

УДК 654+681.3

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Соловьев А. Н., Зиборов Е. Н.

MODELING AND DETERMINATION OF THE MECHANICAL PROPERTIES
OF THE INTERFACIAL LAYER OF REINFORCED COMPOSITE MATERIALS

Soloviev A. N., Ziborov E. N.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, 344000, Russia
e-mail: solovievarc@gmail.com

Abstract. The presence of the interfacial layer between the reinforcing fibers and the matrix is one of the structural features of reinforced composite materials. The properties of this layer are unknown and may vary during operation when an adhesion failure between the reinforcing fiber and the matrix takes place. The work is dedicated to modeling of the interfacial layer in reinforced composite materials and determination of its parameters (mechanical properties and size) using analytic solutions for a laminated cylinder with subsequent study of the possibility of using the results obtained for a representative volume of the composite in the form of a prismatic block for which a full-scale experiment is possible. The interphase layer is modeled by isotropic elastic material with unknown properties; the problem of defining its properties is formulated as an inverse coefficient problem of elasticity theory. The force applied to end of cylinder and the radial displacement of the lateral surface of the cylinder is the additional information for solving the inverse problem if given its end displacement. The system of equations is obtained, from which the Young's modulus and Poisson's ratio of interfacial layer with a given thickness or its thickness, and one of the parameters of the elastic properties are defined. Prismatic representative volume of reinforced composite with interfacial layer is modeled using the finite element method in the package ANSYS. Characteristics of stress deformed state of cylindrical and prismatic representative volumes are compared at the wide range of the elastic properties' changes of the materials of its components. The possibility of determining the parameters of the interfacial layer in a prismatic sample using the method developed for the cylindrical sample using additional information about its deformation is showed, as a result of this comparison. These numerical experiments, including the "noisy" data demonstrate effectiveness of the developed method.

Keywords: interfacial layer, composite cylinder, modeling composite.

Введение

В связи с широким применением композиционных материалов (КМ), возникает проблема описания адгезионных взаимодействий между различными их фазами. Особое значение эта проблема приобретает при моделировании армированных КМ, подверженным циклическим нагрузкам, в результате которых возникают нарушения адгезии, а следовательно, и изменение механических свойств КМ. Одним из принятых в отечественной и зарубежной литературе способов построения модели такого взаимодействия является

введение некоторого межфазного связующего слоя (МФС). Это в свою очередь требует разработки методов идентификации свойств МФС. Так в работе [1] на основе трехслойного составного цилиндра предложена модель межфазного слоя, включающая аналитический и численный подходы и позволяющая рассматривать анизотропные композиты, моделировать процессы на границе раздела фаз. В работе [2] рассмотрены методы математического моделирования межфазного слоя на основе изотропного упругого материала, а также методы определения его механических

Соловьев Аркадий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета, профессор кафедры математического моделирования Южного федерального университета; e-mail: solovievarc@gmail.com.

Зиборов Евгений Николаевич, аспирант кафедры теоретической и прикладной механики Донского государственного технического университета; e-mail: ziboroven@gmail.com.

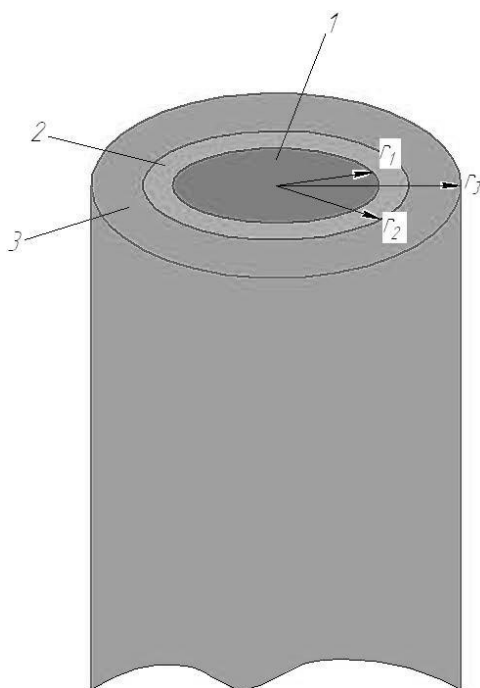


Рис. 1

свойств. В [3] представлены методы моделирования неоднородностей и скрытых дефектов структуры композита. В исследовании [4] представлены методы масштабного моделирования армированных композитов, позволяющие интегрировать собственно отдельные структуры материалов в систему. В [5] было проведено множество опытов с целью определения механизма передачи напряжений через МФС. С. А. Лурье с соавторами [6–16] разработаны различные модели межфазного слоя и адгезионного взаимодействия, в том числе, с использованием градиентной теории упругости.

