

УДК 539.3

ВНЕШНИЙ АНАЛИЗ В ПРОБЛЕМЕ СКРЫТЫХ ДЕФЕКТОВ И ПРОГНОЗЕ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИЙ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.

THE EXTERNAL ANALYSIS IN THE PROBLEM OF HIDDEN DEFECTS AND IN THE PREDICTION OF EARTHQUAKES

Babeshko V. A.^{*,**}, Evdokimova O. V.^{*}, Babeshko O. M.^{**}

^{*} Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia

^{**} Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. In this work the new notion of “external analysis”, representing mathematical analysis of the objects constructed with the help of exterior algebra, in particular, exterior forms arising when solving of boundary problems with topological method is carried out, is introduced. External analysis in this case has no connection to algebra, being a mathematical analysis needed to solve a problem. The external analysis the part of the study without which the study and solving of a boundary problem with topological method cannot be carried out.

It is not associated with the construction of exterior forms for topological manifolds, which refers to the exterior algebra, but with mathematical analysis of the exterior forms that have arisen in the application of topological methods for boundary problems, and has found numerous applications in many studies. This concept has already come into use in many studies, suggesting that the mathematical analysis of exterior forms and of pseudo differential, integral and functional equations arising from these is applied in the research process. In this work a more precise definition of the external analysis is given and its relation to the exterior algebra is considered. Examples of application of the external analysis in the study of boundary problems in the theory of strength and collapse, as well as seismology, quantum mechanics and mathematical physics are given. In particular, the use of external analysis for the study of the preliminary stage and the possibility of occurrence of a starting earthquake because of harmonic oscillations of lithospheric plates and the basis on which they are located, caused by a vertical harmonic influence, is demonstrated. Firstly, the representation of the boundary problem functional equation for the lithospheric plates is constructed, using the method of exterior algebra. Then the mathematical analysis of the exterior forms built for lithospheric plates is carried out, which is called external analysis. As a result of its application the arising pseudo-differential and functional equations are constructed and studied, which has no relation to the exterior algebra. It is shown that in this case the occurrence of the starting earthquake is possible, and the possibility of its occurrence is even higher than in the static case.

Keywords: block element, factorization, topology, integral and deferential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, pseudodifferential equation, plate, earthquake.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2016 г. проект (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093), и при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216).

Введение

1. Понятие «внешняя алгебра» впервые было введено Грассманом [1]. Внешняя алгебра — это алгебраический аппарат для описания порождения многомерных пространств одномерными. Достигается это рядом преобразований, включающих введение внешних произведений и внешних форм [1–4]. Применение внешней алгебры для исследования и решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных топологическим методом в областях с границей впервые было осуществлено в работе [5]. До выхода этой работы ни в отечественной, ни в зарубежной печати не было работ, посвященных применению одновременно топологических и факторизационных методов в граничных задачах, что детально разъяснено в [6].

В работе [5] внешняя алгебра послужила лишь средством, позволившим свести систему дифференциальных уравнений в частных производных к новому типу функциональных уравнений. В процессе этих построений были использованы внешние формы. Дальнейшие преобразования в этой работе были связаны уже не с внешней алгеброй, а с математическим анализом нового типа функциональных уравнений, потребовавших разработки способов дифференциальной факторизации матриц-функций с элементами, зависящими от нескольких комплексных переменных, преобразования внешних форм, вычисления форм-вычетов Лере, реализации автоморфизма, построения псевдодифференциальных уравнений, их исследования, извлечения из них интегральных уравнений и создания методов их решения. Все это уже никак не вкладывается в задачи и возможности внешней алгебры. Поэтому все повторяющиеся однотипные действия при применении топологических методов в граничных задачах, начиная от факторизации функций и матриц-функций, вычисления форм-вычетов Лере, и вплоть до построения представлений решений граничных задач названо авторами внешним анализом. Первые исследования, в которых применялась внешняя алгебра [5, 7–11] и вслед за этим внешний анализ, были посвящены исследованию решений граничных задач для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами и выполнены только в работах авторов статьи. В этих

работах внешняя алгебра была применена для сведения краевых задач для уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к представлению в виде функциональных уравнений для функций нескольких комплексных переменных. Это было достигнуто переходом в граничной задаче в выпуклой ограниченной области для уравнений в частных производных к представлению решения с помощью трехмерных внешних форм. Затем посредством применения к трехмерному интегралу с внешней формой формулы Стокса были получены двумерные интегралы по границе области, описываемые двумерными внешними формами. На этом применение внешней алгебры в рассматриваемой задаче заканчивается и начался внешний анализ, включающий уже математический анализ построенных интегралов, содержащих двумерные внешние формы.

