

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНОДИФФУЗИИ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА 1-ГО РОДА

Земсков А. В., Тарлаковский Д. В.

THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL PROBLEMS OF MECHANICAL DIFFUSION
USING THE VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF THE 1ST KIND

Zemskov A. V.* , Tarlakovskii D. V.**

* Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia

** Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 119192, Russia
e-mail: azemskov1975@mail.ru

Abstract. Calculation of stress-strain state of structures and their elements, working in conditions of unsteady effects of different physical nature, in the general case reduces to the solution of boundary initial value problems of mechanics-related fields. But the solution of unsteady problems in continuum mechanics along with the elastic diffusion problems is associated with serious mathematical challenges. On the one hand, these are due to the need of Laplace transform conversion used to solve problems of this type. On the other hand, the complexity of solving the unsteady problem significantly increases with its dimension. Depending on certain types of boundary conditions, the solution for these problems may be obtained using the Fourier trigonometric series (or sine and cosine transforms), which significantly simplifies the originals' finding algorithm. The disadvantage of this method is the restricted application area, which is due to the specifics of boundary conditions.

We propose a method to solve the initial value problems of elastic diffusion, based on the construction of a system of Volterra integral equations of the 1st kind. These equations connect the right-hand sides of the boundary conditions of two different tasks of the same dimension and geometry. Kernels of integral operators are the Green's functions of a solved problem. The method is demonstrated on the example of two-dimensional elastic diffusion problem for the orthotropic layer. For the solution of the integral equations the quadrature formulas of medium rectangles are used. As quadrature formulas used rectangles formula. These solutions are presented in the form of graphs.

Keywords: elastic diffusion, mechanical diffusion, time-dependent problems, Green's function.

Введение

Расчет напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, работающих в условиях нестационарных воздействий различной физической природы, в общем случае сводится к решению начально-краевых задач механики связанных полей. Аналитическое решение этих задач, в том числе задач упругой диффузии связано с большими математическими трудностями. С одной стороны, эти сложности обусловлены необходимостью решать системы дифференциаль-

ных уравнений в частных производных. Даже в случае стационарных задач эти решения приводят к громоздким выкладкам. С другой стороны, при решении нестационарных задач, как правило, используется преобразование Лапласа. И здесь возникают известные трудности, связанные с его обращением. При определенных типах граничных условий решение этих задач можно построить в виде тригонометрических рядов Фурье, что существенно упрощает нахождение оригиналов [1, 2].

Земсков Андрей Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Московского авиационного института (национального исследовательского университета); e-mail: azemskoc1975@mail.ru.

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, д-р. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией динамических испытаний НИИ механики МГУ имени М. В. Ломоносова; e-mail: tdvhone@mail.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-08-01161).

Для того чтобы построить решение начально-краевой задачи при произвольных граничных условиях предлагается использовать алгоритм, основанный на построении соотношений между правыми частями граничных условий двух различных задач [3]. Тогда достаточно решить какую-либо одну (эталонную) задачу, а все другие задачи с помощью построенных ниже соотношений будут сводиться к ней. Предложенная методика демонстрируется на примере двумерной нестационарной задачи упругой диффузии для ортотропной полосы.

1. Общее описание алгоритма

Пусть имеется начально-краевая задача, которую в дальнейшем будем называть «исходной»:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{u}) &= 0, \quad \mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}, \\ u_i &= u_i(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \\ (x_1, x_2, x_3) &\in D = \mathbf{R}^2 \times [0, l], \quad t > 0; \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_1(\mathbf{u})|_{x_3=0} &= \mathbf{f}_1(x_1, x_2, t), \\ \mathbf{M}_2(\mathbf{u})|_{x_3=l} &= \mathbf{f}_2(x_1, x_2, t); \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\mathbf{M}_3(\mathbf{u})|_{t=0} = 0. \quad (1.3)$$

где \mathbf{M}_i , $i = \overline{1, 3}$ — линейные матричные дифференциальные операторы; t — время; x_1, x_2, x_3 — прямоугольные декартовы координаты; \mathbf{f}_1 и \mathbf{f}_2 — вектор-функции правых частей краевых условий (1.2).