В данной работе проведено моделирование армированного КМ с межфазным слоем в виде изотропного линейно упругого материала с дальнейшим определением механических свойств и геометрических характеристик МФС, а также указан набор экспериментов, измерения в которых могут служить входной информацией для предложенных моделей.

1. Постановка задачи

Рассмотрим многослойный цилиндр с радиусами r_1 , r_2 , r_3 (нижний индекс говорит о номере слоя в модели) и длиной l (рис. 1) в рамках линейной теории упругости. Урав-

нения равновесия в цилиндрической системе координат имеют вид [17]

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{\phi\phi}}{r} = 0, \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{\partial \tau_{\phi z}}{\partial z} = 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 2\mu \varepsilon_{rr} + \lambda e, \\ \sigma_{\phi\phi} = 2\mu \varepsilon_{\phi\phi} + \lambda e, \\ \sigma_{zz} = 2\mu \varepsilon_{zz} + \lambda e, \\ \tau_{r\phi} = 2\mu \varepsilon_{r\phi}, \quad \tau_{\phi z} = \mu \varepsilon_{\phi z}, \\ \tau_{rz} = 2\mu \varepsilon_{rz}, \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\phi}{\partial \phi} + \frac{U_r}{r}; \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\phi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \phi} + \frac{\partial U_\phi}{\partial r} - \frac{U_\phi}{r} \right); \\ \varepsilon_{\phi z} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_\phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_z}{\partial \phi} \right); \end{aligned} \quad (1.3)$$

где: U_r , U_ϕ , U_z — компоненты вектора перемещений, далее U_r будем обозначать как U , а U_z — как W ; σ_r , σ_ϕ , σ_z , $\tau_{r\phi}$, τ_{rz} , $\tau_{\phi z}$ — компоненты тензора напряжений,

$e = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\phi\phi} + \varepsilon_{zz}$ — относительная объемная деформация;

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \text{ и } \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

— параметры Ламе, которые выражены через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν , далее нижний индекс у этих величин будет соответствовать номеру слоя.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} W|_{z=0} = 0; \quad W|_{z=l} = \Delta z; \\ \sigma_r|_r = r_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

касательные напряжения на всей поверхности цилиндра равны нулю. Кроме этого, т.к. цилиндр составной, на границах фаз будут выполняться условия непрерывности компонент вектора смещений и напряжений.

2. Аналитическое решение

Решение системы уравнений (1.1)–(1.3) для задачи «растяжения – сжатия» будем искать в виде

$$U = U(r); \quad U_\phi = 0; \quad W = W(z). \quad (2.1)$$

Что приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} W^{(1)}(z) &= C_3 z + C_4; \\ W^{(2)}(z) &= C_7 z + C_8; \\ W^{(3)}(z) &= C_{11} z + C_{12}; \\ U^{(1)}(r) &= C_1 r + \frac{C_2}{r}; \\ U^{(2)}(r) &= C_5 r + \frac{C_6}{r}; \\ U^{(3)}(r) &= C_9 r + \frac{C_{10}}{r}; \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее верхний индекс у компонент вектора перемещений и тензора напряжений означает номер слоя.

