ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2016. №1. С. 71–78

УДК 539.422.3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СЛОИСТОЙ СРЕДЫ С ЖИДКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Павлова А. В., Рубцов С. Е., Телятников И. С., Зарецкая М. В.

INVESTIGATION OF THE STRESS STATE OF LAYERED MEDIUM WITH LIQUID INCLUSION

Pavlova A. V.*, Rubtsov S. E.*, Telyatnikov I. S.**, Zaretskaya M. V.*

* Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
** Southern Scientific Centre of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Abstract. In the process of studying regional seismicity and development of methods for assessing the induced or technogenic seismicity, there may arise problems of geomechanics, geophysics, hydrogeology, engineering geology, resulting in the need of constructing mathematical models of structurally inhomogeneous mediums, and study of different dynamic effects in the contacting liquid and elastic mediums on their basis. Expediency of consideration of the piecewise heterogeneous mediums can be justified by the structure of real objects as well as by the convenience of the respective discretization of inhomogeneous medium.

In this paper, we consider a model of the geological environment, consisting of two elastic mediums (layer and half-space) with liquid layer between them. Water-filled cavities in the rock formations after pumping out hydrocarbon raw materials and geological medium containing interstratal non-pressure waters can be modeled by similar structures. Movement of fluid outlets, described by the velocity potential, satisfies the wave equation. The interaction of the liquid and elastic mediums is defined by the equality of vertical components of fluid outlets velocity and the elastic medium in the contact zone. The shear stresses at the interface of liquid and elastic medium are absent. Displacements of elastic mediums satisfy the equations of Lame. Displacement amplitudes satisfy the conditions of the principle of limiting absorption.

The proposed algorithm allows to determine the contact stresses at the interface between the liquid and elastic mediums and to investigate the properties of generated displacement field.

Keywords: geomechanics, stress-strain state, fault-block structure, heterogeneity, heterogeneous inclusions.

Введение

Несмотря на многолетние усилия и значительные успехи, проблема оценки сейсмичности далека от полного решения. Построение моделей участков земной коры и породных массивов с учетом строения разломно-блоковых структур и наличия в них неоднородностей особенно важно при изучении региональной сейсмичности. Особое место занимают модели структурно-неоднородных сред и изучение на их основе различных динамических эффектов в контактирующих жидкой и упругой средах.

Известно, что одной из причин землетрясений является деятельность человека, последствия которой приводят к изменению фонового (естественного) напряженно-деформированного состояния земной коры. Наиболее значимые техногенные сейсмические события индуцируются длительной добычей нефти и газа, закачкой в разломы во-

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

Илья Сергеевич Телятников, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-08-00191_а, 16-41-230184).

ды и других жидкостей. Так называемые наведенные землетрясения неоднократно регистрировались на территории РФ и за рубежом, приводя к техногенным авариям и разрушениям. Масштабы катастроф и чрезвычайных ситуаций зависят от объемов недр и площадей, на которые оказываются техногенные воздействия при добыче полезных ископаемых.

Активизация сейсмических процессов в областях интенсивной нефте- и газодобычи требует развития системы превентивных мер для прогноза и снижения риска возникновения техногенного землетрясения. Если работы ведутся в районах с высокой естественной напряженностью коры, то даже слабое воздействие может привести к сильной наведенной сейсмичности. Зная естественную напряженность коры до техногенного воздействия, можно, применяя методы геомеханики, механики деформируемого твердого тела или механики сплошных сред, установить изменения поля напряженности на различных этапах выработки, оценить закономерности изменения сейсмичности во времени, дать прогнозные оценки. Аналогичные проблемы возникают в задачах геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии, изучающей условия строительства различных сооружений.

Для корректного решения поставленной проблемы необходимо рассматривать модель геофизической среды, максимально приближенную к естественной, и модели механики деформируемого твердого тела, адекватно описывающие напряженно-деформированное состояние сред различной реологии.

