение заданным граничным условиям (5) достигается внесением в представление внешних форм значений вектора решения $\boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega)$ и его производных по нормали на $\partial\Omega$, взятых из граничных условий.

Наличие производных по касательным во внимание не принимается. Внешние формы содержат значения решения φ_n и его производных на границе $\partial\Omega$. Из граничных условий (2) подбором и обращением невырожденной матрицы находятся функции или производные по нормали на границе и вносятся в соответствующие представления внешних форм $\boldsymbol{\omega}$. Остальные функции или производные по нормали должны быть найдены из псевдодифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании функциональных уравнений.

Осуществляется дифференциальная факторизация матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ функционального уравнения [4]. Сведение функционального уравнения к системе псевдодифференциальных уравнений достигается вычислением форм-вычетов Лере для функций нескольких комплексных переменных. Этим действием выполняется автоморфизм при отображении носителя на себя. Опуская выкладки, представленные в отмеченных работах, приходим к соотношениям вида

$$\sum_{\nu=1}^{N}\sum_{p=1}^{P}\iint\limits_{\partial\Omega_\nu}\omega_p^\nu Z_{mp}(z_{s-}^\nu)=0, \qquad (5)$$

$$s-=1,2,\ldots,G_-.$$

Здесь $\alpha_{3s\pm}^\nu\equiv z_{s\pm}^\nu(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu)$ — лежащие в верхней (плюс), и в нижней (минус) полуплоскостях нули определителя матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$.

Простроенные соотношения являются системой псевдодифференциальных уравнений. Допуская, что требуемые поставленной задачей интегральные уравнения извлечены из псевдодифференциальных уравнений и решены, а результат внесен во внешние формы, выполняется вторая стадия блочного элемента, называемая упаковкой. Упакованный блочный элемент имеет компактный вид

$$\varphi(\mathbf{x}^\nu)=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}^{-1}(\alpha)\times$$
$$\times\iint\limits_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}e^{-i\langle\alpha^\nu\mathbf{x}^\nu\rangle}d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3^\nu,$$

$$\mathbf{x}^\nu\in\Omega,$$

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha)=\mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu)\,\mathrm{K}^{-1}(\alpha_3^\nu,-).$$

Здесь матрицы-функции $\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu)$, $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu,-)$ являются результатом дифференциальной факторизации матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ по параметру α_3^ν, причем определитель первой содержит нули только в верхней полуплоскости, а второй — только в нижней. В таком виде он представляет топологическое многообразие с краем. В этой форме он удобен для формирования блочной структуры, построения в ней неоднородностей, полостей, трещин, включений, жестких или деформируемых, сопряжения с деформируемыми или жесткими блоками. Все это достигается формированием соотношений эквивалентности между данным блоком и аналогичным соседним. Для этого на основе отношений эквивалентности строится фактор-топология декартовых произведений носителей блочных элементов и топологических пространств вектор-функций, построенных на них. Неотъемлемым свойством правильно построенного блочного элемента является возможность вычисления в представлении решения одного интеграла методом теории вычетов. Это называется *раскрытием* или распаковкой блочного элемента. Вычислив этот интеграл, получим следующее представление раскрытого блочного элемента

$$\varphi(\mathbf{x}^v)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_s\Big[\mathbf{A}_+\left(\alpha_1^v,\alpha_2^v,z_{s+}^v\right)\times$$
$$\times e^{-i(z_{s+}^v x_3^v+\alpha_1^v x_1^v+\alpha_2^v x_2^v)}+\mathbf{B}_-\left(\alpha_1^v,\alpha_2^v,z_{s-}^v\right)\times$$
$$\times e^{-i(z_{s-}^v x_3^v+\alpha_1^v x_1^v+\alpha_2^v x_2^v)}\Big]d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu. \qquad (6)$$

Здесь матрицы-функции $\mathbf{A}_+\left(\alpha_1^v,\alpha_2^v,z_{s+}^v\right)$ и $\mathbf{B}_-\left(\alpha_1^v,\alpha_2^v,z_{s-}^v\right)$ зависят от заданных граничных условий, формы области Ω, а также от свойств матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$. Рассматривая вид раскрытого блочного элемента (6), легко усмотреть в нем вид выражения, в котором ищутся решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а также уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами методом экспоненциальных подстановок или разделения переменных [5,6]. На основании этого можно сказать, что вся практика применения указанных методов сводилась к исследованию раскрытых или распакованных блочных элементов. В результате круг доступных для решения задач сужался. Он оказывался применимым только для классических областей, отклонение от которых исключало возможность решения граничных задач указанными методами.