Учитывая граничные условия (1.4) и условия непрерывности,

$$\begin{aligned} U^{(1)}\Big|_{r=r_1} &= U^{(2)}\Big|_{r=r_1}; \\ U^{(2)}\Big|_{r=r_2} &= U^{(3)}\Big|_{r=r_2}; \\ \sigma_r^{(1)}\Big|_{r=r_1} &= \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=r_1}; \\ \sigma_r^{(2)}\Big|_{r=r_2} &= \sigma_r^{(3)}\Big|_{r=r_2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

С учетом ограниченности решения при $r = 0$ и закрепления при $z = 0$ ($C_2 = C_{12} = 0$) получим систему уравнений для определения оставшихся произвольных постоянных:

$$C_1 r_1 = C_5 r_1 + \frac{C_6}{r_1}; \quad C_5 r_2 + \frac{C_6}{r_2} = C_9 r_2 + \frac{C_{10}}{r_2};$$

$$\begin{aligned} 2\mu_1 C_1 + \lambda_1 (2C_1 + C_3) &= \\ &= 2\mu_2 \left(C_5 - \frac{C_6}{r_1^2} \right) + \lambda_2 (2C_5 + C_7); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\mu_2 \left(C_5 - \frac{C_6}{r_2^2} \right) + \lambda_2 (2C_5 + C_7) &= \\ = 2\mu_3 \left(C_9 - \frac{C_{10}}{r_2^2} \right) + \lambda_3 (2C_9 + C_{11}); \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$2\mu_3 \left(C_9 - \frac{C_{10}}{r_3^2} \right) + \lambda_3 (2C_9 + C_{11}) = 0;$$

$$C_3 = C_7 = C_{11} = \frac{\Delta z}{l}.$$

3. Постановка и решение обратной задачи идентификации межфазного слоя

В обратной задаче идентификации межфазного слоя требуется определить его механические свойства E_2 , ν_2 или размеры ($h = r_2 - r_1$).

Дополнительной информацией для решения этой задачи служит сила F_0 , измеренная на верхнем торце цилиндра и радиальное смещение его боковой поверхности, $U^{(3)}|_{r=r_3} = U_0$, что приводит к двум дополнительным уравнениям

$$\begin{aligned} \left(2\mu_1 \frac{\Delta z}{l} + \lambda_1 (2C_1 + C_3) \right) S_1 + \\ + \left(2\mu_2 \frac{\Delta z}{l} + \lambda_2 (2C_5 + C_7) \right) S_2 + \\ + \left(2\mu_3 \frac{\Delta z}{l} + \lambda_3 (2C_9 + C_{11}) \right) S_3 = F_0; \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$C_9 r_3 + \frac{C_{10}}{r_3} = U_0,$$

где S_1 , S_2 , S_3 — площадь торца соответствующего слоя модели.

В результате соотношения (2.4)–(3.1) представляют собой систему 10 уравнений с 10-ю неизвестными. В работе эксперимент по