Рассматривая границу, как двумерное топологическое многообразие, на котором построены внешние формы, осуществив дифференциальную факторизацию матриц-функций (термин также впервые введен авторами [5, 7–11], как и дифференциальный метод факторизации, введенный вслед за интегральным, принадлежащим Н. Винеру [9]), вычисляя формы-вычеты Лере для реализации автоморфизмов, строятся системы псевдодифференциальных уравнений. Затем из них извлекаются системы интегральных уравнений в соответствии с заданными граничными условиями. Показывается, что системы интегральных уравнений можно регуляризовать, выделив главные, обратимые, и подчиненные операторы, применив топологическое разбиение единицы. С таким же успехом на базе внешних форм в дальнейшем строятся функциональные уравнения. Этот прием применения математического анализа внешних форм, приводящий к построению псевдодифференциальных уравнений и последующему их исследованию, как сказано выше, называется внешним анализом. Название удачное, поскольку оно объясняет связь исследований с внешними формами, их преобразованиями при вычислении форм-вычетов Лере и встречается только при исследовании граничных задач. Оно многократно использовалось как в фундаментальных, так и прикладных исследованиях, прежде всего, российскими учеными, поскольку требовало широкого круга

знаний математики высокого уровня [7–31] и никак не подхватывалось зарубежными учеными, несмотря на переводы основных работ в США. Авторы предпринимали попытки вовлечь в эти исследования ученых зарубежья, особенно в период подготовки Олимпийских игр, но ожидаемого результата не достигли [27–29]. Название «внешний анализ» у ученых, работающих в этой области, не вызывает вопросов, поскольку ясно указывает на круг осуществляемых преобразований при исследовании граничных задач топологическим методом.

Внешний анализ был применен в большом числе работ, как чисто теоретических, так и прикладных. Следующим этапом исследований в этой области, также использующим внешний анализ, явилось построение метода блочного элемента [12], подхода, позволяющего строить решение граничных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными или переменными коэффициентами в областях, являющихся результатом разделения области задания граничной задачи на части, с последующим «склеиванием» (построение фактор-топологий соответствующих топологических пространств). В том случае, если точно решены все псевдодифференциальные уравнения, получается точное решение исходной граничной задачи. Внешний анализ по указанной схеме применен в криволинейных системах координат — в сферических и цилиндрических в граничных задачах, имеющих векторные собственные функции. Наиболее важные прикладные результаты получены при исследовании блочных структур, среди которых задачи для тел с покрытиями, имеющими скрытые дефекты [15–22]. С применением внешнего анализа обнаружен новый тип землетрясения, названный стартовым, поскольку оно может произойти до того, как сближающиеся литосферные плиты начнут взаимодействовать. Разрушение происходит в связи с появлением сингулярных составляющих в зоне концентрации контактных напряжений сблизившихся литосферных плит [30, 31]. Ниже в качестве иллюстрации кратко излагается схема применения внешней алгебры и внешнего анализа в проблеме оценки возможности стартового землетрясения при гармонических вертикальных внешних

воздействиях на сближающиеся литосферные плиты и основание.

1. Граничная задача для покрытий на деформируемом основании

Рассматривается блочная структура, состоящая из двумерных горизонтально расположенных разнотипных литосферных плит в форме полуплоскостей, контактирующих между собой по прямолинейной границе. Блочная структура расположена на поверхности трехмерной линейно деформируемой подложки. Рассматриваемые блочные структуры находятся под вертикальным гармоническим внешним воздействием. Проводимое исследование опирается на теорию скрытых дефектов и выявленное стартовое землетрясение [20–22, 30, 31].