3. Для иллюстрации изложенного рассмотрим примеры.

Пример 1. В слое Ω с параллельными границами, толщины $b-a$ ставится граничная задача для дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2}-r^2\varphi=0, \qquad (7)$$

$$|x_1|\leqslant\infty,\quad |x_2|\leqslant\infty,\quad a\leqslant x_3\leqslant b.$$

На границах области $\partial\Omega$ приняты граничные условия

$$\begin{aligned}\varphi\left(x_1,x_2,x_3\right)&=f_1\left(x_1,x_2\right),\quad x_3=a,\\ \frac{\partial\varphi\left(x_1,x_2,x_3\right)}{\partial x_3}&=f_2\left(x_1,x_2\right),\quad x_3=b.\end{aligned} \qquad (8)$$

Применив к уравнению и граничным условиям двойное преобразование по x_1 и x_2 вида

$$\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,x_3\right)= \\ =\int_{-\infty}^{\infty}\int\varphi\left(x_1,x_2,x_3\right)e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}dx_1dx_2,$$

$$\varphi\left(x_1,x_2,x_3\right)= \\ \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,x_3\right)e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}d\alpha_1d\alpha_2.$$

приходим к одномерной краевой задаче

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}-k^2\Phi=0,\\ \Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,a\right)=F_1,\quad \Phi'\left(\alpha_1,\alpha_2,b\right)=F_2,\end{gathered} \qquad (9)$$

$$k^2=\alpha_1^2+\alpha_2^2+r^2.$$

Аналогично получаются F_1, F_2 — преобразования Фурье правых частей граничных условий.

Для построения решения граничной задачи применим экспоненциальную подстановку и получаем решение в форме

$$\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,x_3\right)=c_1e^{kx_3}+c_2e^{-kx_3}, \qquad (10)$$

Удовлетворяя заданным граничным условиям, получаем постоянные, описывающие решение в виде

$$\begin{aligned}c_1&=\frac{F_1ke^{-kb}+F_2e^{-ka}}{2k\operatorname{ch}k\left(b-a\right)},\\ c_2&=\frac{F_1ke^{kb}-F_2e^{ka}}{2k\operatorname{ch}k\left(b-a\right)}.\end{aligned} \qquad (11)$$

Внеся значения (11) в (10) и осуществив двойное обратное преобразование Фурье по параметрам α_1, α_2, получим решение граничной задачи.

Применим для решения этой граничной задачи метод блочного элемента в области Ω. Несложные построения приводят к функциональному уравнению с использованием внешней формы

$$\left(\alpha_3^2+k^2\right)\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\int_a^b d\omega,$$

$$\omega\left(x_3,\alpha_3\right)=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}-i\,\alpha_3\Phi\right)e^{i\alpha_3x_3},$$

$$\begin{aligned}&\left(\alpha_3^2+k^2\right)\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\\ &=\Phi'\left(\alpha_1,\alpha_2,b\right)e^{i\alpha_3b}-\Phi'\left(\alpha_1,\alpha_2,a\right)e^{i\alpha_3a}-\\ &\quad-i\alpha_3\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,b\right)e^{i\alpha_3b}+\\ &\quad+i\alpha_3\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,a\right)e^{i\alpha_3a}.\end{aligned} \qquad (12)$$

Внеся в правую часть (11) заданные граничные условия (9), получим уравнение вида

$$\begin{aligned}&\Phi\left(\alpha_3\right)=\\ &=\left(\alpha_3^2+k^2\right)^{-1}\Big[F_2e^{i\alpha_3b}-\Phi'\left(a\right)e^{i\alpha_3a}-\\ &\quad-i\alpha_3\Phi\left(b\right)e^{i\alpha_3b}+i\alpha_3F_1e^{i\alpha_3a}\Big].\end{aligned} \qquad (13)$$

Здесь ради упрощения формул у функций $\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,a\right)$, $\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,b\right)$, $\Phi\left(\alpha_1,\alpha_2,x_3\right)$ опущены не изменяющиеся два первых аргумента и все действия выполняются над третьим аргументом, то есть приняты их обозначения $\Phi\left(a\right)$, $\Phi\left(b\right)$, $\Phi\left(x_3\right)$.