Наряду с ней рассматривается «эталонная» краевая задача, в которой искомая функция удовлетворяет уравнению (1.1) и краевым условиям

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1(\mathbf{u})|_{x_3=0} &= \mathbf{g}_1(x_1, x_2, t), \\ \mathbf{N}_2(\mathbf{u})|_{x_3=l} &= \mathbf{g}_2(x_1, x_2, t); \end{aligned} \quad (1.4)$$

где \mathbf{N}_i , $i = \overline{1, 2}$ — линейные матричные дифференциальные операторы; \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2 — вектор-функции правых частей граничных условий (1.4).

Решение задачи (1.1), (1.3), (1.4) представим в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \int_0^t \mathbf{G}_1(\mathbf{x}, t, \tau) ** \mathbf{g}_1(x_1, x_2, \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \mathbf{G}_2(\mathbf{x}, t, \tau) ** \mathbf{g}_2(x_1, x_2, \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 — функции Грина задачи (1.1), (1.3), (1.4); «**» — свертка по переменным x_1 и x_2 . Полагая, что функции \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_2 известны, и требуя, чтобы решение эталонной задачи (1.5) удовлетворяло условиям (1.2), приходим к системе интегральных уравнений относительно \mathbf{g}_1 и \mathbf{g}_2

$$\begin{aligned} &\int_0^t \mathbf{M}_k[\mathbf{G}_1(\mathbf{x}, t, \tau)] ** \mathbf{g}_1(x_1, x_2, \tau) d\tau + \\ &+ \int_0^t \mathbf{M}_k[\mathbf{G}_2(\mathbf{x}, t, \tau)] ** \mathbf{g}_2(x_1, x_2, \tau) d\tau = \\ &= \mathbf{f}_k, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$k = 1, \quad x_3 = 0, \quad k = 2, \quad x_3 = l.$$

Подстановка решения этой системы в (1.5) приводит к решению исходной задачи (1.1)–(1.3).

Замечание. Эталонная задача выбирается не единственным способом. Критерием подбора эталонной задачи является минимальная размерность системы (1.6).

2. Двумерная задача упругой диффузии для полосы

Рассмотрим в качестве примера задачу для ортотропной полосы, ограниченной прямыми $x_2 = 0$ и $x_2 = L$ (Ox_1x_2 — прямоугольная декартова система координат). Двумерные физико-механические процессы в среде описываются моделью связанной упругой диффузии [1, 2, 4] (точками обозначены производные по времени τ):

$$\begin{aligned} C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} &= \ddot{u}_i + \alpha_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}, \\ D_{ij} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \partial x_l} &= \dot{\eta} + \Lambda_{ijkl} \frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12}|_{x_2=0} &= f_{11}^1(x_1, \tau), \\ u_2|_{x_2=0} &= f_{21}^1(x_1, \tau), \\ \eta|_{x_2=0} &= f_{31}^1(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_2=1} &= f_{12}^1(x_1, \tau), \\ u_2|_{x_2=1} &= f_{22}^1(x_1, \tau), \\ \eta|_{x_2=1} &= f_{32}^1(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Начальные условия задач примем нулевыми

$$u_i|_{\tau=0} = \dot{u}_i|_{\tau=0} = \eta|_{\tau=0} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь и далее используются следующие безразмерные параметры (при одинаковом написании они обозначены штрихом, который в дальнейшем изложении и в формулах (2.1)–(2.3) опущен):

$$x'_i = \frac{x_i}{L}, \quad u'_i = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{2222}}{\rho},$$

$$\eta' = \frac{\eta}{n_0}, \quad C'_{ijkl} = \frac{C_{ijkl}}{\rho C^2},$$

$$\alpha'_{ij} = \frac{n_0 \alpha_{ij}}{\rho C^2}, \quad D'_{ij} = \frac{D_{ij}}{CL}, \quad \Lambda'_{ijkl} = \frac{\Lambda_{ijkl}}{CLn_0},$$

$$f'_{1q} = \frac{f_{1q}^1}{C_{1212}}, \quad f'_{2q} = \frac{f_{2q}^1}{L}, \quad f'_{3q} = \frac{f_{3q}^1}{n_0}$$

$$(q = 1, 2),$$

где по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 2; t — время; $u_i(x_1, x_2)$ — координаты вектора перемещений; T_0 — абсолютная температура среды; $\eta = n - n_0$ — приращение объёмной концентрации вещества n относительно начальной концентрации n_0 ; C_{ijkl} — компоненты тензора упругих постоянных; ρ — плотность среды; α_{ij} — компоненты тензора, характеризующие объёмное расширение связанное с массопереносом; D_{ij} — коэффициенты самодиффузии; $\Lambda_{ijkl} = n_0 D_{ij} \alpha_{kl} / RT_0$; R — универсальная газовая постоянная.

