

УДК 539.3

## ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛОИСТОЙ БИОЛОГИЧЕСКОЙ ТКАНИ

Ватульян А. О., Нестеров С. А.

ON THE APPROACH TO THERMOMECHANICAL PROPERTIES IDENTIFICATION  
OF LAYERED BIOLOGICAL TISSUE

Vatulyan A. O.<sup>\*,\*\*</sup>, Nesterov S. A.<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> South Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia

<sup>\*\*</sup> Vladikavkazskiy scientific centre of RAS, Vladikavkaz, 362027, Russia  
e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

*Abstract.* Thermomechanical characteristics of biological tissues can serve as an important diagnostic factor in medicine. However at the moment the characteristics of biological tissues are studied insufficiently. This is due to the lack of reliable methods of non-invasive identification. In work the approach to identification of thermomechanical characteristics of a layer based on results of works on the solution of coefficient inverse problems of thermoelasticity is offered. On the basis of averaging procedure the two-dimensional problem for thermoelastic layer can be reduced to two one-dimensional. The statements of two one-dimensional inverse problems are given. As the input data are the displacement and the temperature measured on the upper face of the layer. The direct problems are solved on the basis of the device of Fredholm integral equations of the 2<sup>nd</sup> kind. The inverse problem is solved by an iterative process, each stage of which is solved Fredholm integral equation of the first kind. Some numerical experiments of identification thermal physical characteristics of skin are presented. Influence of thickness of layers and size of modules of each layer on the general quality of identification of characteristics is in addition investigated.

*Keywords:* layered biological tissue, identification of thermal physical characteristics of skin, iterative process, nonlinear inverse problem.

### Введение

В настоящее время важной медицинской проблемой является раннее обнаружение различных патологий мягких тканей. Решение этой проблемы будет способствовать успешному лечению многих заболеваний. Поскольку нормальные и патологически измененные ткани значительно (в разы) отличаются друг от друга по своим механическим и теплофизическим характеристикам, то знание этих характеристик для конкретного пациента могут служить важным диагностическим фактором обнаружения патологий в онкологии, неврологии, дерматологии, травматологии и спортивной медицине. Однако в настоящий

момент характеристики биологических тканей исследованы еще недостаточно, что связано с отсутствием надежных неинвазивных методов их определения [1].

В последние годы исследователи особое внимание уделяют развитию эластографии, в том числе способам визуализации неоднородностей мягких биологических тканей по их сдвиговым упругим характеристикам. Эти работы опираются, как правило, на аппарат коэффициентных обратных задач [2–5]. При этом для исследования деформирования биологических тканей (кожи) применяются модели, созданные для упругих, вязкоупругих,

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Нестеров Сергей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник кафедры теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И. И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: 1079@list.ru.

Работа выполнена в рамках проекта Министерства образования и науки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности и при поддержке Южного математического института, г. Владикавказ.

пороупругих и термоупругих слоистых материалов [3–7].

В обратных задачах по измеренным граничным физическим полям требуется восстановить характеристики среды. Так, например, в работе [4] исследованы математические аспекты реконструкции модуля сдвига. При этом в качестве регуляризирующего алгоритма при нахождении градиентов полей использован метод В-сплайнов. В работе [2] исследована задача идентификации механических характеристик многослойной вязкоупругой среды. В качестве дополнительной информации выступают данные о смещениях, возникающих в результате действия на среду жесткого круглого индентора-штампа. Эта задача была решена на основе процедуры минимизации функционала невязки. В работе [6] на трехслойное полупространство, моделирующее систему «кожно-жировой слой – мышца – печень» действует колебательная нагрузка от круглого штампа. Исследованы зависимости колебательных смещений в глубине тканей от размеров и частоты колебаний поверхностного источника. На основе этих зависимостей могут быть идентифицированы сдвиговые характеристики вязкоупругого материала. В работе [5] рассмотрена задача идентификации неоднородных свойств вязкоупругого слоя, моделирующего кожный покров. С помощью процедуры осреднения двумерная задача сводится к одномерной, для которой построена итерационная схема решения. Представлены результаты вычислительных экспериментов по восстановлению функций, имеющих точки разрыва 1-го рода.