Воспользуемся построениями, выполненными для описания скрытых дефектов в средах с покрытиями [20–22, 30], считая, что покрытия представляют полуплоскости с параллельными границами, удаленные друг от друга на расстояние 2θ и находятся на некотором линейно деформируемом основании. Литосферные плиты моделируются пластинами Кирхгофа. Считаем, что пространство между разнотипными плитами является пустым, а на торцах плит действуют внешние силы, направленные по правилу внешних векторов. В локальной системе координат $x_1x_2x_3$ с началом в плоскость x_1x_2 , совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3 , направленной вверх по нормали к пластине, осью ox_1 , направленной по касательной к границе разлома, осью ox_2 — по нормали к его границе. Область, занятая левой плитой обозначается индексом λ и описывается соотношениями $|x_1| \leq \infty$, $x_2 \leq -\theta$, а занятая правой — индексом r и координатами $|x_1| \leq \infty$, $\theta \leq x_2$. Уравнение Кирхгофа для фрагментов b покрытия, $b = \lambda, r$, занимающих области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$, при вертикальных гармонических воздействиях напряжением $t_{3b}e^{-i\omega t}$ сверху и $g_{3b}e^{-i\omega t}$ снизу после исключения временного параметра имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) &\equiv \\ &\equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b} \right) u_{3b} + \\ &+ \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \end{aligned}$$

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = \\ = [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}] U_{3b},$$

$$U_{3b} = \mathbf{F}_2 u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2 g_{3b},$$

$$T_{3b} = \mathbf{F}_2 t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right) = f_{3b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3},$$

$$Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)},$$

$$\varepsilon_{43b} = \omega^2 \rho_b \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E h_b^2},$$

$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 H^4}{E_b h_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu) H}{\mu}.$$

Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся плиты, имеет вид

$$u_3(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \sum_{n=1}^2 \iint_{\Omega_n} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\ \times g_{3n}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = 1, 2, 3,$$

$$u_{31} = u_{3\lambda}, \quad u_{32} = g_{3r}, \quad u_{33} = u_{3\theta},$$

$$g_{31} = g_{3\lambda}, \quad g_{32} = g_{3r},$$

$$\Omega_\lambda(|x_1| \leq \infty; x_2 \leq -\theta),$$

$$\Omega_r(|x_1| \leq \infty; \theta \leq x_2),$$

$$\Omega_\theta(|x_1| \leq \infty; -\theta \leq x_2 \leq \theta),$$

или

$$u_3(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{4\pi^2 \varepsilon_6} \sum_{n=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int K(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times \\ \times G_{3n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, x \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \quad K(\alpha_1, \alpha_2, 0) = O(A^{-1}),$$

$$A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \rightarrow \infty.$$

$K(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_k , в частности, мероморфная. Многочисленные примеры приведены в [32, 33].

Здесь для пластин приняты обозначения: ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина, ρ_b — плотность, ω — частота колебаний. g_{3b} , t_{3b} — значения контактных напряжений и внешних давлений, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b . $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила, $f_1(\partial\Omega_b)$ вертикальное перемещение на границе; $f_2(\partial\Omega_b)$ — угол поворота срединной плоскости вокруг оси x_1 в системе координат $x_1 O x_2$; h_b — толщины пластин, H — размерный параметр подложки, например, толщина слоя.

2. Внешняя алгебра в построении функционального уравнения

Функциональные уравнения граничной задачи можно представить в виде [20–22, 30]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv \\ \equiv [(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}] U_{3b} = \\ = - \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Представление решения для каждой плиты имеет вид

$$u_{3b} = -\mathbf{F}_2^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \frac{1}{(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}} \int_{\partial\Omega_b} \omega_b - \\ - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2). \quad (2.2)$$

Внешние формы ω_b имеют вид, представленный в [30].