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} и компоненты вектора диффузионного потока J_i определяются следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_{ij} \eta,$$

$$J_i = \Lambda_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - D_{ij} \frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

При определенных граничных условиях нестационарные задачи механодиффузии для полосы допускают решение методом разделения переменных, осуществляемого с помощью интегрального преобразования Фурье-Лапласа и рядов Фурье [1, 2]. В данном случае такой подход не может быть применен, так

как однородные граничные условия, соответствующие (2.2), могут быть удовлетворены решениями вида

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(x_1, \tau) \cos(\lambda_n x_2),$$

$$u_2 = \sum_{n=1}^{\infty} u_{2n}(x_1, \tau) \sin(\lambda_n x_2),$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(x_1, \tau) \sin(\lambda_n x_2), \quad \lambda_n = \pi n,$$

но эти разложения не удовлетворяют уравнениям (2.1).

Поэтому будем искать решение задачи (2.1)–(2.3) с помощью алгоритма, изложенного в предыдущем пункте. Для этого будем использовать эталонную задачу со следующими краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \sigma_{12}|_{x_2=0} &= f_{11}^2(x_1, \tau), \\ u_2|_{x_2=0} &= f_{21}^2(x_1, \tau), \\ J_2|_{x_2=0} &= f_{31}^2(x_1, \tau), \\ \sigma_{12}|_{x_2=1} &= f_{12}^2(x_1, \tau), \\ u_2|_{x_2=1} &= f_{22}^2(x_1, \tau), \\ J_2|_{x_2=1} &= f_{32}^2(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение задачи (2.1), (2.2), (2.4) найдено в работах [1, 2] и в интегральной форме имеет вид (звездочки обозначают свёртку по времени τ и координате x_1)

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{m=1}^3 G_{im} ** [f_{m1}^2 + (-1)^i f_{m2}^2], \\ \eta &= \sum_{m=1}^3 G_{3m} ** [f_{m1}^2 - f_{m2}^2]. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь $G_{km}(k, m = \overline{1, 3})$ — функции Грина задачи (2.1), (2.2), (2.4), т.е. решения задач, включающих в себя уравнения (2.1), начальные условия (2.4) и следующие граничные условия:

$$\left(C_{12kl} \frac{\partial G_{km}}{\partial x_l} \right) \Big|_{x_2=0} = \delta_{m1} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$G_{2m}|_{x_2=0} = \delta_{m2} \delta(x_1) \delta(\tau),$$

$$\begin{aligned} \left(\Lambda_{22kl} \frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_l \partial x_2} - D_{22} \frac{\partial G_{3m}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=0} &= \\ &= \delta_{m3} \delta(x_1) \delta(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(C_{12kl} \frac{\partial G_{km}}{\partial x_l} \right) \Big|_{x_2=1} &= G_{2m} \Big|_{x_2=1} = \\ &= \left(\Lambda_{22kl} \frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_l \partial x_2} - D_{22} \frac{\partial G_{3m}}{\partial x_2} \right) \Big|_{x_2=1} = 0, \end{aligned}$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака; δ_{ij} — символ Кронекера, $i = 1, 2$. В соответствии с предложенным алгоритмом полагаем, что решение эталонной задачи (2.1), (2.2), (2.4) удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \eta(x_1, 0, \tau) &= f_{31}^1(x_1, \tau), \\ \eta(x_1, 1, \tau) &= f_{32}^1(x_1, \tau), \end{aligned}$$