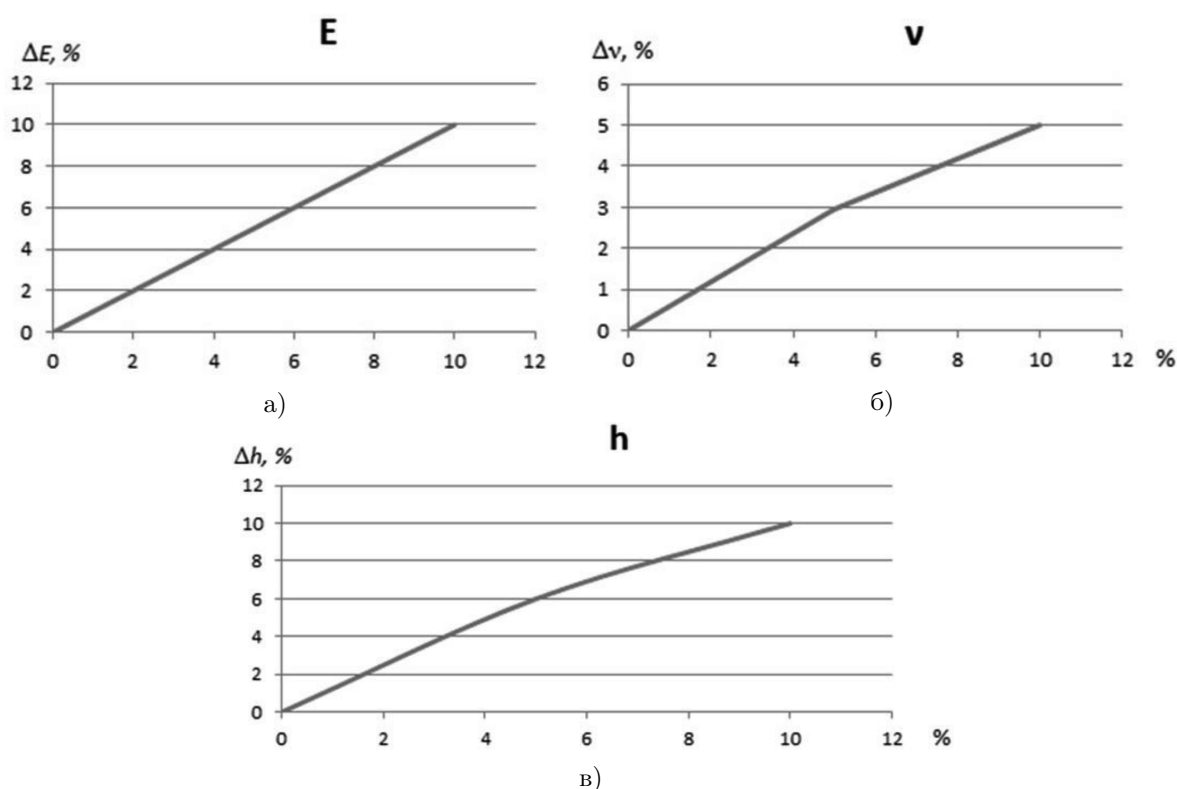


Рис. 2

измерению дополнительной информации заменялся предварительным решением задачи, в том числе конечноэлементным, с известными свойствами МФС. Решение обратной задачи показывает достаточно точное совпадение искомых характеристик с заданными в предварительном расчете.

В обратной задаче идентификации размера межфазного слоя требуется определить его толщину $h = (r_2 - r_1)$, когда одна из его механических характеристик E_2, ν_2 задавалась.

Учет погрешности измерений приводит к результатам, представленным на рис. 2. По вертикальным осям отложены относительные погрешности модуля упругости, коэффициента Пуассона и толщины межфазного слоя (в процентах), обозначенные через $\Delta E, \Delta \nu, \Delta h$ соответственно. По горизонтальным осям отложена относительная погрешность (в процентах) измерения дополнительной информации.

Решение задачи для трехслойного кругового цилиндра является модельным. В реальном эксперименте представительный объем состоит из пакета призматической формы,

армированного нитями. Поэтому рассмотрим решения аналогичных задач для единичного пакета представительного объема (одной армирующей нити в призматической матрице) и пакета таких объемов.

Сравним два решения: для составного трехслойного цилиндра (рис. 3а) и единичного пакета представительного объема (рис. 3б), сторона квадратного сечения которого равна внешнему диаметру составного цилиндра. При этом первая задача (1.1)–(1.4) решается аналитически, вторая (с аналогичными граничными условиями на торцах и свободными боковыми гранями) — методом конечных элементов.

Результаты расчета показывают, что радиальные перемещения на боковой поверхности цилиндра, найденные на основе аналитического решения, и нормальные перемещения точек средней линии боковых граней призмы (рис. 3б), рассчитанные с помощью МКЭ, практически совпадают (отличие не превышает 0,5 %).

На рис. 4а представлено распределение относительного по сравнению с радиальным перемещением U_c отклонения нормального

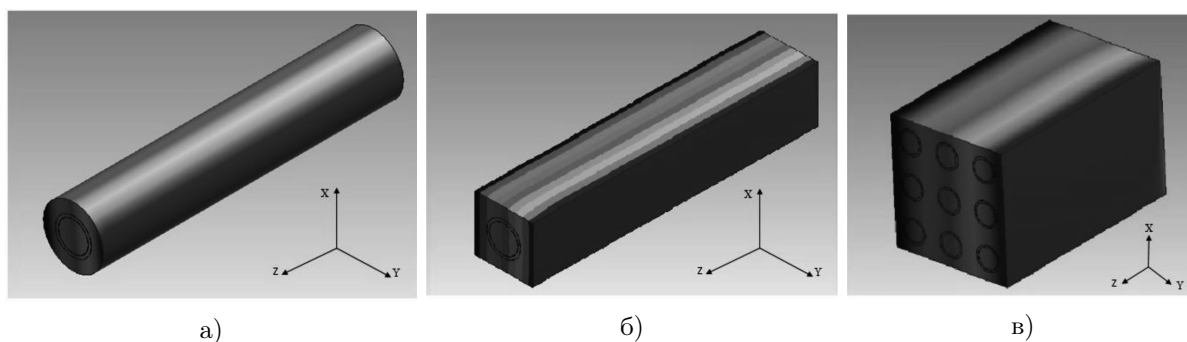


Рис. 3

перемещения точек боковых граней призмы в зависимости от расстояния до средней линии и процентной доли компонент композита. Для выбранных материалов композита и их объемных процентных долей отклонение перемещений точек боковой поверхности единичной призмы от значений перемещений точек средней линии не превышает 9 %.