3. Внешний анализ в исследовании функционального уравнения

Осуществим дифференциальную факторизацию коэффициента функционального уравнения по параметру α_2 , считая α_1 вещественным

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b} = K_+ K_-,$$

$$K_{\mp} = (\alpha_2 - \alpha_{21\pm})(\alpha_2 - \alpha_{22\pm}),$$

$$\alpha_{21\pm} = \pm i \sqrt{\alpha_1^2 - \sqrt{\varepsilon_{43\lambda}}},$$

$$\alpha_{22\pm} = \pm i \sqrt{\alpha_1^2 + \sqrt{\varepsilon_{43\lambda}}}.$$

Радикалы положительны при $\alpha_1 \rightarrow \infty$.

Осуществим автоморфизм, вычислив формы-вычеты Лере, и получим псевдодифференциальные уравнения граничной задачи. С учетом принятых обозначений можем представить псевдодифференциальные уравнений для левой плиты в форме

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{21-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{21-} [\alpha_{21-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 - \right. \\ \left. - \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{21-}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^\lambda) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{22-} D_{\lambda 1}^{-1} M_\lambda - D_{\lambda 2}^{-1} Q_\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{22-} [\alpha_{22-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] u_{3\lambda} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 \right. \\ \left. + \varepsilon_{53\lambda} S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{22-}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^\lambda \in \partial\Omega_\lambda. \end{aligned}$$

Аналогично для правой плиты

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{21+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{21+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{21+} [\alpha_{21+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 \right. \\ \left. - \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{21+}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r) \left\langle - \int_{\partial\Omega_\lambda} \left\{ i\alpha_{22+} D_{r1}^{-1} M_r - D_{r2}^{-1} Q_\lambda - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha_{22+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) \frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \right. \right. \\ \left. \left. + i\alpha_{22+} [\alpha_{22+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] u_{3r} \right\} e^{i\alpha_1 x_1} dx_1 \right. \\ \left. - \varepsilon_{53r} S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{22+}) \right\rangle = 0, \quad \xi_1^r \in \partial\Omega_r, \end{aligned}$$

Введем следующую систему обозначений

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y}_r = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z}_r = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g,$$

$$y_{1\lambda} = D_{\lambda 1}^{-1} \mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_{\lambda 2}^{-1} \mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$

$$y_{1r} = D_{r1}^{-1} \mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_{r2}^{-1} \mathbf{F}_1 Q_r,$$

$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$

$$z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21-})(t_\lambda - g_\lambda),$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{53\lambda} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22-})(t_\lambda - g_\lambda),$$

$$k_{1r} = \varepsilon_{53r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{21+})(t_r - g_r),$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{53r} \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{22+})(t_r - g_r).$$

В результате псевдодифференциальные уравнения для этого случая можно переписать в виде системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}_\lambda \mathbf{Y}_\lambda + \mathbf{B}_\lambda \mathbf{Z}_\lambda + \mathbf{K}_\lambda = 0,$$

$$\mathbf{A}_r \mathbf{Y}_r + \mathbf{B}_r \mathbf{Z}_r + \mathbf{K}_r = 0.$$

Рассмотрим тот случай, когда изгибающий момент и перерезывающая сила равны нулю, то есть торцы плит свободны от напряжений, $\mathbf{Y}_\lambda = 0$, $\mathbf{Y}_r = 0$.

Система уравнений принимает вид

$$(\alpha_{21+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) z_{1r} - i \alpha_{21+} [\alpha_{21+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] z_{2r} = -k_{1r},$$

$$(\alpha_{22+}^2 + \nu_r \alpha_1^2) z_{1r} - i \alpha_{22+} [\alpha_{22+}^2 + (2 - \nu_r) \alpha_1^2] z_{2r} = -k_{2r},$$

$$(\alpha_{21-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) z_{1\lambda} - i \alpha_{21-} [\alpha_{21-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] z_{2\lambda} = -k_{1\lambda},$$

$$(\alpha_{22-}^2 + \nu_\lambda \alpha_1^2) z_{1\lambda} - i \alpha_{22-} [\alpha_{22-}^2 + (2 - \nu_\lambda) \alpha_1^2] z_{2\lambda} = -k_{2\lambda}.$$

Внеся найденные из этой системы решения в выражения для внешних форм в (2.2), и взяв $U_{31} + U_{32} + U_{3\theta} = U_3$, $U_{mn}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2) u_{mn}$, будем иметь два уравнения для $\theta > 0$ и $\theta = 0$, положив $G_{3r} = G^+$, $G_{3\lambda} = G^-$.