1. Современное состояние исследований

Риск возникновения наведенных землетрясений в зонах интенсивного отбора углеводородов наряду с совершенствованием базы аппаратурного мониторинга геологических процессов требует большего внимания к построению математических моделей участков земной коры и породных массивов с учетом наличия в них неоднородностей.

Оба этих подхода чрезвычайно важны. Первый — развитие систем сейсмомониторинга широко внедряется на практике. Для его реализации необходимо создать сеть высокоточных сейсмостанций по регистрации интенсивности сейсмических событий, данные которой позволяют районировать территорию по сейсмической активности. Возможен учет данных о геологическом строении, трещиноватости, глубинном строении и структуре горных пород [1]. Мониторинг в течение длительного времени позволяет выявить наличие значительных техногенных изменений в верхней части земной коры в результате добычи углеводородов, зависимость сейсмической активности от интенсивности добычи нефти и газа, районировать территорию региона по сейсмической активности. В качестве недостатка данного подхода следует отметить, что полученные данные и закономерности справедливы только для территории наблюдения и не могут быть применены для другого месторождения, то есть не обладают общностью и прогностической ценностью. Кроме того, для интерпретации данных сейсмониторинга необходимо привлекать сложный математический аппарат решения обратных задач, чего на практике не делается, применяются упрощенные методы геологии и геофизики, что снижает точность и достоверность полученных результатов.

Для принятия управленческих решений более полезным может оказаться второй подход, связанный с развитием математических методов оценки и прогноза техногенной сейсмичности.

Для определения характеристик естественного геофизического поля по известным параметрам среды ставится задача динамической теории упругости для неоднородного по одной или двум координатам изотропного полупространства. Решают поставленные краевые задачи, применяя численные и численно-аналитические методы (метод конечных разностей (МКР), метод конечных элементов (МКЭ), метод граничных элементов (МГЭ), метод модального разложения волнового поля, псевдоспектральный (Фурье) метод и др.). В ряде случаев рассматривается слоистая модель геофизической среды [2–6]. Рассчитанная естественная напряженность коры будет приближенной, так как используются упрощенные математические модели и модели геофизической среды.

Дальнейшее определение техногенных напряжений производится, например, с применением метода «Прогнозирование напряжений на изучаемой площади» (патент РФ № 2488146), где прогнозируемые величины напряжений вычисляют по данным сейсмического отражения.

Таким образом, на современном этапе не существует экспериментального или аналитического способа, позволяющего до начала производственного процесса выполнить анализ техногенных напряжений в земной коре и оценить риск возникновения сейсмического события.

2. Постановка задачи

При разработке моделей геологических процессов особое место занимает изучение влияния масс жидкости на распространение волн в средах различной реологии, например, исследование различных динамических эффектов в контактирующих жидкой и упругой средах. С этой целью рассматриваются задачи для слоя или системы слоев идеальной сжимаемой жидкости и упругих слоев с плоскопараллельными границами.

В настоящей работе рассматривается модель геологической среды, содержащей межпластовые безнапорные воды, исследуется распределение контактных напряжений на границе раздела сред с учетом частотных характеристик и физических свойств среды.

В случае если безнапорные воды располагаются в породах, ограниченных сверху и снизу водонепроницаемыми пластами, рассматривается пакет, состоящий из двух упругих сред (слоя и слоистого полупространства) и расположенного между ними слоя жидкости.

Подобными структурами могут моделироваться заполненные водой пустоты в горных породах после откачки углеводородного сырья.

Для построения адекватной модели напряженно-деформированного состояния геологической среды необходим учет анизотропии, присущей геоматериалам, что существенно усложняет расчет волновых полей. Однако среда под жидким слоем может представляться в виде пакета слоев на однородном полупространстве. Целесообразность рассмотрения кусочно-неоднородных сред может быть обоснована как структурой реальных объектов, так и удобством соответствующей дискретизации неоднородной среды [7–9].