Численный анализ напряженного состояния всех 3-х моделей (рис. 3) показывает, что нормальные напряжения σ_z при одинаковом осевом перемещении торца близки и отличаются не более, чем на 1 %.

Были рассчитаны зависимости нормальных напряжения и радиальных перемещения в моделях цилиндра и призмы в зависимости от отношения модулей упругости материалов, составляющих элементарный пакет ($E_{21} = \frac{E_2}{E_1}$; $E_{31} = \frac{E_3}{E_1}$). На рис. 4б представлено распределение относительной разницы нормальных напряжений на торце цилиндра и призматического представительного объема в зависимости от параметров E_{21} , E_{31} .

Расчеты, проведенные для различных призматических пакетов (например, рис. 3в), показывают, что на основе измерения среднего перемещения точек боковых поверхностей дополнительная информация для решения обратной задачи (радиальное перемещение поверхности единичного цилиндра, рис. 3а) может быть определена с точностью до 3.5 % (рис. 5).

На основании результатов численных экспериментов, представленных на рис. 4б, сила F_0 , необходимая в качестве дополнительной информации для решения обратной задачи для расчетной схемы цилиндрического пакета, может быть с достаточной степенью точности определена через силу F_D , измеренную в эксперименте для призматического образца,

из соотношения

$$F_0 + \left(\frac{E_3 C_{11}}{1 + \nu_3} + \frac{\nu_3 E_3 (2C_9 + C_{11})}{(1 + \nu_3)(1 - 2\nu_3)} \right) \times (S_K - S_C) = F_D, \quad (3.2)$$

где S_K — площадь торца представительного объема с квадратной матрицей, S_C — площадь торца представительного объема с круглой матрицей.

Вывод

Разработанный метод идентификации параметров межфазного слоя, основанный на использовании аналитического решения для слоистого цилиндра, позволяет определить их с точностью проведения измерений в эксперименте с цилиндрическим образцом. На основе численного эксперимента показано, что идентификация этих свойств может быть проведена и при использовании измерений эксперимента с призматическим представительным объемом однонаправленного армированного композита с различным процентным составом его компонент в широком диапазоне изменения относительных свойств межфазного слоя и матрицы. Определение механических свойств межфазного слоя может быть использовано в предсказании нарушения адгезии между армирующей нитью и матрицей, что позволит решить обратную задачу идентификации поврежденного состояния материала.

Литература

1. Новиков В.У., Бурьян О.Ю. Моделирование межфазного слоя в анизотропных композитах // Прикладная физика. 2000. № 1. С. 11–15.
2. Маркин В.Б., Тарасов А.В. Оценка вязкоупругих характеристик межфазных слоев и закономерность их влияния на механические

