УДК 539.3

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ СВОЙСТВ ВЯЗКОУПРУГОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

**Аникина Т. А., Богачев И. В., Ватульян А. О., Дударев В. В.**

IDENTIFICATION OF PROPERTIES OF THE INHOMOGENEOUS VISCOELASTIC CIRCULAR PLATE

Anikina T. A.[*], Bogachev I. V.[**], Vatulyan A. O.[**,***], Dudarev V. V.[**,***]

[*] Don State Technical University, Rostov-on-Don, 344010, Russia
[**] Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[***] South Mathematical Institute, Vladikavkaz, 362027, Russia
e-mail: bogachev89@yandex.ru

*Abstract.* In the present research, we construct a model of significantly inhomogeneous viscoelastic circular plate clamped along its contour. We consider the steady vibrations of the plate caused by a load distributed on a circumference of a certain radius at the plate's surface. To take into account the damping effect of viscoelastic materials, we use the standard model of viscoelastic body based on the theory of complex modules. To simulate the plate's deformation behavior, we use the Kirchhoff–Love hypothesis. With the use of the variational principle of Hamilton–Ostrogradskii, we derive the wave equation and the boundary conditions for the plate. Two inverse problems on the identification of the instant and long modules included in the complex modulus are formulated. The first inverse problem uses the additional data on the given function of frequency flexure of the plate. The second one uses the measured function values at a single point for some definite set of frequencies.

In the second section by methods for solving formulated direct and inverse problems are described. The first inverse problem is linear, and it is solved using the Galerkin method; a specific set of basis functions is selected for that. To solve the second problem which is significantly nonlinear and ill-posed, we develop a special iterative procedure based on the linearization method combining the use of the Galerkin method to solve direct problems at its every step and the solution of the systems of Fredholm's integral equations of the 1st kind; to regularize the latter, we employed the Tikhonov regularization method.

The third section of proposed of approaches are illustrated by a representative set of computational experiments where both monotonic and non-monotonic functions are reconstructed. The error does not exceed 6 % in all of the experiments conducted indicating that the proposed approaches are efficient enough in solving such problems.

*Keywords:* identification, heterogeneity, viscoelasticity, complex modulus, circular plate, iterative process, regularization.

Аникина Татьяна Александровна, канд. физ.-мат. наук, заместитель начальника отдела по учебной работе Авиационного колледжа Донского государственного технического университета; e-mail: atanusha@mail.ru.

Богачев Иван Викторович, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: bogachev89@yandex.ru.

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; заведующий отделом дифференциальных уравнений Южного математического института; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Дударев Владимир Владимирович, канд. физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета, научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Южного математического института; e-mail: dudarev_vv@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-31-00144 мол-а, 16-01-00354 А) и Программы фундаментальных исследований по стратегическим направлениям развития науки Президиума РАН №1.

## Введение

Материалы со сложной неоднородной структурой находят применение во многих областях современной науки и производства. В качестве примера можно привести широкое распространение функционально-градиентных материалов, использующихся в авиастроении, космических технологиях, при разработке «умных» систем, при протезировании в медицине. Одной из важных задач при разработке и исследовании таких материалов является создание доступных и эффективных методов контроля [1] их свойств с целью минимизации их отличия от проектируемых. Достаточно хорошо зарекомендовали себя для решения таких задач разновидности акустического метода, к сильным сторонам которого относятся простота реализации на практике, неинвазивность и возможность исследования объектов, которые частично или целиком недоступны для непосредственного анализа.

Кроме того, при моделировании реальных материалов важно учитывать, что в них наблюдается эффект затухания и многие из них могут обладать выраженными реологическими свойствами. Такие материалы проявляют как мгновенную, так и замедленную реакцию на нагружение [2]. Для их корректного описания необходимо использовать более сложные определяющие соотношения, которые носят не функциональный, а операторный характер. Одним из возможных подходов является использование концепции динамических модулей в рамках модели стандартного вязкоупругого тела.

Модели неоднородных пластин [3] часто применяются при решении задач, связанных с техническими объектами: пластинами с напылением из различных материалов, использующихся при изготовлении лезвий и режущих дисков, мембранными датчиками давления, фланцами труб, поршневыми системами. Они также используются и в задачах биомеханики, например, при разработке протезов суставов и позвоночных дисков, а также в офтальмологии при исследовании тканей глазного яблока, в частности, решетчатой пластинки склеры глаза.

Для задач о колебаниях упругих пластин удается получать аналитические решения как в случае однородных материалов, как в работе [4], в которой строится асимптотическое решение задачи о колебаниях прямоугольной пластины, так и в случае многослойных структур, например, в статье [5] рассмотрена задача о колебаниях круглой трехслойной пластинки на упругом основании, для которой построено аналитическое решение.