Задача решается в плоской постановке. Колебания в упругой системе возбуждаются гармоническим вертикальным сосредоточенным источником на частоте ω, расположенным на поверхности упругого слоя. Рассматривается установившийся процесс колебаний, т.е. зависимость всех неизвестных и заданных функций от времени определяется множителем $e^{-i\omega t}$.

Касательные и нормальные напряжения на поверхности системы сред определяются условиями

$$\tau_{xz}\big|_{z=0} = 0,$$

$$\sigma_z\big|_{z=0} = C\delta\left(x - x_0\right) e^{-i\omega t}, \qquad (2.1)$$

где τ_{xz} — касательные напряжения, σ_z — нормальные напряжения, $C = \text{const}$, функция $C\delta\left(x - x_0\right) e^{-i\omega t}$ — моделирует поверхностный сосредоточенный источник, возбуждающий гармонические колебания.

Верхний упругий слой имеет следующие характеристики: плотность ρ_1, постоянные Ляме λ_1, μ_1. Среда под жидким слоем $-\infty \leqslant z \leqslant -h_2$ представляет собой пакет из $N-1$ слоев на однородном полупространстве. Параметры Ляме и плотности слоев соответственно описываются параметрами λ_j, μ_j, ρ_j, $j = \overline{2, N-1}$. Упругие характеристики и плотность полупространства — λ_N, μ_N, ρ_N соответственно. Границы рассматриваемых слоев принимаются параллельными.

Движение точек жидкости, занимающей объем $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$, $-h_2 \leqslant z \leqslant -h_1$, описывается потенциалом скоростей $\varphi\left(x, z, t\right)$.

Смещения составляющих упругих сред характеризуются векторами

$$\bar{\mathbf{u}}_j\left(x, z, t\right) = \mathbf{u}_j\left(x, z\right) e^{-i\omega t},$$

$$\mathbf{u}_j\left(x, z\right) = \left\{u_j\left(x, z\right), w_j\left(x, z\right)\right\}, \quad j = \overline{1, N}.$$

На границах раздела жидкой и упругих сред $z = -h_k$ $(k = 1{,}2)$ для неизвестных амплитуд нормальных напряжений введены обозначения q_k. Касательные напряжения на границах раздела жидкой и упругих сред отсутствуют

$$\begin{cases} \tau^1_{xz}\big|_{z=-h_1} = 0, \\ \sigma^1_z\big|_{z=-h_1} = q_1\left(x\right) e^{-i\omega t}, \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\begin{cases} \tau^2_{xz}\big|_{z=-h_2} = 0, \\ \sigma^2_z\big|_{z=-h_2} = q_2\left(x\right) e^{-i\omega t}. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Здесь

$$\tau^j_{xz} = \mu_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial z} + \frac{\partial w_j}{\partial x}\right) e^{-i\omega t},$$

$$\sigma^j_z = \lambda_j\left(\frac{\partial u_j}{\partial x} + \frac{\partial w_j}{\partial z}\right) e^{-i\omega t} + 2\mu_j\frac{\partial w_j}{\partial z} e^{-i\omega t},$$

$$j = 1, 2.$$

В качестве условий сопряжения на границах упругих слоев принимаются условия непрерывности перемещений и напряжений. Взаимодействие жидкой и упругих сред определяется равенством вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\Big|_{z=-h_1} &= 0, \\ \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)\Big|_{z=-h_2} &= 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Движение точек жидкости, описываемое потенциалом скоростей, удовлетворяет волновому уравнению. Учитывая гармоническую зависимость параметров от времени и условия (2.4), краевая задача для жидкости может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x,z) &= -\frac{\omega^2}{c^2}\varphi(x,z), \\ \varphi(x,z)|_{z=h_1} &= -\frac{i}{\omega\rho_0}q_1(x), \\ \varphi(x,z)|_{z=h_2} &= -\frac{i}{\omega\rho_0}q_2(x), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где c — скорость звука в жидкости, ρ_0 — плотность жидкости.