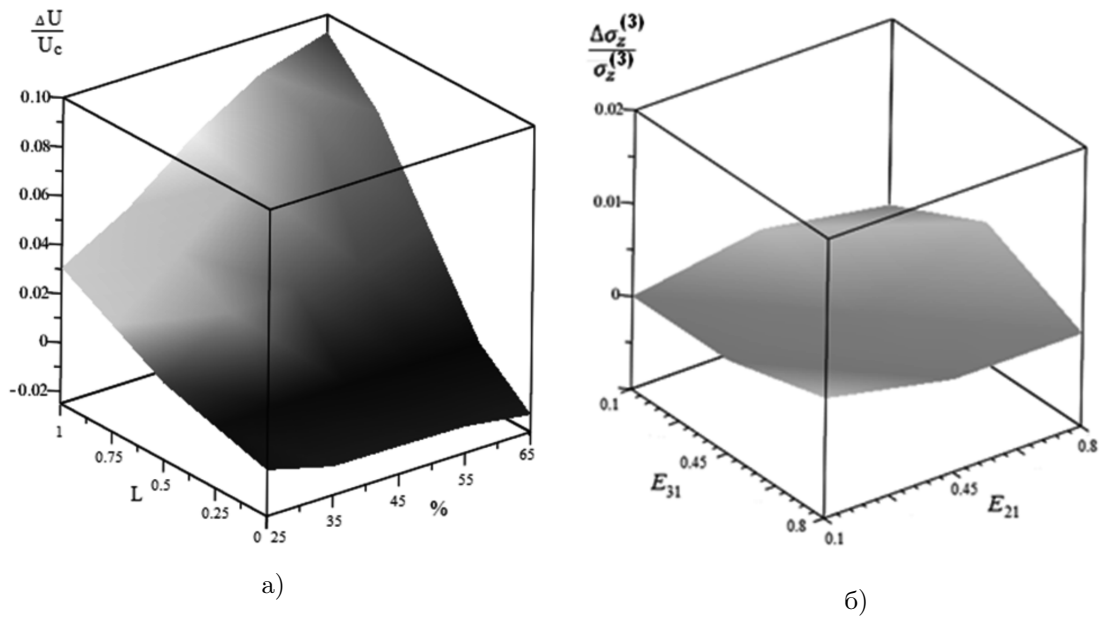


Рис. 4

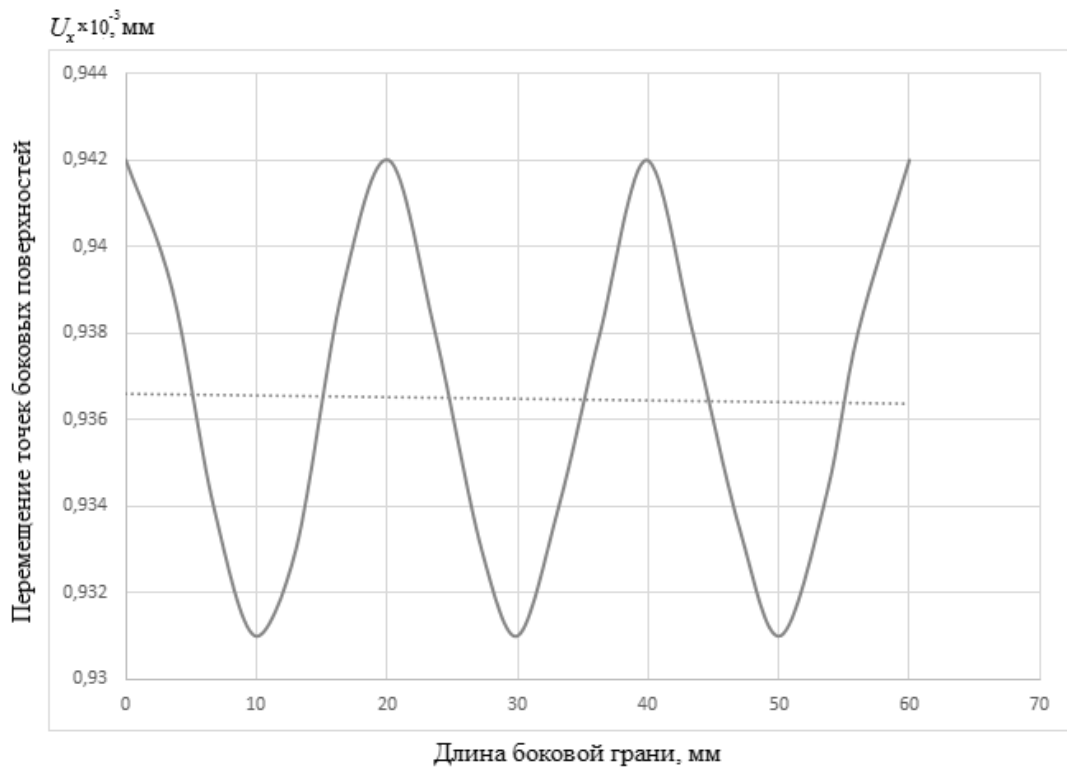


Рис. 5

- свойства полимерных композиционных материалов // Композиты в народном хозяйстве: Труды международной научно-технической конференции. Барнаул: Изд-во АлтГТУ. 1995. С. 20–11.
3. *Nikishkov Y., Makeev A.* Fatigue life assessment for composite materials / 18th International conference on composite material. 26 Aug 2011. Jeju Island, South Korea. P. 119–120.
 4. *Jeong Namin, Rosen D.W.* A multi-scale model for the computer-aided design of polymer composites / 18th International conference on composite material. 26 Aug 2011. Jeju Island, South Korea. P. 56–63.
 5. *Zhou L., Kang Y., Guo J.* Micromechanical modeling of double-walled carbon nanotube pullout from a matrix / 18th International conference on composite material. 26 Aug 2011. Jeju Island, South Korea. P. 17–19.
 6. *Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П.* Основы теории межфазного слоя // Механика композиционных материалов и конструкций. 2004. Т. 10. № 4. С. 596–612.
 7. *Lurie S.A., Belov P.A.* Modeling of the interphase layer in the mechanics of composite materials Identification of the model parameters // Abs. of Euromech Colloquium № 458. Lomonosov Moscow State University. 2004. P. 72–74.
 8. *Lurie S.A., Belov P.A.* Mathematical model of the interfacial layer in the mechanics of materials / 6th International Congress on Mathematical Modeling. Nizhni Novgorod, 2004. P. 19.
 9. *Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Belov P.A.* Multi-Scale Modeling of Interphase Layer in Mechanics of Heterogeneous Mediums / Euromech. S.-Petersburg (Repino). 2005. P. 59.
 10. *Lurie S.A., Belov P.A.* On Variant of Interphase Layer Theory / Int. Conf. “Advanced in Multiscale Modeling of Composite Materials Systems & Components”, С А. 25-30 Spt. Monterey. 2005. Abstracts. PP. 55–57.
 11. *Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D. B., Tuchkova N.P.* Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // Computational Materials Science. 2006. Vol. 41. No. 20. P. 6693–6707.
 12. *Потупчик Е.М., Лурье С.А., Белов П.А.* Исследование адгезионных взаимодействий в рамках неклассических моделей сплошных сред / Деформация и разрушение материалов и наноматериалов: Тез. докл. II Междунар. конф. М., 2007. С. 10.