Для вязкоупругих материалов решение задач в основном производится численно, например, в работе [6] рассмотрена задача о колебаниях вязкоупругой пластины при наличии сосредоточенных масс. Для моделирования реологического поведения использованы модели Фойгта и Больцмана–Вольтерра. Задача решена численно с помощью метода Бубнова–Галеркина. В случае трехслойной композитной пластины из вязкоупругого функционально-градиентного материала в статье [7] рассмотрен специальный метод расчета колебаний на основе метода Фурье–Ритца. Получены решения в виде собственных частот и собственных форм для различных типов нагружения и граничных условий.

Исследование обратных задачи идентификации характеристик существенно неоднородных вязкоупругих пластин в литературе практически отсутствует. Так в [8] процедура идентификации основана на решении многопараметрических задач минимизации целевых функций, использующих некоторые экспериментальные данные.

Можно выделить два основных вида обратных задач [1, 9, 10] идентификации характеристик неоднородных пластин. В первом случае в качестве дополнительной информации для идентификации выступает известная для некоторой заданной частоты функция смещения в наборе точек. Во втором случае входной информацией служат значения функции смещения в некоторой точке для набора частот. Если в первом случае обратная задача [11] является линейной и для ее решения можно пользоваться распространенными численными методами решения линейных некорректных задач, то во втором случае существенная нелинейность и некорректность обратной задач требует создания итеративных методов ее исследования [12, 13].

В данной работе рассмотрены обратные задачи идентификации свойств неоднородной вязкоупругой пластины в обеих постановках, описанных выше. Для учета эффекта затухания в вязкоупругом материале использована модель стандартного вязкоупругого тела в рамках концепции комплексных модулей применительно к пластине в рамках модели Кирхгофа. Обратные задачи заключаются в определении функций-компонент комплексного модуля — мгновенного и длительного модулей. Для решения обратной задачи в первой постановке применен метод Галеркина, для которого использован специальный набор базисных функций. Для второй постановки построен специальный итерационный подход на основе метода линеаризации. С помощью отделения действительной и мнимой частей в обеих задачах удается одновременно определять неизвестные функции мгновенного и длительного модулей. Предложенные методы проиллюстрированы представительным набором вычислительных экспериментов.

## 1. Постановка задач

Введем цилиндрическую систему координат $r$, $\varphi$, $z$. Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания с частотой $\omega$ круглой неоднородной вязкоупругой пластины радиуса $R$ и толщины $H(r)$, находящейся под действием нагрузки $q(r)$. Для учета затухания в вязкоупругом материале в рамках принципа соответствия заменим в постановке задачи функцию цилиндрической жесткости

$$D(r) = \frac{E(r)H(r)^3}{12(1-\nu^2)}$$

($E(r)$ — модуль Юнга, $\nu$ — коэффициент Пуассона) комплексным модулем

$$G(r, i\omega) = \frac{in\omega g(r) + h(r)}{1 + in\omega}.$$

В этой постановке задачи будем считать, что веденный комплексный модуль пластины $G(r, i\omega)$ является функцией радиальной координаты и частоты. На значения функций $g(r)$ и $h(r)$ — мгновенного и длительного модуля накладываются следующие ограничения в соответствии с моделью: $0 < h(x) < g(x)$.

В данной постановке используются гипотезы Кирхгофа [3], в соответствии с которыми функции смещения представимы в виде

$$u_r = -z\frac{\partial w}{\partial r}, \quad u_\varphi = 0, \quad u_z = w, \tag{1.1}$$

где $w$ — функция прогиба пластины.

Используя принцип соответствия применительно к задаче для пластины [12], получим обезразмеренное уравнение колебаний

$$(G(r,i\kappa)rw''(r,\kappa))'' - \left(\frac{G(r,i\kappa)w'(r,\kappa)}{r}\right)' - \\ - \nu(G(r,i\kappa)w''(r,\kappa))' + \nu(G(r,i\kappa)w'(r,\kappa))'' - \\ - \kappa^4 rw(r,\kappa) - kq(r)r = 0. \tag{1.2}$$

Здесь введены безразмерные параметры и переменные

$$r = R\tilde{r}, \quad w = R\tilde{w}, \quad H = H_0\tilde{H},$$

$$g = g(R)\tilde{g}, \quad H_0 = H(R),$$

$$\tilde{G}(r, i\kappa) = \frac{i\tau\kappa\tilde{g}(r) + \tilde{h}(r)}{1 + i\tau\kappa},$$

$$\tau = n\sqrt{H_0/\rho R^2}$$

(знак тильды в дальнейшем будем опускать), $\kappa^4 = \rho\omega^2 R^4 / H_0$ — безразмерный параметр, характеризующий частоту колебаний, $k = qR^3 / H_0$ — безразмерная характеристика уровня нагружения. Краевые условия, соответствующие жесткому защемлению по краю, имеют вид

$$w(1,\kappa) = w'(1,\kappa) = 0. \tag{1.3}$$

Решение также должно удовлетворять некоторым дополнительным условиям в нуле

$$w'(0,\kappa) = 0, \tag{1.4}$$

$$\lim_{r\to 0} r\left(\frac{1}{r}w'(r,\kappa)\right)' = 0. \tag{1.5}$$

Сформулируем две постановки обратных задач для различных способов нагружения и типов дополнительной информации.