В (2.5) и далее множитель $e^{-i\omega t}$ опущен.

Перемещения составляющих упругих сред удовлетворяют уравнениям Ляме, представляемым для установившихся волновых процессов в виде [10]

$$\begin{aligned} (\lambda_j + \mu_j)\,\mathrm{graddiv}\,\mathbf{u}_j + \\ + \mu_j\Delta\mathbf{u}_j + \rho_j\omega^2\mathbf{u}_j = 0, \\ j = \overline{1, N}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В частности, в случае гармонических колебаний уравнения движения верхнего упругого слоя $0 \leqslant z \leqslant h_1$ в покоординатной форме имеют вид

$$\begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) + \\ \qquad + \mu\Delta u_1 + \rho\omega^2 u_1 = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x} + \dfrac{\partial w_1}{\partial z}\right) + \\ \qquad + \mu\Delta w_1 + \rho\omega^2 w_1 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

В качестве условий излучения выполняется принцип предельного поглощения [11].

3. Методы решения поставленных краевых задач

Для решения такого рода задач могут быть применены различные методы [12–15]. Часто используются численные методы (метод конечных элементов, метод граничных элементов и др.). Однако такие традиционно применяемые методы анализа зачастую становятся неэффективными при исследовании динамических задач для протяженных областей при возрастании частоты колебаний.

В настоящей работе использован подход, представленный в [16] и примененный к решению ряда задач геомеханики [7, 8, 17]. Для случая плоско-параллельных границ и протяженных областей дифференциальный метод факторизации и метод блочного элемента приводят к тем же соотношениям, что и метод интегральных преобразований. В рассматриваемой модели применение интегрального преобразования Фурье по переменной x позволяет уменьшить размерность задачи и построить функциональные соотношения, из которых находятся Фурье-образы основных динамических характеристик системы. После применения обратного преобразования Фурье с использованием аппарата теории вычетов определяются контактные напряжения на границе раздела жидкой и упругих сред [10, 11].

Для упругого слоя можно выписать интегральные соотношения, связывающие перемещения $\mathbf{u}_1$ и напряжения $\mathbf{q}_1 = \{0,\ q_1\}$ на границе раздела с жидким слоем (при $z = h_1$)

$$\mathbf{u}_1(x, h_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma} \mathbf{K}(\alpha, h_1)\,\mathbf{Q}_1(\alpha, h_1)\,e^{-i\alpha x}d\alpha.$$

Здесь $\mathbf{K} = \|K_{mn}\|^2_{m,n=1}$ — матрица Грина упругого слоя, $\mathbf{Q}_1$ — преобразование Фурье $\mathbf{q}_1$. На нижней границе жидкого слоя и упругого полупространства также можно выписать соотношения для $\mathbf{u}_2$

$$\mathbf{u}_2(x, h_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\sigma*} \mathbf{K}_*(\alpha, h_2)\,\mathbf{Q}_2(\alpha, h_2)\,e^{-i\alpha x}d\alpha,$$

где $\mathbf{Q}_2$ — Фурье-образ $\mathbf{q}_2 = \{0,\ q_2\}$. Алгоритм построения матрицы Грина $\mathbf{K}_*$ слоистого полупространства описан в [11]. Контуры интегрирования выбираются в соответствии с условиями излучения. Далее для простоты считаем, что упругие постоянные и плотность не изменяются для всего упругого пакета и обозначим их λ, μ и ρ.