Однако при патологических состояниях изменяются не только механические, но и теплофизические характеристики тканей. Для реконструкции пространственного распределения термомеханических характеристик биологических тканей может успешно применяться аппарат коэффициентных обратных задач термоупругости, разработанный в [8–10].

В настоящей работе предложен подход по восстановлению одномерных термомеханических характеристик слоистых биологических тканей. С помощью процедуры осреднения двумерная задача распадается на две более простые одномерные задачи относительно усредненных полей, которые решаются на основе аппарата интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Для решения обратной задачи применяются операторные уравнения,

ранее полученные для упругого [11, 12] и термоупругого стержня [8, 9]. Проведен ряд вычислительных экспериментов по восстановлению термомеханических характеристик слоя, имеющих точки разрыва первого рода. Исследовалось влияние относительной толщины слоев и величины модулей на общее качество восстанавливаемых характеристик.

### 1. Постановка задачи термоупругости для слоя

Рассмотрим задачу о неустановившихся колебаниях изотропного неоднородного по координате  $x_3$  термоупругого слоя, занимающего область  $(x_1 \in (-\infty, \infty), x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in [0, h])$  в условиях плоской деформации. Нижняя грань слоя  $x_3 = 0$  жестко закреплена, а на верхней грани  $x_3 = h$  приложены механические и тепловые нагрузки. Термомеханические характеристики являются функциями координаты  $x_3$ . Начально-краевая задача при нулевых начальных условиях примет вид

$$(\lambda + 2\mu)u_{1,11} + (\lambda u_{3,3})_{,1} + ((\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,3} - (\gamma\theta)_{,1}) = \rho\ddot{u}_1, \quad (1.1)$$

$$((\lambda + 2\mu)u_{3,3})_{,3} + (\lambda u_{1,1})_{,3} + ((\mu(u_{1,3} + u_{3,1}))_{,1} - (\gamma\theta)_{,3}) = \rho\ddot{u}_3, \quad (1.2)$$

$$k\theta_{,11} + (k\theta_{,3})_{,3} = c\dot{\theta} + T_0\gamma(\dot{u}_{1,1} + \dot{u}_{3,3}), \quad (1.3)$$

$$u_1(x_1, 0, t) = u_3(x_1, 0, t) = \theta(x_1, 0, t) = 0, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{33}(x_1, h, t) = F_1(x_1, t), \quad (1.5)$$

$$\sigma_{13}(x_1, h, t) = F_2(x_1, t), \quad (1.6)$$

$$q(x_1, h, t) = F_3(x_1, t), \quad (1.7)$$

$$u_1(x_1, x_3, 0) = u_3(x_1, x_3, 0) = \theta(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_1(x_1, x_3, 0) = \dot{u}_3(x_1, x_3, 0) = 0. \quad (1.8)$$

Упростим задачу (1.1)–(1.8). Применяя для этого к задаче (1.1)–(1.8) преобразование Фурье по координате  $x_1$ , получим систему дифференциальных уравнений относительно трансформант компонент полей смещений и температуры:

$$-\alpha^2(\lambda + 2\mu)\hat{u}_1 - i\alpha\lambda\hat{u}_{3,3} + (\mu(\hat{u}_{1,3}) - i\alpha\hat{u}_{3,3})_{,3} + i\alpha\gamma\hat{\theta} = \rho\frac{\partial^2\hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (1.9)$$

$$((\lambda + 2\mu)\hat{u}_{3,3})_{,3} - i\alpha\lambda\hat{u}_{1,3} - i\alpha\mu\hat{u}_{1,3} - \alpha^2\mu\hat{u}_3 - (\gamma\hat{\theta})_{,3} = \rho\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial t^2}, \quad (1.10)$$

$$- \alpha^2 k\hat{\theta} + (k\hat{\theta}_{,3})_{,3} = c\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial t} + T_0\gamma\left(-i\alpha\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial t} + \frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial x_3\partial t}\right), \quad (1.11)$$