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] \times \\ & \quad \times G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = & - [\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43\lambda})^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] \times \\ & \quad \times G^-(\alpha_1, \alpha_2) + U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ & \quad + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} \times \\ & \quad \times [A_r k_{1r} + B_r k_{2r} + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2)] + \\ & \quad + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43\lambda})^{-2} \times \\ & \quad \times [A_\lambda k_{1\lambda} + B_\lambda k_{2\lambda} + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2)], \quad \theta > 0, \\ U_{3\theta}(\alpha_1, \alpha_2) = & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\theta}^{\theta} u_3(x_1, x_2) e^{i(\alpha, x)} dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{53r}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43r})^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] \times \\ & \quad \times G^+(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = & - [\varepsilon_{53\lambda}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43\lambda})^{-2} + \varepsilon_6^{-1} K_1(\alpha_1, \alpha_2)] \times \\ & \quad \times G^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\ & \quad + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43\lambda})^{-2} \times \\ & \quad \times [A_r k_{1r} + B_r k_{2r} + \varepsilon_{53r} T^-(\alpha_1, \alpha_2)] + \\ & \quad + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \varepsilon_{43\lambda})^{-2} \times \\ & \quad \times [A_\lambda k_{1\lambda} + B_\lambda k_{2\lambda} + \varepsilon_{53\lambda} T^+(\alpha_1, \alpha_2)], \\ & \quad \theta = 0. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Коэффициенты A_b , B_b имеют сложный вид и здесь не приводятся.

При исследовании решения первого уравнения доказано тем же методом, что и в [30], что для $\theta > 0$ имеют место следующие свойства контактных напряжений между плитами и подложкой.

$$g_{3\lambda}(x_1, x_2) = \sigma_{1\lambda}(x_1, x_2)(-x_2 - \theta)^{-1/2},$$

$$x_2 < -\theta,$$

$$g_{3r}(x_1, x_2) = \sigma_{1r}(x_1, x_2)(x_2 - \theta)^{-1/2},$$

$$x_2 > \theta.$$

Здесь $\sigma_{1b}(x_1, x_2)$, $b = \lambda, r$ непрерывные по обоим координатам функции при достаточно гладких t_{3b} , $b = \lambda, r$ [32].

Обращение уравнения (3.1) при $\theta = 0$ строится традиционным методом Винера-Хопфа [32] и приводит при $x_2 \rightarrow 0$ к следующим свойствам решений

$$\begin{aligned} g_{3\lambda}(x_1, x_2) \rightarrow & \sigma_{2\lambda}(x_1, x_2) x_2^{-1} + \\ & + \sigma_{3\lambda}(x_1, x_2) \ln |x_2| + \\ & + \sigma_{4\lambda}(x_1, x_2) \operatorname{sign} x_2, \\ g_{3r}(x_1, x_2) \rightarrow & \sigma_{2r}(x_1, x_2) x_2^{-1} + \\ & + \sigma_{3r}(x_1, x_2) \ln |x_2| + \\ & + \sigma_{4r}(x_1, x_2) \operatorname{sign} x_2. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Функции $\sigma_{nb}(x_1, x_2)$, $b = \lambda, r$; $n = 2, 3, 4$ непрерывны по обоим параметрам.

Таким образом, в гармоническом случае, как и в статическом, могут возникать стартовые землетрясения при подходящих значениях внешних воздействий, не приводящих к нулю коэффициенты при сингулярной функции в контактных напряжениях.

Заключение

В работе дано определение понятия внешнего анализа, применение которого продемонстрировано на примере конкретной граничной задачи. Это определение является унифицированным, поскольку необходимость использования описанного выше внешнего анализа является пока незаменимым при исследовании топологическим методом краевых задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных.