Применив экспоненциальное преобразование Фурье к (2.5), получим краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ), решение которой имеет вид

$$\Phi(\alpha, z) = \frac{iA(z)}{\omega\rho_0 sh\gamma_0}, \tag{3.1}$$

$$A(z) = Q_1(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(\sigma_0(z-h_2)) - \\ - Q_2(\alpha)\,\mathrm{sh}\,(\sigma_0(z-h_1)),$$

где $\Phi(\alpha, z)$ — Фурье-образ потенциала скоростей, $Q_{1,2}$ — интегральные характеристики неизвестных нормальных напряжений на границах раздела сред (при $z = h_{1,2}$ соответственно),

$$\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}, \quad \gamma_0 = \sigma_0(h_2 - h_1).$$

В результате применения преобразования Фурье к задаче (2.7), (2.1), (2.2) придем к краевой задаче для системы ОДУ относительно изображений амплитуд смещений, решив которую, получим представление Фурье-образов амплитуд перемещений для упругого слоя в следующем виде:

$$U_1(\alpha, z) = \frac{2i\alpha}{\Delta}\left[Ae^{i\alpha x_0}(\eta\Delta_{1c} + \sigma_1\sigma_2\Delta_{2c}) + \\ + Q_1(\eta\Delta_{3c} + \sigma_1\sigma_2\Delta_{4c})\right], \tag{3.2}$$

$$W_1(\alpha, z) = \\ = -\frac{2\sigma_1}{\Delta}\left[Ae^{i\alpha x_0}\left(\eta\Delta_{1s} + \alpha^2\Delta_{2s}\right) + \\ + Q_1\left(\eta\Delta_{3s} + \alpha^2\Delta_{4s}\right)\right].$$

Здесь введены обозначения

$$\Delta = 4\mu\left[\mathrm{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1))\Omega_+^2 - \\ - \mathrm{ch}(h_1(\sigma_2 + \sigma_1))\Omega_-^2 - \\ - 4\alpha^2\sigma_1\sigma_2\eta^2\right],$$

$$\Omega_\pm = \alpha^2\sigma_1\sigma_2 \pm \eta^2,$$

$$\Delta_{1c} = \mathrm{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1 z)\Omega_+ + \\ + \mathrm{ch}(\sigma_1 z - h_1(\sigma_2 + \sigma_1))\Omega_- - 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{ch}(\sigma_1 z),$$

$$\Delta_{2c} = \mathrm{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2 z)\Omega_+ - \\ - \mathrm{ch}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 z)\Omega_- - 2\eta^2\,\mathrm{ch}(\sigma_2 z),$$

$$\Delta_{3c} = \mathrm{ch}(h_1\sigma_2 - \sigma_1 z)\Omega_+ + \mathrm{ch}(h_1\sigma_2 + \sigma_1 z)\Omega_- - \\ - 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{ch}(h_1\sigma_1 - \sigma_1 z),$$

$$\Delta_{4c} = \mathrm{ch}(h_1\sigma_1 - \sigma_2 z)\Omega_+ - \mathrm{ch}(h_1\sigma_1 + \sigma_2 z)\Omega_- - \\ - 2\eta^2\,\mathrm{ch}(h_1\sigma_2 - \sigma_2 z),$$

$$\Delta_{1s} = \mathrm{sh}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1 z)\Omega_+ + \\ + \mathrm{ch}(\sigma_1 z - h_1(\sigma_2 + \sigma_1))\Omega_- - 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{ch}(\sigma_1 z),$$

$$\Delta_{2s} = \mathrm{sh}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2 z)\Omega_+ - \\ - \mathrm{sh}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 z)\Omega_- - 2\eta^2\,\mathrm{sh}(\sigma_2 z),$$

$$\Delta_{3s} = \mathrm{sh}(h_1\sigma_2 - \sigma_1 z)\Omega_+ + \mathrm{sh}(h_1\sigma_2 + \sigma_1 z)\Omega_- - \\ - 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\,\mathrm{sh}(h_1\sigma_1 - \sigma_1 z),$$

$$\Delta_{4s} = \mathrm{sh}(h_1\sigma_1 - \sigma_2 z)\Omega_+ + \mathrm{sh}(h_1\sigma_1 + \sigma_2 z)\Omega_- + \\ + 2\eta^2\,\mathrm{sh}(h_1\sigma_2 - \sigma_2 z),$$

$$\sigma_1^2 = \alpha^2 - k_1^2, \quad \sigma_2^2 = \alpha^2 - k_2^2,$$

$$k_1^2 = \frac{\rho_1\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}, \quad \eta = \alpha^2 - \frac{k_2^2}{2}.$$