Рассматривая соотношение (13) в локальных системах координат, потребовав выполнение автоморфизма — отображения отрезка на себя, приходим к псевдодифференциальным уравнениям вида.

$$\begin{cases} kF_1e^{-k(b-a)} + F_2 - \Phi'(a)\,e^{-k(b-a)} - \\ \qquad\qquad - k\Phi(b) = 0, \\ -kF_1 + F_2e^{-k(b-a)} - \Phi'(a) + \\ \qquad\qquad + k\Phi(b)\,e^{-k(b-a)} = 0, \end{cases} \tag{14}$$

Их решение дает следующие значения искомых выражений

$$\Phi'(a) = \frac{-kF_1 \operatorname{sh} k(b-a) + F_2}{\operatorname{ch} k(b-a)},$$

$$\Phi(b) = \frac{kF_1 + F_2 \operatorname{sh} k(b-a)}{k \operatorname{ch} k(b-a)}.$$

Внося эти значения в формулу (13) и применив тройное обращение Фурье, приходим к представлению решения — блочного элемента граничной задачи в слое в виде

$$\begin{gathered} \varphi(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} e^{-i(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x})} \left(\alpha_3^2 + k^2\right)^{-1} \times \\ \times \left[\left\{k^2F_1e^{i\alpha_3 a} \operatorname{sh} k(b-a) + \right.\right. \\ \left. + i\alpha kF_1 \operatorname{ch} k(b-a)\,e^{i\alpha_3 a} - kF_2e^{i\alpha_3 a}\right\} + \\ + \left\{-i\alpha e^{i\alpha_3 b}F_2 \operatorname{sh} k(b-a) + \right. \\ \left.\left. + F_2k \operatorname{ch} k(b-a)\,e^{i\alpha_3 b} - kF_1 i\alpha e^{i\alpha_3 b}\right\}\right] \times \\ \times \left[k \operatorname{ch} k(b-a)\right]^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \end{gathered} \tag{15}$$

$$(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}) = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \alpha_3x_3, \quad a \leqslant x_3 \leqslant b.$$

Полученное выражение, представляющее собой топологический объект — многообразие с краем, называется упакованным блочным элементом.

Подобные упакованные блочные элементы для других слоев могут очень просто сопрягаться друг с другом, если представлены в таком виде.

На языке топологии необходимо строить фактор-топологию носителей и определенных на них функций с учетом отношений эквивалентности граничных условий. В данном простейшем случае достаточен «транзит» граничных условий в зоне склейки слоев. В упакованном блочном элементе, если операция построения выполнена правильно, интеграл по параметру α_3 всегда вычисляется по теории вычетов. Выполнив это действие, получим раскрытый или распакованный блочный элемент, который имеет вид

$$\begin{gathered} \varphi(x_1x_2x_3) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{R^2} e^{-i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)} \times \\ \times \left\{(f_1ke^{-kb} + f_2e^{-ka})e^{kx_3} + \right. \\ \left. + (f_1e^{kb}k - f_2e^{ka})e^{-kx_3}\right\} \times \\ \times \left[2k \operatorname{ch} k(b-a)\right]^{-1} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{gathered}$$

Решение совпадает с построенным с помощью экспоненциальной подстановки. Как сказано выше, именно такие распакованные блочные элементы строились методом разделения переменных, интегральными преобразованиями, различными подстановками. Они несколько проще, чем упакованный блочный элемент, содержатся в нем, но, как показывает следующий пример, имеют более ограниченный набор граничных задач, которые можно исследовать этими методами. Ниже приводится сравнительно простой пример граничной задачи, который доступен для исследования методом блочного элемента и не решаем перечисленными подходами.

Пример 2. Изучим рассмотренную выше граничную задачу для дифференциального уравнения (1) в области Ω, занимающей цилиндр в направлении оси $0x_3$ с треугольным сечением в плоскости x_10x_2, имеющим вершины в точках $(0{,}0)$, $(x_{01}{,}0)$, $(0, x_{02})$, $x_{01} > 0$, $x_{02} > 0$. Внешняя нормаль к стороне $x_{01}x_{02}$ составляет угол ν с осью $0x_1$, а расстояние этой стороны от начала координат равно p. В этом случае в принятой системе координат, которую будем называть абсолютной, координаты вершин треугольника имеют выражения

$$x_{10} = \frac{p}{\cos\nu}, \quad x_{20} = \frac{p}{\sin\nu}.$$

Применив к граничной задаче преобразование Фурье по параметру x_3, получим двумерную граничную задачу в сечении x_10x_2.