1. В первом случае рассматривается постоянная функция нагружения $q(r) = q$, нагрузка равномерно распределена по пластине. Будем считать, что известна дополнительная информация о прогибе вязкоупругой пластины на некоторой фиксированной частоте $\kappa_0 \in [\kappa_1, \kappa_2]$, следующего вида:

$$w(r, \kappa_0) = f_r(r). \tag{1.6}$$

**Обратная задача 1.** Определить неизвестные функции $h(r)$, $g(r)$, $w(r,\kappa)$, удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям (1.2)–(1.5) по дополнительной информации (1.6).

Обратная задача в такой постановке является линейной. Методика ее решения описана в следующем разделе.

2. Во втором случае исследуется деформирование пластины под действием нагрузки $q(r) = q\delta(r - r_0)$, где $\delta(r)$ — функция Дирака. Будем считать, что известна дополнительная информация о прогибе пластины в некотором частотном диапазоне $[\kappa_1, \kappa_2]$ при $r = r_0$

$$w(r_0, \kappa) = f_\kappa(\kappa), \quad \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2]. \tag{1.7}$$

**Обратная задача 2.** Определить неизвестные функции $h(r)$, $g(r)$, $w(r, \kappa)$, удовлетворяющие уравнениям и граничным условиям (1.2)–(1.5) по дополнительной информации (1.7).

Обратная задача в такой постановке является существенно нелинейной и требует специальных методов построения решения. Один из таких методов описан в следующем разделе.

**Примечание.** В обеих постановках будем считать, что параметр $\tau$, характеризующий время релаксации, коэффициент Пуассона $\nu$ и плотность пластины $\rho$ являются известными и постоянными.

## 2. Решение обратных задач

Для решения обратной задачи 1 был использован проекционный метод Галеркина [14], применяемый к исходной краевой задаче (1.2)–(1.5) при заданной частоте $\kappa_0$, для которой известна дополнительная информация (1.6). Выберем линейно-независимые базисные функции вида $\psi_k(r) = r^{k-1}$, $k = 1, \ldots, M$, и представим функции мгновенного и длительного модулей упругости в виде разложения по этой системе

$$\begin{gathered} g(r) = \sum_{k=0}^{M} S_k \psi_k(r), \\ h(r) = \sum_{k=0}^{M} S_{k+N_2} \psi_k(r), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $S_k(\kappa)$ — коэффициенты разложения, зависящие от частотного параметра $\kappa$. Далее из условий ортогональности невязки $R_N$ базисным функциям $(R_N, \psi_k) = 0$, отделяя вещественную и мнимую части невязки, получим систему удвоенной размерности $2M$ линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов $S_k(\kappa)$:

$$\begin{cases} \mathrm{Re}\left(\int\limits_0^1 R_N \psi_1(r) r\, \mathrm{d}r\right) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{Im}\left(\int\limits_0^1 R_N \psi_M(r) r\, \mathrm{d}r\right) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

Из ее решения находится решение обратной задачи путем подстановки найденных коэффициентов $S_k(\kappa)$ в разложения (2.1). Представленный подход проиллюстрирован вычислительными экспериментами в следующем разделе.

Для решения обратной задачи 2, являющейся существенно нелинейной, применялся специальный итерационный процесс [12, 13], описанный ниже. Воспользуемся методом линеаризации, представим неизвестные функции в виде разложения по формальному параметру $\varepsilon$

$$\begin{gathered} G(r, i\kappa) = G_0(r, i\kappa) + \varepsilon G^1(r, i\kappa), \\ h(r) = h_0(r) + \varepsilon h^1(r), \\ g(r) = g_0(r) + \varepsilon g^1(r), \\ w(r, \kappa) = w_0(r, \kappa) + \varepsilon w^1(r, \kappa). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Подставим разложение (2.3) в исходную краевую задачу (1.2)–(1.5). В результате, выписывая коэффициенты при одинаковых степенях параметра $\varepsilon$ для обеих постановок, затем проводя несложные преобразования с учетом граничных условий, получим операторное уравнение для поиска поправок к неизвестным функциям для обратной задачи 2 в виде интегрального уравнения Фредгольма (ИУФ) 1-го рода

$$\begin{gathered} \int\limits_0^1 G^1(r, i\kappa) K(r, \kappa)\, \mathrm{d}r = \\ = q r_0 \left(f_\kappa(\kappa) - w_0(r_0, \kappa)\right), \\ \kappa \in [\kappa_1, \kappa_2], \end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\begin{gathered} K(r, \kappa) = \\ = r\left(w''_{n-1}(r, \kappa)\right)^2 + \frac{1}{r}\left(w'_{n-1}(r, \kappa)\right)^2 + \\ + 2\nu w''_{n-1}(r, \kappa) w'_{n-1}(r, \kappa). \end{gathered}$$