$$\hat{u}_1(0, t) = \hat{u}_3(0, t) = \hat{\theta}(0, t) = 0, \quad (1.12)$$

$$\hat{\sigma}_{33}(h, t) = \hat{F}_1(t), \quad (1.13)$$

$$\hat{\sigma}_{13}(h, t) = \hat{F}_2(t), \quad (1.14)$$

$$\hat{q}(h, t) = \hat{F}_3(t), \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \hat{u}_1(x_3, 0) = \hat{u}_3(x_3, 0) = \hat{\theta}(x_3, 0) = \\ = \frac{\partial\hat{u}_1}{\partial t}(x_3, 0) = \frac{\partial\hat{u}_3}{\partial t}(x_3, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Если положить параметр преобразования Фурье  $\alpha = 0$ , задача (1.9)–(1.16) распадается на две более простые несвязанные задачи относительно усредненных по  $x_1$  компонент полей.

**Задача 1.** Первая начально-краевая задача имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\mu(x_3)\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial x_3}\right) = \rho(x_3)\frac{\partial^2\hat{u}_1}{\partial t^2}, \quad (1.17)$$

$$\hat{u}_1(0, t) = 0, \quad \mu\frac{\partial\hat{u}_1}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h} = \hat{F}_2(t), \quad (1.18)$$

$$\hat{u}_1(x_3, 0) = 0. \quad (1.19)$$

Эта задача не содержит теплофизических характеристик. Обезразмерим (1.17)–(1.19), вводя следующие параметры и переменные:

$$z = \frac{x_3}{h}, \quad U_1 = \frac{\hat{u}_3}{h},$$

$$\bar{\mu}(z) = \frac{\mu(x_3)}{\mu_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x_3)}{\rho_0},$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad t_0 = \frac{h}{v_1}, \quad \tau_1 = \frac{t}{t_0},$$

$$\rho_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \rho(x_3), \quad \mu_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \mu(x_3),$$

$$f_1(\tau_1) = \frac{\hat{F}_2(t)}{\mu_0}.$$

После обезразмеривания задача (1.17)–(1.19) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\bar{\mu}\frac{\partial U_1}{\partial z}\right) = \bar{\rho}\frac{\partial^2 U_1}{\partial \tau_1^2}, \quad (1.20)$$

$$U_1(0, \tau) = 0, \quad \bar{\mu}\frac{\partial U_1}{\partial z}\Big|_{z=1} = f_1(\tau_1), \quad (1.21)$$

$$U(z, 0) = 0. \quad (1.22)$$

Подобная задача возникает при описании продольных колебаний неоднородного по длине упругого стержня. Для произвольных законов изменения  $\bar{\mu}(z)$ ,  $\bar{\rho}(z)$  решение возможно лишь численно, например, с помощью сведения к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода, как это сделано в [12].

**Задача 2.** Вторая начально-краевая задача запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3}\left((\lambda + 2\mu)\frac{\partial\hat{u}_3}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\gamma\hat{\theta}) = \\ = \rho\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} c(x_3)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(k(x_3)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_3}\right) + \\ + T_0\gamma\frac{\partial^2\hat{u}_3}{\partial x_3\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\hat{u}_3(0, t) = \hat{\theta}(0, t) = 0, \quad (1.25)$$

$$(\lambda + 2\mu)\frac{\partial\hat{u}_3}{\partial x_3} - \gamma\hat{\theta}\Big|_{x_3=h} = \hat{F}_1(t), \quad (1.26)$$

$$-k(x_3)\frac{\partial\hat{\theta}}{\partial x_3}\Big|_{x_3=h} = \hat{F}_3(t), \quad (1.27)$$

$$\hat{\theta}(x_3, 0) = \hat{u}_3(x_3, 0) = \frac{\partial\hat{u}_3}{\partial t}(x_3, 0) = 0. \quad (1.28)$$