и учитывая, что

$$f_{ij}^1(x_1, \tau) = f_{ij}^2(x_1, \tau), \quad i, j = 1, 2,$$

приходим к системе уравнений типа свёртки относительно функций $f_{31}^2(x_1, \tau)$ и $f_{32}^2(x_1, \tau)$

$$\begin{aligned} G_{33}(x_1, 0, \tau) ** f_{31}^2(x_1, \tau) - \\ - G_{33}(x_1, 1, \tau) ** f_{32}^2(x_1, \tau) &= \\ &= \varphi_1(x_1, \tau), \\ G_{33}(x_1, 1, \tau) ** f_{31}^2(x_1, \tau) - \\ - G_{33}(x_1, 0, \tau) ** f_{32}^2(x_1, \tau) &= \\ &= \varphi_2(x_1, \tau), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \tau) &= f_{31}^1(x_1, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \left[G_{3k}(x_1, 0, \tau) ** f_{k1}^1(x_1, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - G_{3k}(x_1, 1, \tau) ** f_{k2}^1(x_1, \tau) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x_1, \tau) &= f_{32}^1(x_1, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \left[G_{3k}(x_1, 1, \tau) ** f_{k1}^1(x_1, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - G_{3k}(x_1, 0, \tau) ** f_{k2}^1(x_1, \tau) \right]. \end{aligned}$$

Полученная система (2.6) является двумерным аналогом системы (1.6). Выполнив далее в (2.6) преобразование Фурье по переменной x_1 , получим систему интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода (здесь индекс « F » означает трансформанту Фурье, « ω » —

параметр преобразования Фурье, «**» — свертка по времени):

$$\begin{aligned} G_{33}^F(\omega, 0, \tau) * f_{31}^{2F}(\omega, \tau) - \\ - G_{33}^F(\omega, 1, \tau) * f_{32}^{2F}(\omega, \tau) &= \\ &= \varphi_1^F(\omega, \tau), \\ G_{33}^F(\omega, 1, \tau) * f_{31}^{2F}(\omega, \tau) - \\ - G_{33}^F(\omega, 0, \tau) * f_{32}^{2F}(\omega, \tau) &= \\ &= \varphi_2^F(\omega, \tau), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1^F(\omega, \tau) &= f_{31}^{1F}(\omega, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \left[G_{3k}^F(\omega, 0, \tau) * f_{k1}^{1F}(\omega, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - G_{3k}^F(\omega, 1, \tau) * f_{k2}^{1F}(\omega, \tau) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_2^F(\omega, \tau) &= f_{32}^{1F}(\omega, \tau) - \\ &- \sum_{k=1}^2 \left[G_{3k}^F(\omega, 1, \tau) * f_{k1}^{1F}(\omega, \tau) - \right. \\ &\quad \left. - G_{3k}^F(\omega, 0, \tau) * f_{k2}^{1F}(\omega, \tau) \right]. \end{aligned}$$

Основной сложностью при решении системы (2.7) является то, что функции $G_{33}^F(\omega, 0, \tau)$, $G_{33}^F(\omega, 1, \tau)$, являясь ядрами интегральных операторов в (2.7), имеют особенность при $\tau = 0$. Согласно [1, 2]

$$\begin{aligned} G_{33}^F(\omega, x_2, \tau) &= \\ &= S_{33}^F(\omega, x_2, \tau) + R_{33}^F(\omega, x_2, \tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{33}^F(\omega, x_2, \tau) &= \\ &= D_{22} e^{-D_{11}\omega^2\tau} \vartheta_3\left(\frac{x_2}{2}, e^{-D_{22}\pi^2\tau}\right), \end{aligned}$$

где $R_{33}^F(\omega, x_2, \tau)$ — регулярная часть функций Грина, $\vartheta_3(x, q)$ — тета-функция Якоби [3, 5].

Тета-функция Якоби имеет при $\tau = 0$ интегрируемую особенность порядка $-1/2$. Следовательно, такую же особенность имеет функция G_{33}^F . В этом случае, следуя [3], домножим каждое из уравнений (2.7) на

$d\tau/(\xi - \tau)^{1/2}$ и проинтегрируем от 0 до ξ . Получим

$$\int_0^{\xi} K^1(\omega, \xi - t) f_{31}^{2F}(\omega, t) dt - \int_0^{\xi} K^2(\omega, \xi - t) f_{32}^{2F}(\omega, t) dt = \Phi^1(\omega, \xi), \quad (2.8)$$

$$\int_0^{\xi} K^2(\omega, \xi - t) f_{31}^{2F}(\omega, t) dt - \int_0^{\xi} K^1(\omega, \xi - t) f_{32}^{2F}(\omega, t) dt = \Phi^2(\omega, \xi),$$