Ввиду того, что функция

$$G^1(r, i\kappa) = \frac{i\tau\kappa g^1(r) + h^1(r)}{1 + i\tau\kappa}$$

является комплекснозначной, запишем уравнение (2.4) относительно поправок $h^1(r)$, $g^1(r)$ к функциям $h(r)$, $g(r)$. Для этого воспользуемся разложением

$$\frac{i\tau\kappa g^1(\xi) + h^1(\xi)}{1 + i\tau\kappa} = \frac{h^1(\xi)}{1+\tau^2\kappa^2} + \frac{\tau^2\kappa^2 g^1(\xi)}{1+\tau^2\kappa^2} + \\ + i\left(\frac{\tau\kappa g^1(\xi)}{1+\tau^2\kappa^2} - \frac{\tau\kappa h^1(\xi)}{1+\tau^2\kappa^2}\right) = \\ = R_1 h^1(\xi) + R_2 g^1(\xi) + i\left(-R_3 h^1(\xi) + R_3 g^1(\xi)\right).$$

Тогда система ИУФ 1-го рода относительно поправок $h^1(r)$, $g^1(r)$ примет вид

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 \left[K_{11} h^1(\xi) + K_{12} g^1(\xi)\right] d\xi = \\ \quad = q r_0 \operatorname{Re}\left(f_\kappa(\kappa) - w_0(r_0,\kappa)\right), \\ \int\limits_0^1 \left[K_{21} h^1(\xi) + K_{22} g^1(\xi))\right] d\xi = \\ \quad = q r_0 \operatorname{Re}\left(f_\kappa(\kappa) - w_0(r_0,\kappa)\right). \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$K_{11} = \operatorname{Re}(K) R_{1c} + \operatorname{Im}(K) R_{3c},$$
$$K_{12} = \operatorname{Re}(K) R_{2c} - \operatorname{Im}(K) R_{3c},$$
$$K_{21} = \operatorname{Im}(K) R_{1c} - \operatorname{Re}(K) R_{3c},$$
$$K_{22} = \operatorname{Im}(K) R_{2c} + \operatorname{Re}(K) R_{3c},$$

$$K(r,\kappa) = r\left(w''_{n-1}(r,\kappa)\right)^2 + \frac{1}{r}\left(w'_{n-1}(r,\kappa)\right)^2 + \\ + 2\nu w''_{n-1}(r,\kappa) w'_{n-1}(r,\kappa),$$

$$R_{1j} = \frac{1}{1+\tau^2\kappa^2}, \quad R_{2j} = \frac{\tau^2\kappa^2}{1+\tau^2\kappa^2}, \\ R_{3j} = \frac{\tau\kappa}{1+\tau^2\kappa^2}.$$

Далее представлена общая схема итерационного процесса решения обратной задачи 2.

**Шаг 1.** По известным $n-1$ приближениям неизвестных функций $h_{n-1}(r)$ и $g_{n-1}(r)$ необходимо определить соответствующую функцию прогиба $w_{n-1}(r,\kappa)$ из решения краевой задачи (1.2)–(1.5). Данная краевая задача решается с помощью метода Галеркина, описанного при реализации решения обратной задачи 1. В приведенной постановке в качестве базисных функций выбрана система линейно-независимых функций вида

$$\varphi_m(r) = (1-r^2)^2 r^{2(m-1)}, \tag{2.6}$$
$$m = 1, \ldots, N,$$

а неизвестная функция прогиба отыскивалась в виде их линейной комбинации

$$w(r,\kappa) = \sum_{m=1}^{N} C_m(\kappa)\varphi_m(r). \tag{2.7}$$

Здесь $C_m(\kappa)$ — комплексные коэффициенты разложения, зависящие от частотного параметра $\kappa$.