Амплитуды перемещений $\mathbf{u}_2(x, z)$ точек упругого полупространства $-\infty \leqslant x \leqslant +\infty$, $z \leqslant h_2$ удовлетворяют уравнениям (2.6) и условиям на границе с жидкостью (2.4), при этом [11]

$$u_2|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0, \quad w_2|_{\sqrt{x^2+z^2}\to\infty} \to 0.$$

В результате решения этой задачи интегральные характеристики перемещений в полупространстве запишутся

$$U_2(\alpha, z) = \frac{i\alpha Q_2}{2\mu\Omega_-}\left(\eta e^{\sigma_1(h_2 - z)} - \sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_2(h_2 - z)}\right),$$

$$W_2(\alpha, z) = \\ = -\frac{\sigma_1 Q_2}{2\mu\Omega_-}\left(\sigma_1\eta e^{\sigma_1(h_2 - z)} - \alpha\sigma_2 e^{\sigma_2(h_2 - z)}\right). \tag{3.3}$$

Для нахождения образов Фурье $Q_1(\alpha)$ и $Q_2(\alpha)$ используются условия (2.5) и представления (3.1), (3.2), (3.3).

После применения обратного преобразования Фурье с использованием аппарата теории вычетов получено аналитическое представление для функций контактных напряжений на границе раздела сред [11]

$$q_k(x) = i\sum_{j=1}^{N} \operatorname*{res}_{\alpha=\xi_j} Q_k(\alpha) e^{i\xi_j x} + \\ + \int_{\Sigma_1^{\pm}} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \\ + \int_{\Sigma_2^{\pm}} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha,$$

$$k = 1, 2,$$

где ξ_j нули функции Θ, $\sum_j^-$ — берега разрезов из точек ветвления, расположенных на отрицательной полуоси (для $x_0 + x > 0$), $\sum_j^+$ — на положительной (для $x_0 + x < 0$),

$$Q_1 = -\frac{a_0\rho_0\omega^2}{\Theta}\times \\ \times\left(\rho_0\omega^2 \operatorname{sh}\gamma_0\sigma_1\left(\alpha^2-\eta\right) - 2\mu\sigma_0\Delta\operatorname{ch}\gamma_0\Omega_-\right),$$

$$Q_2 = \frac{2\mu\sigma_0 a_0\rho_0\omega^2\Omega_-}{\Theta},$$

$$\Theta = \operatorname{sh}\gamma_0\left(-\rho_0^2\omega^4\sigma_1\left(\alpha^2-\eta\right)g_1 + \right. \\ \left. + 2\mu\sigma_0^2\Delta^2\Omega_-\right) - \\ - \sigma_0\rho_0\omega^2\operatorname{ch}\gamma_0\Delta\left(\sigma_1\left(\alpha^2-\eta\right) - 2\mu g_1\Omega_-\right),$$

$$a_0 = 4\sigma_1\left(\alpha^2-\eta\right)Ae^{-i\alpha x_0}\times \\ \times\left(\alpha^2\sigma_1\sigma_2\operatorname{sh}(\sigma_1 h_1) - \eta^2\operatorname{sh}(\sigma_2 h_1)\right),$$

$$g_1 = 2\sigma_1\left(\alpha^2-\eta\right)\times \\ \times\left(\operatorname{sh}((h_1(\sigma_1-\sigma_2))\Omega_+ + \right. \\ \left. + \operatorname{sh}(h_1(\sigma_1+\sigma_2))\Omega_-\right).$$

Значения интегралов находятся численно.