Будем считать, что на ориентированных границах, сторонах треугольника $x_{01}0$, $0x_{02}$, $x_{02}x_{01}$, построены правые локальные системы координат $x_1^{\pi}0^{\pi}x_2^{\pi}$, $x_1^{0,5\pi}0^{0,5\pi}x_2^{0,5\pi}$, $x_1^{0,5\pi-\nu}0^{0,5\pi-\nu}x_2^{0,5\pi-\nu}$, причем координатные оси с индексом 1 направлены вдоль сторон, а с индексом 2 — по внешней нормали. Верхние индексы в принимаемых обозначениях характеризуют угол поворота локальной системы координат по отношению к абсолютной. На названных выше сторонах треугольника в той же последовательности задаются граничные условия в виде функций $g_1(x_1^{\pi})$, $g_2(x_1^{0,5\pi})$, $g_3(x_1^{0,5\pi-\nu})$, которые считаются достаточно гладкими. Погружая граничную задачу в топологическую структуру, описанную выше, и выполнив все связанные с методом блочного элемента действиями, как и в первом пункте по аналогии приходим к упакованному блочному элементу, имеющему вид

$$\begin{gathered}\varphi(x_1,x_2,x_3) = \\ = \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{R^3} e^{-i(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x})}\frac{i}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2+k^2)}\times \\ \times\Big[F_1(\alpha_1^{\pi})(\alpha_{2-}^{\pi}-\alpha_2^{\pi})+ \\ +F_2(\alpha_1^{0,5\pi})(\alpha_{2-}^{0,5\pi}-\alpha_2^{0,5\pi})+ \\ +F_3(\alpha_1^{0,5\pi-\nu})e^{i\alpha_2^{0,5\pi-\nu}p}\times \\ \times(\alpha_{2-}^{0,5\pi-\nu}-i\alpha_2^{0,5\pi-\nu})\Big]d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \quad (16)\end{gathered}$$

$$\alpha_{2\pm}^{\pi} = \pm i\sqrt{(\alpha_1^{\pi})^2+k^2},$$

$$\alpha_{2\pm}^{0,5\pi} = \pm i\sqrt{(\alpha_1^{0,5\pi})^2+k^2},$$

$$\alpha_{2\pm}^{0,5\pi-\nu} = \pm i\sqrt{(\alpha_1^{0,5\pi-\nu})^2+k^2},$$

$$x_1 = x_1^{0,5\pi-\nu}\sin\nu + x_2^{0,5\pi-\nu}\cos\nu,$$

$$x_2 = -x_1^{0,5\pi-\nu}\cos\nu + x_2^{0,5\pi-\nu}\sin\nu,$$

$$\alpha_1 = \alpha_1^{0,5\pi-\nu}\sin\nu + \alpha_2^{0,5\pi-\nu}\cos\nu,$$

$$\alpha_2 = -\alpha_1^{0,5\pi-\nu}\cos\nu + \alpha_2^{0,5\pi-\nu}\sin\nu,$$

$$\alpha_1^{0,5\pi-\nu} = \alpha_1\sin\nu - \alpha_2\cos\nu,$$

$$\alpha_2^{0,5\pi-\nu} = \alpha_1\cos\nu + \alpha_2\sin\nu.$$

$$x_1^{0,5\pi} = x_2, \quad x_2^{0,5\pi} = -x_1,$$

$$x_1^{\pi} = -x_1, \quad x_2^{\pi} = -x_2,$$

$$\alpha_1^{0,5\pi} = \alpha_2, \quad \alpha_2^{0,5\pi} = -\alpha_1,$$

$$\alpha_1^{\pi} = -\alpha_1, \quad \alpha_2^{\pi} = -\alpha_2.$$

Здесь вектор

$$\Big\{F_1(\alpha_1^{\pi}), F_2(\alpha_1^{0,5\pi}), F_3(\alpha_1^{0,5\pi-\nu})\Big\}$$