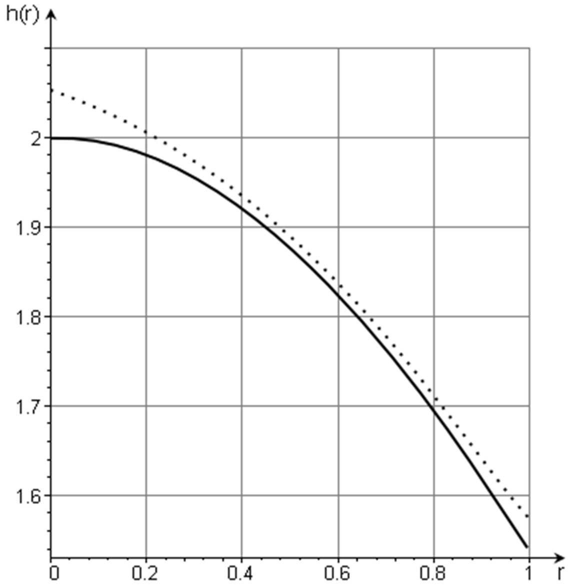
**Шаг 2.** Поправки $h^1(r)$, $g^1(r)$ к искомым функциям определяются из выведенной системы интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода (2.4). Решение данной системы является некорректной задачей, поэтому был использован метод регуляризации А.Н. Тихонова [15].

**Примечание.** Стоит отметить структурную особенность уравнений системы (2.5). Дело в том, что при $r = 0$ ядра интегральных уравнений обращаются в нуль, вследствие чего даже при использовании методов регуляризации гарантировано определить значения неизвестных функций в нуле затруднительно. При вычислительной реализации решения обратной задачи 2 восстанавливаемые функции полагались известными в нуле. Данная информация может быть получена, например, из статических экспериментов.

**Шаг 3.** Поправки, найденные на 2-м шаге, дают возможность получить следующие приближения искомых функций

$$\begin{aligned} h_n(r) &= h_{n-1}(r) + h^1(r), \\ g_n(r) &= g_{n-1}(r) + g^1(r). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Затем проверяются условия выхода из итерационного процесса: либо величина функционала невязки станет меньше некоторого заданного малого числа $\varepsilon_0$, либо число итераций превысит заданное значение $N$.



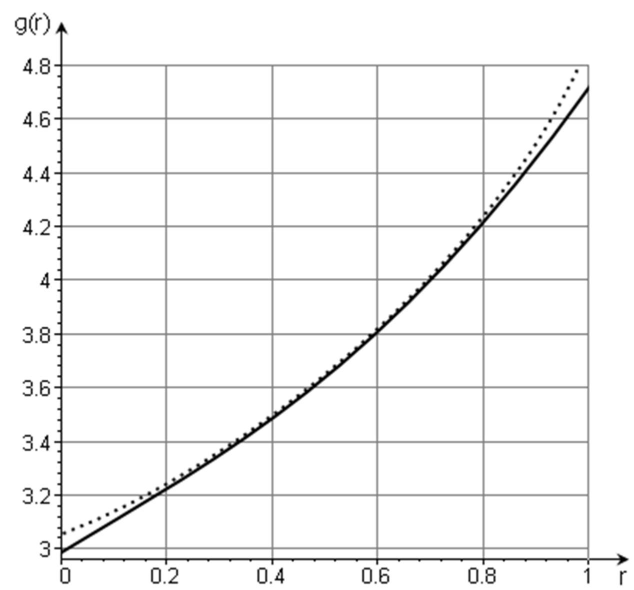




Рис. 1. Восстановление монотонных на $[0, 1]$ функций в обратной задаче 1

**Примечание.** Достаточно важной при реализации подобного рода итерационных алгоритмов является задача выбора начального приближения. В данном случае начальные приближения к восстанавливаемым функциям выбирались в классе линейных функций путем минимизации функционала невязки на компактном множестве априорной информации об ограниченности восстанавливаемых функций.

## 3. Вычислительные эксперименты

Для представленных выше подходов проведены вычислительные эксперименты для обратных задач 1 и 2 по восстановлению безразмерных функций $h(r)$ и $g(r)$. При решении обеих задач в методе Галеркина использовались 20 базисных функций. Параметр, характеризующий время релаксации, полагался равным $\tau = 0{,}1$. На рисунках сплошной линией показаны графики искомых функций, точками — восстановленных.

Далее приведены результаты решения обратной задачи 1.

**Пример 1.1.** На рис. 1. представлено восстановление монотонных на $[0, 1]$ функций $h(r) = 1 + \cos(r)$, $g(r) = 2 + e^r$. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 4 %.

**Пример 1.2.** Рис. 2. иллюстрирует восстановление немонотонных на $[0, 1]$ функций $h(r) = 1 - \sin(3r)$, $g(r) = 2 - (r - 0{,}5)^2$. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 5 %.

В следующих примерах представлены результаты вычислительных экспериментов по решению обратной задачи 2 на основе описанного итерационного процесса. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении величиной невязки значения, меньшего $\varepsilon = 10^{-4}$, либо после $N = 20$ итераций. На рисунках пунктирной линией показаны графики начальных приближений.