Выводы

Используемый в работе подход позволяет исследовать закономерности формирующихся полей перемещений и напряжений. Рассмотренная задача может служить этапом для построения общих моделей, адекватно описывающих поведение реальных геологических сред под воздействием произвольных поверхностных и внутренних источников.

Полученные результаты способствуют созданию основ новых перспективных технологий мониторинга, а также дают возможность приблизиться к решению проблемы прогноза опасных деструктивных процессов, вызванных наведенной сейсмичностью, протекающих в блочно структурированной геофизической среде.

Широкое применение представленных методов может также способствовать увеличению надежности застройкой территории, транспортной сети, объектов авиационной и космической промышленности.

Литература

1. *Hallo M., Oprsal I., Eisner L., Ali M.Y.* Prediction of magnitude of the largest potentially induced seismic event // Journal of Seismology. 2014. Vol. 18. Iss. 3. P. 421–431.
2. *Маловичко А.А., Маловичко Д.А.* Применение методов численного моделирования сейсмических волновых полей для изучения разномасштабных проявлений техногенной сейсмичности // Современные математические и геологические модели природной среды: Сборник научных трудов. М.: ОИФЗ РАН, 2002. С. 120–138.
3. *Kennet B.L.N., Kerry N.J.* Seismic waves in a stratified half space // Geophys. J. R. astr. Soc. 1979. Vol. 57. P. 557–583.
4. *Pak R.Y.S., Guzina B.B.* Seismic soil-structure interaction analysis by direct boundary element methods // Int. J. Solids Struct. 1999. Vol. 36. P. 4743–4766.
5. *Zhang H. M., Chen X. F., Chang S.* An efficient numerical method for computing synthetic seismograms for a layered half-space with sources and receivers at close or same depths // Pure and Applied Geophysics. 2003. Vol. 160. P. 467–486.
6. *Kosloff D., Baysall E.* Forward modeling by a Fourier method // Geophysics. 1982. Vol. 47. P. 1402–1412.
7. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Горшкова Е.М., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Телятников И.С.* Исследование поведения структурно неоднородных сред с изменяющимися свойствами // Экологический вестник научных

центров черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 3. С. 5–11.

8. *Зарецкая М.В.* Математические модели деструктивных процессов в структурно-неоднородной геофизической среде // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2014. № 2. С. 25–30.
9. *Зарецкая М.В., Лозовой В.В.* К исследованию строения некоторых геологических структур // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2012. № 11. С. 19–24.
10. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
11. *Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
12. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
13. *Молотков Л.А., Крауклис П.В., Крауклис Л.А.* О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких средах // Записки научных семинаров ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 230–271.
14. *Tutuncu A.N., Bui B.T.* A coupled geomechanics and fluid flow model for induced seismicity prediction in oil and gas operations and geothermal applications // Journal of Natural Gas Science and Engineering. 2015. Vol. 29. P. 110–124.
15. *Cornet F.H.* Earthquakes induced by fluid injections (Short Survey) // Science. 2015. Vol. 348. Iss. 6240. P. 1204–1205.
16. *Нижник М.П., Павлова А.В., Рубцов С.Е.* К решению одной задачи для упругого полупространства с жидким включением // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 2. С. 40–43.
17. *Павлова А.В., Рубцов С.Е.* Дифференциальный метод факторизации для слоисто-блочных сред с дефектами // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4 (5). С. 2410–2412.