 13. *Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О., Потупчик Е.М.* Об одном варианте континуальной теории адгезионных взаимодействий / Деформация и разрушение материалов и наноматериалов: Тез. докл. II Междунар. конф. М., 2007. С. 27.
 14. *Белов П.А., Лурье С.А.* Теория идеальных адгезионных взаимодействий // Механика композиционных материалов и конструкций. 2007. Т. 13. № 4. С. 519–536.
 15. *Лурье С.А., Белов П.А., Соляев Ю.О.* Об одной модели адгезионных свойств в механике материалов / Многомасштабное моделирование процессов и структур в нанотехнологиях: Тез. докл. I всероссийская конф. М., 2008. С. 193–195.
 16. *Белов П.А., Лурье С.А.* Континуальная теория адгезионных взаимодействий поврежденных сред / Механика композиционных материалов и конструкций. 2009. Т. 15. № 4. С. 610–629.
 17. *Демидов С.П.* Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979. 432 с.

References

1. Novikov V.U., Burian O. Modelirovanie mezhfaznogo sloya v anizotropnykh kompozitakh [Modeling of the interfacial layer in anisotropic composites]. *Prikladnaya fizika* [Applied Physics], 2000, no. 1, pp. 11–15. (In Russian)
2. Markin V.B., Tarasov A.V. Otsenka vyazko-uprugikh kharakteristik mezhfaznykh sloev i zakonmernost' ikh vliyaniya na mekhanicheskie svoystva polimernykh kompozitsionnykh materialov [Estimation of viscoelastic characteristics of the interfacial layers and regularity of their influence on the mechanical properties of polymer composites]. *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tehnicheskoy konferencii “Kompozity v narodnom hoziaystve”* [Proc. of the Int. Sci.-Tech. Conf. “Composites in the national economy”], Barnaul, Altai State Technical University, 1995, pp. 20–11. (In Russian)
3. Nikishkov Y., Makeev A. Fatigue life assessment for composite materials. *18th International conference on composite material*, 2011, Jeju Island, South Korea, pp. 119–120.
4. Namin Jeong, David W. Rosen. A multi-scale model for the computer-aided design of polymer composites. *18th International conference on compositematerial*, 2011, Jeju Island, South Korea, pp. 56–63.
5. Zhou L., Kang Y., Guo J. Micromechanical modeling of double-walled carbon nanotube pullout from a matrix. *18th International conference on composite material*, 2011, Jeju Island, South Korea, pp. 17–19.
6. *Obraztsov I.F., Lur'e S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodskiy D.B., Yanovskiy Yu.G., Kochemasova E.I., Dudchenko A.A., Potupchik E.M., Shumova N.P.* Osnovy teorii mezhfaznogo sloya [Fundamentals of the theory of the interfa-