**Пример 2.1.** Рассмотрен случай монотонных функций $h(r) = 0{,}5 + 0{,}5r^2$, $g(r) = 0{,}6 + 0{,}6r^2$. Начальные приближения найдены в виде $h(r) = 0{,}4 + 0{,}4r$, $g(r) = 0{,}6 + 0{,}4r$, частотный диапазон $[3{,}2,\ 5{,}7]$. Для реконструкции потребовалось 5 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 5 %. На рис. 3 представлены результаты восстановления.

**Пример 2.2.** Рассмотрен случай немонотонных функций $h(r) = 0{,}5e^{-20(x-0{,}5)^2} + 0{,}5$, $g(r) = 0{,}5e^{-20(x-0{,}5)^2} + 0{,}6$. Начальные приближения найдены в виде $h(r) = 0{,}75$, $g(r) = 0{,}85$, частотный диапазон $[3{,}45,\ 5{,}85]$. Для реконструкции потребовалось 9 итераций. Относительная погрешность реконструкции при этом не превосходит 6 %. На рис. 4 представлены результаты восстановления.

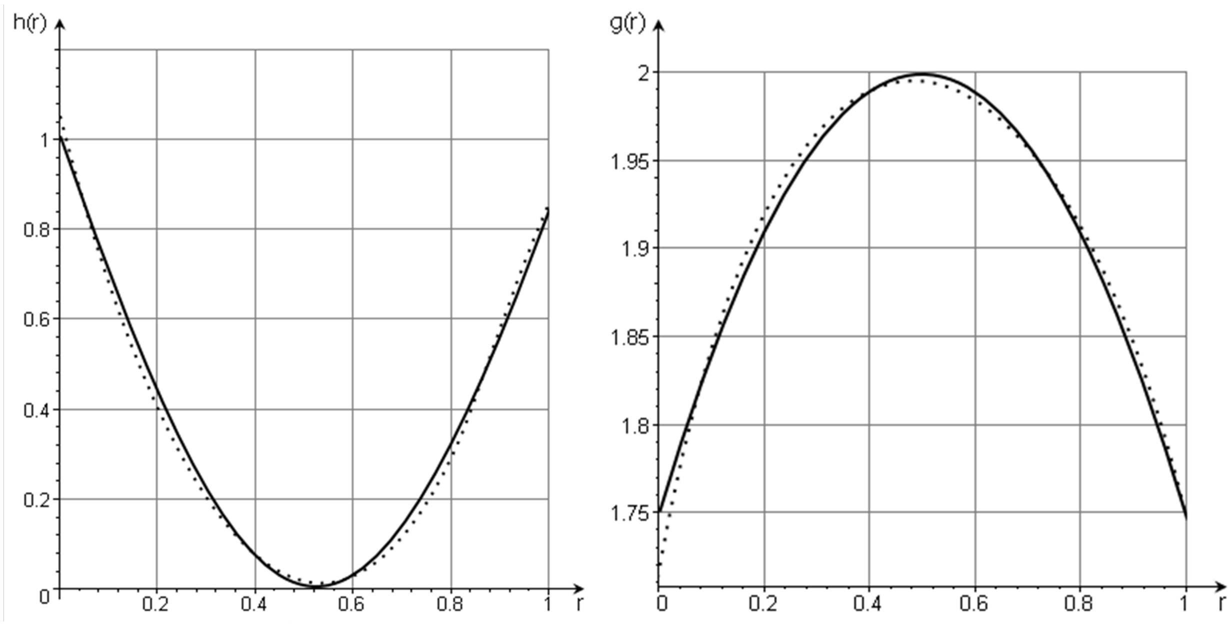