где

$$K^1(\omega, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{33}^F(\omega, 0, \zeta - \tau)}{\tau^{1/2}} d\tau,$$

$$K^2(\omega, \zeta) = \int_0^{\zeta} \frac{G_{33}^F(\omega, 1, \zeta - \tau)}{\tau^{1/2}} d\tau,$$

$$\Phi^k(\omega, \xi) = \int_0^{\xi} \frac{\varphi_k^F(\omega, \tau) d\tau}{(\xi - \tau)^{1/2}},$$

причём ядра $K^k(\omega, \zeta)$ не имеют особенностей при $\zeta = 0$.

Для решения системы (2.8) используем квадратурные формулы. Разбиваем область $[0, T]$ изменения времени τ на N отрезков точками $\tau_i = ih$ с равномерным шагом $h = T/N$ и вводим сеточные функции $y_i^k = f_{3k}^{2F}(\omega, t_i)$, $K_i^k = K^k(\omega, \zeta_i)$. Каждый из интегралов в (2.8) при $\tau = \tau_i$ приближенно заменяем суммой, соответствующей формуле средних прямоугольников

$$\int_0^{\xi_i} K^l(\omega, \xi_i - t) f_{3k}^{2F}(\omega, t) dt \approx \approx h S_{i-1/2}^{lk}(\omega) + h K_{1/2}^l(\omega) y_{i-1/2}^k(\omega),$$

$$S_{i-1/2}^{lk}(\omega) = \sum_{j=1}^{i-1} K_{i-j+1/2}^l(\omega) y_{j-1/2}^k(\omega)$$

$$(k, l = 1, 2),$$

где узлы находятся по формулам

$$\xi_{i-1/2} = \frac{\xi_{i-1} + \xi_i}{2} = h \left(i - \frac{1}{2} \right),$$

$$\xi_{i-j+1/2} = \xi_i - \xi_{j-1/2} = h \left(i - j + \frac{1}{2} \right),$$

$$i = \overline{1, N}.$$

В результате приходим к рекуррентной последовательности систем линейных алгебраических уравнений ($i \geq 1$)

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_{i-1/2} = \mathbf{b}_{i-1/2}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} K_{1/2}^1 & -K_{1/2}^2 \\ -K_{1/2}^2 & K_{1/2}^1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} y_{i-1/2}^1 \\ y_{i-1/2}^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{i-1/2} = \begin{pmatrix} b_{i-1/2}^1 \\ b_{i-1/2}^2 \end{pmatrix},$$

$$b_{i-1/2}^1(\omega) = \Phi^1(\omega, \xi_{i-1/2})/h - S_{i-1/2}^{11} + S_{i-1/2}^{22},$$

$$b_{i-1/2}^2(\omega) = -\Phi^2(\omega, \xi_{i-1/2})/h + S_{i-1/2}^{21} - S_{i-1/2}^{12}, \quad (i \geq 1).$$

Решение системы (2.9) имеет вид

$$y_{i-1/2}^1 = \frac{K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^2}{\left(K_{1/2}^1\right)^2 - \left(K_{1/2}^2\right)^2}, \quad (2.10)$$

$$y_{i-1/2}^2 = \frac{K_{1/2}^2 b_{i-1/2}^1 + K_{1/2}^1 b_{i-1/2}^2}{\left(K_{1/2}^1\right)^2 - \left(K_{1/2}^2\right)^2}.$$

Подставив это решение в (2.5), получим решение исходной задачи (2.1)–(2.3).