- cial layer], *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Mechanics of composite materials and structures], 2004. vol. 10, no. 4, pp. 596–612. (In Russian)
7. Lurie S.A., Belov P.A., Modeling of the interphase layer in the mechanics of composite materials. Identification of the model parameters // *Euromech Colloquium*, no. 458, Lomonosov Moscow State University, 2004, pp. 72–74.
 8. Lurie S.A., Belov P.A. Mathematical model of the interfacial layer in the mechanics of materials. *6th International Congress on Mathematical Modeling*, Nizhni Novgorod, 2004, pp. 19.
 9. Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Belov P.A., Tuchkova N.P. Multi-Scale Modeling of Interphase Layer in Mechanics of Heterogeneous Mediums. *Euromech*, S.-Petersburg (Repino), 2005, p. 59.
 10. Lurie S.A., Belov P.A. On Variant of Interphase Layer Theory. *Abs. Int. Conf. "Advanced in Multiscale Modeling of Composite Materials Systems & Components"*, Monterey, 2005, pp. 55–57.
 11. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D. B., Tuchkova N.P. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials. *Computational Materials Science*, 2006, vol. 41, no. 20, pp. 6693–6707.
 12. Patupchyk E.M., Lurie S.A., Belov P.A. Issledovanie adgezionnykh vzaimodeystviy v ramkakh neklassicheskikh modeley sploshnykh sred [Research adhesive interactions within non-classical models of continuous media] *Tez. dokl. II Mezhdunar. Konf. "Deformatsiya i razrushenie materialov i nanomaterialov"* [Abs. of the II International conf. "Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials"], Moscow, 2007, p. 10. (In Russian)
 13. Lurie S.A., Belov P.A., Sol J.O., Patupchyk E.M. Ob odnom variante kontinual'noy teorii adgezionnykh vzaimodeystviy [On a variant of the continuum theory of adhesive interactions] *Tez. dokl. II Mezhdunar. Konf. "Deformatsiya i razrushenie materialov i nanomaterialov"* [Abs. of the II International conf. "Deformation & Fracture of Materials and Nanomaterials"], Moscow, 2007, p. 27. (In Russian)
 14. Belov P.A., Lurie S.A. Teoriya ideal'nykh adgezionnykh vzaimodeystviy [The theory of ideal adhesion interactions], *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [Mechanics of composite materials and structures], 2007, vol. 13, no. 4, pp. 519–536. (In Russian)
 15. Lurie S.A., Belov P.A. Kontinual'naya teoriya adgezionnykh vzaimodeystviy povrezhdennykh sred [On a model of the adhesive properties in mechanics material]. *Tez. dokl. I All-Russian Conf. "Mnogomasshtabnoe modelirovanie protsessov i struktur v nanotekhnologiyakh"* [Abs. of the I All-Russian Conference "Multiscale modeling of processes and structures in nanotechnology"], 2008, pp. 193–195. (In Russian)
 16. Belov P.A., Lurie S.A. Kontinual'naya teoriya adgezionnykh vzaimodeystviy povrezhdennykh sred [The continuum theory of adhesive interactions damaged media], *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy* [The mechanics of composite materials and designs], 2009, vol. 15, no. 4, pp. 610–629. (In Russian)
 17. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity], Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1979, 432 p. (in Russian)

Статья поступила 12 февраля 2016 г.

© Соловьев А. Н., Зиборов Е. Н., 2015