Рис. 2. Восстановление немонотонных на $[0, 1]$ функций в обратной задаче 1

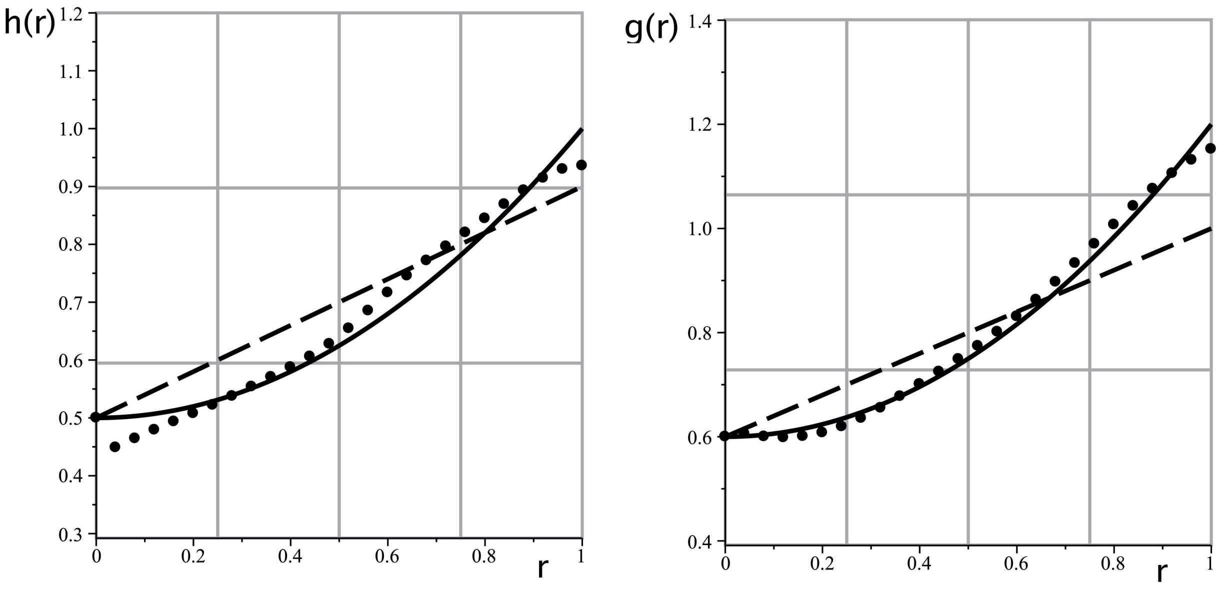



Рис. 3. Восстановление монотонных функций в обратной задаче 2

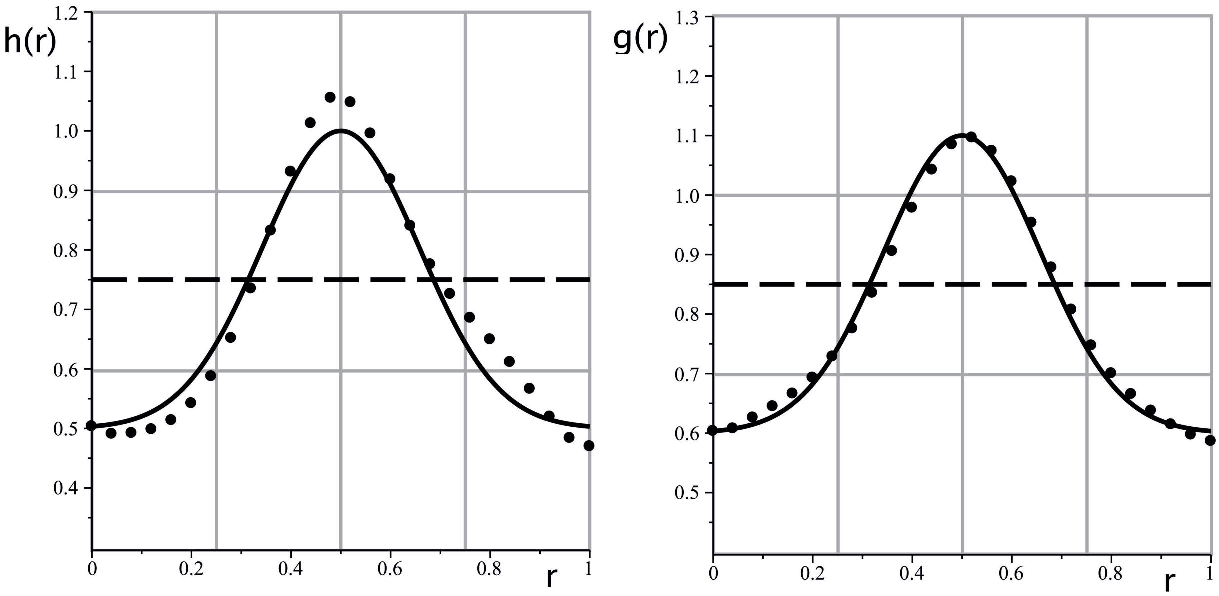



Рис. 4. Восстановление немонотонных функций в обратной задаче 2

### Заключение

В процессе проведения вычислительных экспериментов установлено, что погрешность реконструкции для первой обратной задачи не превосходит 5 %, для второй — 6 %. Полученные результаты позволяют заключить, что разработанные методы решения обратных задач в обеих постановках достаточно эффективны и могут быть использованы при исследовании обратных задач идентификации неоднородных свойств вязкоупругих пластин.