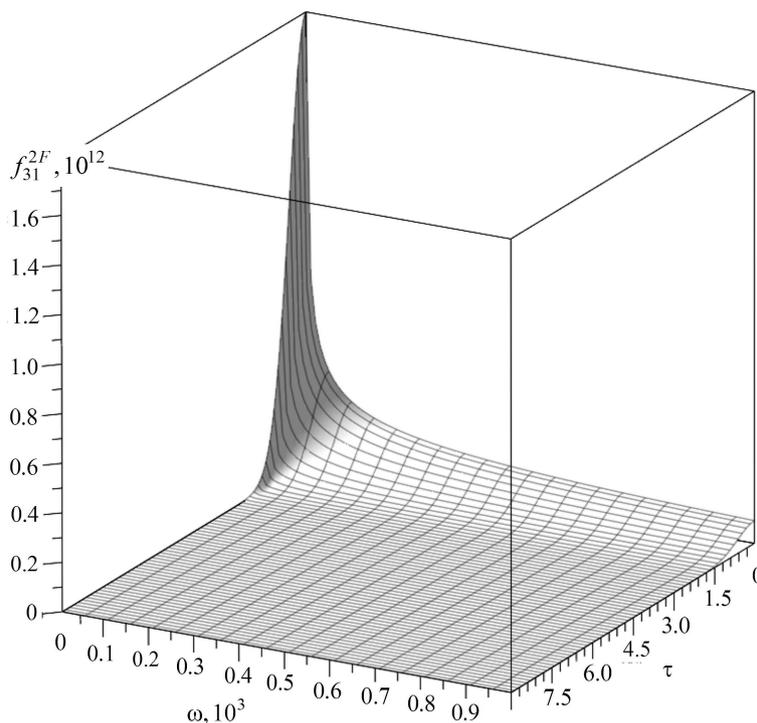
Положим для расчета в (2.2)

$$f_{11}^1(x_1, \tau) = f_{21}^1(x_1, \tau) = f_{12}^1(x_1, \tau) = = f_{22}^1(x_1, \tau) = f_{32}^1(x_1, \tau) \equiv 0,$$

$$f_{31}^1(x_1, \tau) = e^{-\varepsilon x_1^2} H(\tau), \quad \varepsilon = 0,01.$$

Тогда правые части системы (2.7) равны

$$\varphi_1^F(\omega, \tau) = f_{31}^{1F}(\omega, \tau) = f(\omega) H(\tau),$$

Рис. 1. График численного решения для $f_{31}^{2F}(\omega, \tau)$

$$f(\omega) = (\pi/\varepsilon)^{1/2} e^{-\omega^2/(4\varepsilon)}, \quad \varphi_2^F(\omega, \tau) = 0.$$

Считаем, что материал слоя алюминий, имеющий следующие характеристики:

$$L = 1 \text{ м}, \quad T_0 = 773 \text{ К}, \quad \rho = 2700 \text{ кг/м}^3,$$

$$C_{1111} = 9,05 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$C_{1122} = 5,55 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$C_{1212} = 3,50 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2,$$

$$D_{11} = D_{22} = 6,70 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}.$$

Численное решение системы (2.7), полученное с помощью формул (2.10), имеет вид, представленный на рис. 1 и 2.

Расчёты проводились для $N = 100$ точек разбиения по времени τ . Отметим, что при уменьшении вдвое шага разбиения графики практически совпадают.

Заключение

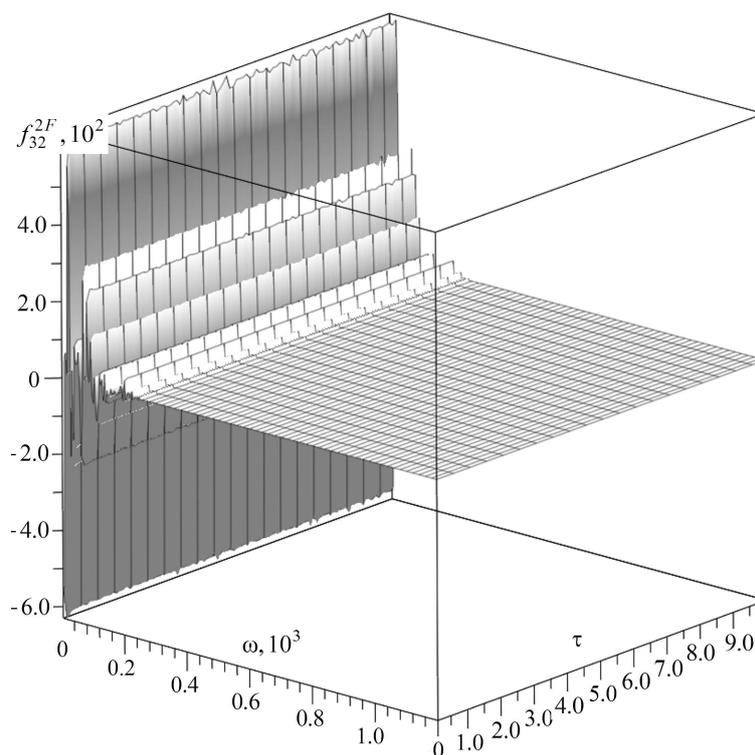
Предложенный алгоритм позволяет построить решение начально-краевой задачи с произвольными граничными условиями, используя решение эталонной задачи, в качестве которой была выбрана задача (2.1), (2.2),