References

1. Hallo M., Oprsal I., Eisner L., Ali M.Y. Prediction of magnitude of the largest potentially induced seismic event. *Journal of Seismology*, 2014. vol. 18, iss. 3, pp. 421–431.
2. Malovichko A.A., Malovichko D.A. Primenenie metodov chislennogo modelirovanija sejsmicheskih volnovyh polej dlja izuchenija raznomasshtabnyh projavlenij tehnogennoj sejsmichnosti [Application of numerical modeling of seismic wave fields for the study of multiscale manifestations of technogenic seismicity]. *Sovremennye matematicheskie i geologicheskie modeli prirodnoj sredy: Sbornik nauchnyh trudov* [Proc. of Modern mathematical and geological models of the environment], Moscow, OIFZ RAN Publ., 2002, pp. 120–138. (In Russian)
3. Kennet B.L.N., Kerry N.J. Seismic waves in a stratified half space. Geophys. *J. R. astr. Soc.*, 1979, vol. 57, pp. 557–583.
4. Pak R.Y.S., Guzina B.B. Seismic soil-structure interaction analysis by direct boundary element methods. *Int. J. Solids Struct.*, 1999, vol. 36, pp. 4743–4766.
5. Zhang H.M., Chen X.F., Chang S. An efficient numerical method for computing synthetic seismograms for a layered half-space with sources and receivers at close or same depths. *Pure and Applied Geophysics*, 2003, vol. 160, pp. 467–486.
6. Kosloff D., Baysall E. Forward modeling by a Fourier method. *Geophysics*, 1982, vol. 47, pp. 1402–1412.
7. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Zareckaja M.V., Pavlova A.V., Teljatnikov I.S. Issledovanie povedenija strukturno neodnorodnyh sred s izmenjajushhimisja svojstvami [Investigation of the behavior of structurally inhomogeneous media with changing properties]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 3, pp. 5–11. (In Russian)
8. Zareckaja M.V. Matematicheskie modeli destruktivnyh processov v strukturno-neodnorodnoj geofizicheskoj srede [Mathematical models of destructive processes in structurally inhomogeneous geophysical environment]. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse* [Protecting the environment in the oil and gas industry], 2014, no. 2, pp. 25–30. (In Russian)
9. Zareckaja M.V., Lozovoj V.V. K issledovaniju stroenija nekotoryh geologicheskih struktur [To investigation of the structure of certain geological structures]. *Zashhita okruzhajushhej sredy v neftegazovom komplekse* [Protecting the environment in the oil and gas industry], 2012, no. 11, pp. 19–24. (In Russian)
10. Novackij V. *Teorija uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1975, 872 p. (In Russian)
11. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Zinchenko Zh.F. *Dinamika neodnorodnyh linejno-uprugih sred* [The dynamics of inhomogeneous linear-elastic media]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 344 p. (In Russian)
12. Brehovskih L.M. *Volny v sloistyh sredah* [Waves in layered media]. Moscow, Nauka Publ., 1973, 343 p. (In Russian)
13. Molotkov L.A., Krauklis P.V., Krauklis L.A. O rasprostranenii sejsmicheskih voln v blochnyh uprugo-zhidkih sredah [On the propagation of seismic waves in block elastic-fluid media]. *Zapiski nauchnyh seminarov POMI* [Notes scien-

tific seminars POMI], 2003, vol. 297, pp. 230–271. (In Russian)

14. Tutuncu A.N., Bui B.T. A coupled geomechanics and fluid flow model for induced seismicity prediction in oil and gas operations and geothermal applications. *Journal of Natural Gas Science and Engineering*, 2015, vol. 29, pp. 110–124.
15. Cornet F.H. Earthquakes induced by fluid injections (Short Survey). *Science*, 2015, vol. 348, iss. 6240, pp. 1204–1205.
16. Nizhnik M.P., Pavlova A.V., Rubcov S.E. K resheniju odnoj zadachi dlja uprugogo poluprostranstva s zhidkim vkljucheniem [The solution of a problem for the elastic half-space with a liquid inclusion]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov Chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2006, no. 2, pp. 40–43. (In Russian)
17. Pavlova A.V., Rubtsov S.E. Differentsial'nyy metod faktorizatsii dlya sloisto-blochnykh sred s defektami [Differential factorization method for layered block media with defects]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo* [Bulletin of Nizhny Novgorod University named N. I. Lobachevsky], 2011, no. 4 (5), pp. 2410–2412. (In Russian)

Статья поступила 26 февраля 2016 г.