является результатом некоторого линейного непрерывного отображения вектора

$$\Big\{g_1(x_1^{\pi}), g_2(x_1^{0,5\pi}), g_3(x_1^{0,5\pi-\nu})\Big\}$$

в пространство преобразований Фурье на ортах. Распаковав блочный элемент путем вычисления одного интеграла, в правильно упакованном блочном элементе это всегда возможно, приходим к раскрытому блочному элементу, представимому в форме

$$\begin{gathered}\varphi(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2}\Big\langle F_2(\alpha_1^{0,5\pi})\times \\ \times\exp\left[-i(\alpha_1^{0,5\pi}x_1^{0,5\pi}+\alpha_{2+}^{0,5\pi}x_2^{0,5\pi}+\alpha_3 x_3)\right]d\alpha_1^{0,5\pi}- \\ -F_1(\alpha_1^{\pi})\exp\left[-i(\alpha_1^{\pi}x_1^{\pi}+\alpha_{2+}^{\pi}x_2^{\pi}+\alpha_3 x_3)\right]d\alpha_1^{\pi}- \\ -F_3(\alpha_1^{0,5\pi-\nu})\exp\Big[-i(\alpha_1^{0,5\pi-\nu}x_1^{0,5\pi-\nu}+ \\ +\alpha_{2+}^{0,5\pi-\nu}x_2^{0,5\pi-\nu}+\alpha_3 x_3)\Big]d\alpha_1^{0,5\pi-\nu}\Big\rangle d\alpha_3. \\ (17)\end{gathered}$$

При вычислении интегралов необходимо требовать, чтобы в соответствии с формулами перехода в каждой системе координат рассматривалась одна и та же точка (x_1,x_2,x_3), лежащая внутри треугольника, и учитывались якобианы при замене переменных в интегралах. Авторам не известны работы, в которых было бы выполнено решение рассмотренной граничной задачи методом разделения переменных, либо иным аналитическим подходом.

Разница между упакованным и раскрытым блочными элементами состоит в том, что в упакованном виде блочный элемент, позволяющий решать граничные задачи, не поддающиеся решению другим методам, может унифицировано сопрягаться с другими блочными элементами той же или иных размерностей и строить уже упакованные блочные семейства, сохраняя единую топологическую структуру. В свою очередь распакованный блочный элемент дает наглядное представление о характере решения и позволяет изучать его свойства, выделять особенности и зоны локализации. Именно благодаря вышеперечисленному удалось впервые построить модель стартового землетрясения, выявив опасные зоны концентрации напряжений [7, 8].

Литература

1. *Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий–Шапиро И.И.* Теория представлений и автоморфные функции. М.: Наука. 1968. 512 с.
2. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Горшкова Е.М., Зарецкая А.В., Мухин А.С., Павлова А.В.* О конвергентных свойствах блочных элементов // ДАН. 2015. Т. 465. № 3. С. 298–301.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О блочных элементах в приложениях // Физическая мезомеханика. 2012. Т. 15. № 1. С. 95–103.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. 832 с.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
7. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
8. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Топологические методы в проблеме прогноза одного типа землетрясений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2015. № 2. С. 8–13.

References

1. Gel'fand I.M., Graev M.I., Pyatetskiy–Shapiro I.I. *Teoriya predstavleniy i avtomorfnye funktsii* [Representation theory and automorphic functions]. Moscow, Nauka Publ., 1968, 512 p. (In Russian)
2. Vilenkin N.Ya. *Spetsial'nye funktsii i teoriya predstavleniya grupp* [Special functions and the theory of group representations]. Moscow, Nauka Publ., 1991, 576 p. (In Russian)
3. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Gorshkova E.M., Zaretskaya A.V., Mukhin A.S., Pavlova A.V. O konvergentnykh svoystvakh blochnykh elementov [On convergence properties of block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 2015, vol. 465, no. 3, pp. 298–301. (In Russian)
4. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O blochnykh elementakh v prilozheniyakh [On Block elements in applications]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical mesomechanics], 2012, vol. 15, no. 1, pp. 95–103. (In Russian)
5. Kurant R. *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations]. Moscow, Mir Publ., 1964, 832 p. (In Russian)
6. Tikhonov A.N., Samarskiy A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Moscow, Nauka Publ., 1966, 724 p. (In Russian)
7. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme fiziko-mekhanicheskogo predvestnika startovogo zemletryaseniya: mesto, vremya, intensivnost' [On the problem of physical and mechanical precursor starting earthquake: place, time, intensity]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 2016, vol. 466, no. 6, pp. 664–669. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskie metody v probleme prognoza odnogo tipa zemletryaseniy [Topological methods in the problem of the same type of earthquake prediction]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2015, no. 2, pp. 8–13. (In Russian)

Статья поступила 3 марта 2016 г.