(2.4). Как было отмечено, эталонная задача выбирается неединственным образом. Здесь, например, в качестве эталонной задачи можно было выбрать задачу с краевыми условиями вида:

$$\begin{aligned} u_1|_{x_2=0} &= f_{11}^2(x_1, \tau), \\ \sigma_{22}|_{x_2=0} &= f_{21}^2(x_1, \tau), \\ \eta|_{x_2=0} &= f_{31}^2(x_1, \tau), \\ u_1|_{x_2=1} &= f_{12}^2(x_1, \tau), \\ \sigma_{22}|_{x_2=1} &= f_{22}^2(x_1, \tau), \\ \eta|_{x_2=1} &= f_{32}^2(x_1, \tau). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Однако в этом случае системы (2.6) и (2.7) будут состоять из четырех уравнений относительно четырех неизвестных функций. Таким образом, правильный выбор эталонной задачи может существенно упростить решение исходной задачи.

Для задачи (2.1), (2.2), (2.4) характерно то, что граничные условия содержат производные нечетного порядка от функций u_1 , η и четного порядка от функции u_2 по переменной x_2 . Соответственно, в задаче с краевыми условиями (2.11) имеет место обратная ситуа-

Рис. 2. График численного решения для $f_{31}^{2F}(\omega, \tau)$

ция. Очевидно, что множество задач, обладающих вышеуказанными свойствами, отнюдь не ограничено рассмотренными примерами. Их выбор здесь в качестве возможных эталонных задач обусловлен тем, что граничные условия в них имеют определенных механический смысл.

В заключение отметим, что область применимости данного метода не ограничена геометрией области. Алгоритм можно использовать при решении начально-краевых задач в произвольных криволинейных координатах.

Литература

1. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. 2015. Т. 57, книга 4. С. 103–111.
2. Земсков А. В., Тарлаковский Д. В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропного однокомпонентного слоя // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56, no. 6. С. 102–110.
3. Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // Materials

Physics and Mechanics. 2015. Vol. 23, no. 1. pp. 36–41.

4. Tarlakovskiy D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media // Encyclopedia of thermal stress, Springer Dordrecht Heidelberg New York London, Springer reference. 2014. Vol. 2, C-D, pp. 1064–1071.
5. Журавский А. М. Справочник по эллиптическим функциям. М.: Академия наук СССР, 1941. 236 с.

References

1. Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha uprugoi diffuzii dlya izotropnoi odnokomponentnoi poluploskosti [Two-dimensional unsteady problem of elasticity with diffusion for isotropic one-component half-plane]. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Scientists notes of the Kazan University. Series Physics and mathematics], 2015, vol. 157, iss. 4 pp. 103–111. (In Russian)
2. Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Dvumernaya nestatsionarnaya zadacha uprugoy diffuzii dlya izotropnogo odnokomponentnogo sloya [Two-dimensional nonstationary problem elastic for diffusion an isotropic one-component layer] //

- Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 2015, vol. 56, no. 6, pp. 1023–1030. (In Russian)
3. Zemskov A. V., Tarlakovskiy D. V. Method of the equivalent boundary conditions in the unsteady problem for elastic diffusion layer // *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, no. 1, pp. 36–41.
 4. Tarlakovskiy D. V., Vestyak V. A., Zemskov A. V. Dynamic Processes in Thermoelectromagnetoe-
lastic and Thermoelastodiffusive Media // *Encyclopedia of thermal stress*, Springer, Dordrecht, Heidelberg, New-York, London, Springer reference. 2014. Vol. 2, C-D, pp. 1064–1071.
 5. Zhuravskii A. M. *Spravochnik po ellipticheskim funktsiyam* [Elliptic Function Reference Book]. Moscow, USSR Academy of Sciences Publ., 1941, 236 p. (In Russian)

Статья поступила 3 марта 2016 г.

© Земсков А. В., Тарлаковский Д. В., 2016