Сложность математического аппарата на этапе внешнего анализа не позволяет вовлечь в исследование в этой области широкий круг как отечественных, так и зарубежных ученых, более тяготеющих к применению численных методов. Исследования по настоящей тематике ведутся лишь ограниченным числом ученых и в каждой области прикладной математики, где метод удавалось применить, были получены либо новые, ранее не известные результаты, либо повторены известные. Достоинство топологических методов состоит в возможности решения краевых задач в областях с границей, уходящей на бесконечность, в построении решений, содержащих сингулярности, в возможности учета сильно осциллирующих коэффициентов в дифференциальных уравнениях, а также в точном удовлетворении дифференциальным уравнениям в области.

Немаловажной стороной подхода является возможность разбиения области на простые блоки, решение граничных задач для них и дальнейшее склеивание решений (построение фактор-топологий соответствующих топологических пространств). Недостаток подхода — требование знания математических методов высокого уровня и громоздкость представлений, для которых пока не построены соответствующие программы.

По мнению авторов, исследовательские учреждения, имея отечественный приоритет в создании описанных методов, могут поставить, хотя бы в качестве эксперимента, задачи его применения в самых сложных и не решенных проблемах, как это было сделано в проблеме сейсмической безопасности Сочинской Олимпиады, приведшей к новым открытиям.

Литература

1. Математическая энциклопедия. / Под ред. И.М. Виноградова. Внешняя алгебра. М.:

- Изд-во Советская энциклопедия. Т. 1, 1977, 1151 с.
2. Ефимов Н.В. Введение в теорию внешних форм. М.: Наука, 1977. 88 с.
3. Зорич В.А. Математический анализ. Часть 2. М.: МЦНМО, 2002. 788 с.
4. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть II. М.: Наука, 1985. 464 с.
5. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
6. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О связи факторизационных методов с другими подходами в теории дифференциальных и интегральных уравнений // ДАН. 2015. Т. 463, № 1. С. 32–35.
7. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Исследование краевых задач двойной факторизацией // ДАН. 2005. Т. 403. № 1. С. 20–24.
8. Бабешко В.А., Бабешко О.М. Интегральные преобразования и метод факторизации в краевых задачах // ДАН. 2005. Т. 403. № 6. С. 26–28.
9. Евдокимова О.В., Бабешко В.А., Бабешко О.М. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
10. Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Бабешко В.А. О дифференциальном методе факторизации в неоднородных задачах // ДАН. 2008. Т. 418, № 3. С. 321–323.
11. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О дифференциальном методе факторизации в задачах для сплошных сред // ДАН. 2008. Т. 421, № 1. С. 37–40.
12. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. К теории блочного элемента // ДАН. 2009. Т. 427, № 2. С. 183–186.
13. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. О блочном элементе в форме произвольной треугольной пирамиды // ДАН. 2009. Т. 429, №6. С. 758–761.
14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The Block Element Method for a block Structure. 19th European Conference on Fracture. Kazan. 26–31 August, 2012. Transactions. P. 53–60.
15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Bodies with cracked coatings. Proceedings of the XLI Summer School-Conference “Advanced Problems In Mechanics” St. Petersburg, July 1–6, 2013. P. 143–153.
16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Kolesnikov M.N., Shestopalov V.L. Bodies with cracked coatings. Book of abstracts of International Summer School-Conference “Advanced Problems In Mechanics” St. Petersburg, July 1–6, 2013. P. 32–33.

17. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. About Coupling of the Block Elements. Book: Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems. 2013. Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London. P. 31–39.
18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block Element Method in Applications. Indo-Russian Workshop on Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013, 11–15 November, Chennai. Book of Articles. ElitePublishing House PVT LTD. C. 32–39.
19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Study of the Covering with Breaks. Indo-Russian Workshop on Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013, 11–15 November, Chennai. Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013 Book of Articles. ElitePublishing House PVT LTD. C. 148–155.
20. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О скрытых дефектах в наноструктурах, телах с покрытиями и сейсмологии // ДАН. 2014. Т. 457. № 1. С. 45–49.
21. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Топологические методы в теории скрытых дефектов и некоторые аномалии // ДАН. 2014. Т. 457. № 6. С. 650–655.
22. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О разнотипных покрытиях с дефектами в статических задачах сейсмологии и наноматериалах // ДАН. 2014. Т. 459. № 6. С. 41–45.
23. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Блочные элементы и аналитические решения граничных задач для систем дифференциальных уравнений // ДАН. 2014. Т. 454. № 2. С. 163–167.
24. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.
25. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. О скрытых дефектах в наноструктурах, телах с покрытиями и сейсмологии // ДАН. 2014. Т. 457. № 1. С. 45–49.
26. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Горшкова Е.М., Зарецкая А.В., Мухин А.С., Павлова А.В. О конвергентных свойствах блочных элементов // ДАН. 2015. Т. 465. № 3. С. 298–301.
27. Babeshko V.A. Evdokimova O.V. Babeshko O.M. XLIII Summer School - Conference “Advanced Problems in Mechanics” June 22–27, 2015, St. Petersburg, Russia Directed antenna in block structure. Proceedings of the XLIII Summer School-Conference. P. 39–48.
28. Бабешко В.А., Ритцер А. Об особенностях метода блочного элемента // ДАН. 2011. Т. 437, № 2. С. 182–185.
29. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Ritzer J. Fedorenko A.G. Topological Approach to the Theory of Prognosis of Seismicity Based on a Mechanical Conception. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, No. 5. P. 181–185.
30. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
31. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The Theory of the Starting Earthquake // Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation, 2016, No. 1. Vol. 2. P. 37–80.
32. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
33. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряжина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Наука, 1999. 246 с.

References

1. Vinogradov I.M. (Ed.) *Matematicheskaya entsiklopediya* [Mathematical encyclopedia]. Vol. 1. *Vneshnyaya algebra* [External algebra]. Moscow, Izd-vo Sovetskaya entsiklopediya Press, 1977, 1151 p. (In Russian)
2. Efimov N.V. *Vvedenie v teoriyu vneshnikh form* [Introduction to the theory of exterior forms]. Moscow, Nauka Press, 1977, 88 p. (In Russian)
3. Zorich V.A. *Matematicheskiy analiz* [The mathematical analysis]. Part 2. Moscow, MTsNMO Press, 2002, 788 p. (In Russian)
4. Shabat B.V. *Vvedenie v kompleksnyy analiz* [Introduction to complex analysis]. Part 2. Moscow, Nauka Press, 1985, 464 p. (In Russian)
5. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Metod faktorizatsii resheniya nekotorykh kraevykh zadach [Factorization method solution of some boundary value problems]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2003, vol. 389, no. 2, pp. 184–188. (In Russian)
6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O svyazi faktorizatsionnykh metodov s drugimi podkhodami v teorii differentsial'nykh i integral'nykh uravneniy [About the connection factorization methods with other approaches in the theory of differential and integral equations]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2015, vol. 463, no 1, pp. 32–35. (In Russian)
7. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Issledovanie kraevykh zadach dvoynoy faktorizatsii [The study of boundary value problems by double fac-