### Литература

1. *Ватульян А.О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. М.: Мир, 1974. 338 с.
3. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963. 635 с.
4. *Папков С.О.* Колебания прямоугольной ортотропной пластины со свободными краями: анализ и решение бесконечной системы // Акуст. журн. 2015. Т. 61. № 2. С. 152–160.
5. *Леоненко Д.В.* Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014, № 1. С. 59–63.
6. *Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х.* Нелинейные колебания вязкоупругой пластины с сосредоточенными массами // Прикладная механика и техническая физика. 2007. Т. 48. № 6. С. 158–169.
7. *Chuanmeng Y., Guoyong J., , Xinmao Y., Zhigang L.* A modified Fourier–Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials // International Journal of Mechanical Sciences. 2016. Vol.106. P. 1–18.
8. *Kima S., Kreiderb K.L.* Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates // Applied Numerical Mathematics. 2006. Vol. 56. No. 12. P. 1538–1554.
9. *Ватульян А.О., Беляк О.А., Сухов Д.Ю., Явруян О.В.* Обратные и некорректные задачи. Ростов-на-Дону: Изд. ЮФУ. 2011. 232 с.
10. *Ватульян А.О., Соловьев А.Н.* Об итерационном подходе в обратных задачах теории упругости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 23–29.
11. *Аникина Т.А., Ватульян А.О., Углич П.С.* Об определении переменной жесткости круглой пластины // Вычислительные технологии. 2012. Т. 17. № 6. С. 26-35.
12. *Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В.* Реконструкция жесткости неоднородной упругой пластины // Акустический журнал. 2016. Т. 62. № 3. С. 369–374.
13. *Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V.* Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer // International J. of Solids and Structures. 2014. Vol. 51. No. 11–12. P. 2238–2243.
14. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.

15. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.

## References

1. Vatul'yan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 223 p. (In Russian)
2. Kristensen R. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* [Introduction to the mechanics of composites]. Moscow, Mir Publ., 1974, 338 p. (In Russian)
3. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger S. *Plastinki i obolochki* [The plates and the shells]. Moscow, Fizmatgiz Publ., 1963, 635 p. (In Russian)
4. Papkov S.O. Kolebaniya pryamougol'noy ortotropnoy plastiny so svobodnymi krayami: analiz i reshenie beskonechnoy sistemy [The vibrations of an orthotropic rectangular plate with free edges: the analysis and solution of the infinite system]. *Akust. zhurn.* [Acoustical physics], 2015, vol. 61, no. 2, pp. 152–160. (In Russian)
5. Leonenko D.V. Kolebaniya krugovykh trekhsloynykh plastin na uprugom osnovanii Pasternaka [The vibrations of circular sandwich plates on the Pasternak elastic foundation]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva.* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no. 1, pp. 59–63. (In Russian)
6. Khodzhaev D.A., Eshmatov B.Kh. Nelineynye kolebaniya vyazkouprugoy plastiny s sosredotochennymi massami [Nonlinear vibrations of a viscoelastic plate with concentrated masses]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika.* [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics], 2007, vol. 48, no .6, pp. 158–169. (In Russian)
7. Chuanmeng Y., Guoyong J., , Xinmao Y., Zhigang L. A modified Fourier–Ritz solution for vibration and damping analysis of sandwich plates with viscoelastic and functionally graded materials. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2016, vol. 106, pp. 1–18.
8. Kima S., Kreiderb K.L. Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates. *Applied Numerical Mathematics*, 2006, vol. 56, no. 12, pp.1538–1554.
9. Vatul'yan A.O., Belyak O.A., Sukhov D.Yu., Yavruyan O.V. *Obratnye i nekorrektnye zadachi* [Inverse and incorrect problems]. Rostov-on-Don, YuFU Publ., 2011, 232 p. (In Russian)
10. Vatul'yan A.O., Solov'ev A.N. Ob iteratsionnom podkhode v obratnykh zadachakh teorii uprugosti [An iterative approach to inverse problems of the theory of elasticity]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2006, no. 1, pp. 23–29. (In Russian)
11. Anikina T.A., Vatul'yan A.O., Uglich P.S. Ob opredelenii peremennoy zhestkosti krugloy plastiny [Determination of the circular plates of variable hardness]. *Vychislitel'nye tekhnologii* [Computational technologies], 2012, vol. 17, no. 6. pp. 26–35. (In Russian)
12. Bogachev I.V., Vatul'yan A.O., Yavruyan O.V. Rekonstruktsiya zhestkosti neodnorodnoy uprugoy plastiny [Reconstruction of non-uniform stiffness elastic plate]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustical physics], 2016, vol. 62, no. 3, pp. 369–374. (In Russian)
13. Vatulyan A.O., Yavruyan O.V., Bogachev I.V. Reconstruction of inhomogeneous properties of orthotropic viscoelastic layer. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51. no. 11–12, pp. 2238–2243.
14. Fletcher K. *Chislennye metody na osnove metoda Galerkina* [Numerical methods based on the Galerkin method]. Moscowm, Mir Publ., 1988, 352 p. (In Russian)
15. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 288 p. (In Russian)

Статья поступила 1 апреля 2016 г.