- torization]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2005, vol. 403, no. 1, pp. 20–24. (In Russian)
8. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Integral'nye preobrazovaniya i metod faktorizatsii v kraevykh zadachakh [Integral transforms and factorization method in boundary value problems]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2005, vol. 403, no. 6, pp. 26–28. (In Russian)
 9. Evdokimova O.V. Babeshko V.A., Babeshko O.M. Ob integral'nom i differentsial'nom metodakh faktorizatsii [About integral and differential factorization methods]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 2, pp. 168–172. (In Russian)
 10. Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Babeshko V.A. O differentsial'nom metode faktorizatsii v neodnorodnykh zadachakh [Differential method of factorization in non-uniform tasks]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2008, vol. 418, no. 3, pp. 321–323. (In Russian)
 11. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O differentsial'nom metode faktorizatsii v zadachakh dlya sploshnykh sred [Differential method of factorization in tasks for continuous media]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2008, vol. 421, no. 1, pp. 37–40. (In Russian)
 12. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. K teorii blochnogo elementa [To the theory of block element]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2009, vol. 427, no. 2, pp. 183–186. (In Russian)
 13. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. O blochnom elemente v forme proizvol'noy treugol'noy piramidy [On the block element in the form of arbitrary triangular pyramid]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2009, vol. 429, no. 6, pp. 758–761. (In Russian)
 14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The block element method for a block Structure. In *Proc. of the 19th European Conference on Fracture. Kazan. 26–31 August, 2012, Transactions*. Pp. 53–60.
 15. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Bodies with cracked coatings. In *Proc. of the XLI Summer School-Conference "Advanced Problems In Mechanics" St. Petersburg, July 1–6, 2013*. Pp. 143–153.
 16. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Kolesnikov M.N., Shestopalov V.L. Bodies with cracked coatings. In *Book of abstracts of International Summer School-Conference "Advanced Problems In Mechanics" St. Petersburg, July 1–6, 2013*. Pp. 32–33.
 17. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. About Coupling of the Block Elements. In *Book: Mechanics and Model-Based Control of Advanced Engineering Systems*. 2013. Springer, Heidelberg, New York, Dordrecht, London, pp. 31–39.
 18. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Block Element Method in Applications. in *Indo-Russian Workshop on Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013, 11–15 November, Chennai. Book of Articles*. ElitePublishing House PVT LTD, pp. 32–39.
 19. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Study of the Covering with Breaks. In *Indo-Russian Workshop on Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013, 11–15 November, Chennai. Topical Problems in Theoretical and Applied Mechanics. 2013 Book of Articles*. ElitePublishing House PVT LTD, pp. 148–155.
 20. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O skrytykh defektakh v nanostrukturakh, telakh s pokrytiyami i seysmologii [About the hidden defects in nanostructures, bodies with coatings and seismology]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no. 1, pp. 45–49. (In Russian)
 21. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskie metody v teorii skrytykh defektov i nekotorye anomalii [Topological methods in the theory of hidden defects and some anomalies]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, vol. 6, pp. 650–655. (In Russian)
 22. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O raznotipnykh pokrytyakh s defektami v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialakh [On heterogeneous surfaces with defects in static problems of seismology and nanomaterials]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 6, pp. 41–45. (In Russian)
 23. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Blochnye elementy i analiticheskie resheniya granichnykh zadach dlya sistem differentsial'nykh uravneniy [Block-level elements and analytical solutions of boundary-value problems for systems of differential equations]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 454, no. 2, pp. 163–167. (In Russian)
 24. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Ob odnoy faktorizatsionnoy zadache Gil'berta-Vinera i metode blochnogo elementa [About one factorization the problem of Hilbert-Wiener method block element]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561.
 25. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O skrytykh defektakh v nanostrukturakh,

- telakh s pokrytiyami i seysmologii [About the hidden defects in nanostructures, bodies with coatings and seismology]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2014, vol. 457, no. 1, pp. 45–49. (In Russian)
26. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Gorshkova E.M., Zaretskaya A.V., Mukhin A.S., Pavlova A.V. O konvergentnykh svoystvakh blochnykh elementov [About the convergent properties of block elements]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2015, vol. 465, no. 3, pp. 298–301. (In Russian)
 27. Babeshko V.A. Evdokimova O.V. Babeshko O.M. Russia Directed antenna in block structure. In *Proc. of the XLIII Summer School - Conference "Advanced Problems in Mechanics" June 22–27, 2015, St. Petersburg*. Pp. 39–48.
 28. Babeshko V.A., Rittser A. Ob osobennostyakh metoda blochnogo elementa [About the features of the method block element]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2011, vol. 437, no. 2, pp. 182–185. (In Russian)
 29. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Ritzer J. Fedorenko A.G. Topological Approach to the Theory of Prognosis of Seismicity Based on a Mechanical Conception. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 5, pp. 181–185.
 30. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme fiziko-mekhanicheskogo predvestnika startovogo zemletryaseniya: mesto, vremya, intensivnost' [The problem of physico-mechanical harbinger of starting an earthquake: place, time, intensity]. *Doklady akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2016, vol. 466, no. 6, pp. 664–669. (In Russian)
 31. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. The Theory of the Starting Earthquake. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2016, no. 1, vol. 2, pp. 37–80.
 32. Vorovich I.I., Babeshko V.A. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Press, 1979, 320 p. (In Russian)
 33. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. Dinamika massivnykh tel i rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh [Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media]. Moscow, Nauka Press, 1999, 246 p.

Статья поступила 27 июня 2016 г.

© Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., 2016