Обезразмерим (1.23)–(1.28), вводя следующие параметры:

$$z = \frac{x_3}{h}, \quad U_2 = \frac{\hat{u}_3}{h},$$

$$s = \lambda + 2\mu, \quad \bar{s}(z) = \frac{s(x_3)}{s_0}, \quad W = \frac{\gamma_0\hat{\theta}}{s_0},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{s_0}{\rho_0}}, \quad t_1 = \frac{h}{v_2}, \quad t_2 = \frac{h^2 c_0}{k_0}, \quad \tau_2 = \frac{t}{t_2},$$

$$\bar{k}(z) = \frac{k(x_3)}{k_0}, \quad \bar{\rho}(z) = \frac{\rho(x_3)}{\rho_0},$$

$$\begin{aligned}\bar{c}(z) &= \frac{c(x_3)}{c_0}, & \bar{\gamma}(z) &= \frac{\gamma(x_3)}{\gamma_0}, \\ \varepsilon &= \frac{t_2}{t_1}, & \delta_0 &= \frac{\gamma_0 T_0}{s_0 c_0}, \\ f_2(\tau_2) &= \frac{\hat{F}_2(t)}{s_0}, & f_3(\tau_2) &= \frac{\hat{F}_3(t)}{k_0 s_0} h \gamma_0, \\ k_0 &= \max_{x_3 \in [0, h]} k(x_3), & c_0 &= \max_{x_3 \in [0, h]} c(x_3), \\ \gamma_0 &= \max_{x_3 \in [0, h]} \gamma(x_3), & \rho_0 &= \max_{x_3 \in [0, h]} \rho(x_3), \\ s_0 &= \max_{x_3 \in [0, h]} s(x_3).\end{aligned}$$

После обезразмеривания задача (1.23)–(1.28) примет вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{s}(z) \frac{\partial U_2}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\gamma}(z) W) &= \\ = \varepsilon^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U_2}{\partial \tau_2^2},\end{aligned}\quad (1.29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z} \right) &= \\ = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U_2}{\partial z \partial \tau_2},\end{aligned}\quad (1.30)$$

$$U_2(0, \tau_2) = W(0, \tau_2) = 0, \quad (1.31)$$

$$\bar{s}(z) \frac{\partial U_2}{\partial z} - \bar{\gamma} W|_{z=1} = f_2(\tau_2), \quad (1.32)$$

$$-\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}|_{z=1} = f_3(\tau_2), \quad (1.33)$$

$$W(z, 0) = U_2(z, 0) = \frac{\partial U_2}{\partial \tau_2}(z, 0) = 0. \quad (1.34)$$

Подобная задача возникает при описании продольных колебаний неоднородного по длине термоупругого стержня. Для произвольных законов изменения термомеханических характеристик решение строится численно с помощью сведения к системе двух интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, как это сделано в [8]. Прямая задача (1.29)–(1.34) после применения преобразования Лапласа сведена к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода в трансформантах, которая решается на основе метода коллокаций с использованием квадратурной формулы трапеций. Для нахождения оригиналов температуры и перемещений применяется теория вычетов.

Для каждой из прямых задач (1.20)–(1.22) и (1.29)–(1.34) сформулируем обратные.

**Обратная задача 1.** Восстановить механические характеристики  $(\bar{\mu}, \bar{\rho})$  из (1.20)–(1.22) по информации

$$U_1(1, \tau_1) = g_1(\tau_1), \quad \tau_1 \in [a_1, b_1]. \quad (1.35)$$

**Обратная задача 2.** Восстановить термомеханические характеристики  $(\bar{s}, \bar{\rho}, \bar{c}, \bar{k}, \bar{\gamma})$  из (1.29)–(1.34) по информации

$$U_2(1, \tau_2) = g_2(\tau_2), \quad \tau_2 \in [a_2, b_2], \quad (1.36)$$

$$W(1, \tau_2) = g_3(\tau_2), \quad \tau_2 \in [a_3, b_3]. \quad (1.37)$$

## 2. Итерационная схема решения обратной задачи

Сформулированные выше обратные задачи относятся к нелинейным задачам, решаемым, как правило, путем построения итерационного процесса, на каждом этапе которого строится решение линейного операторного уравнения. Следует отметить, что подобные задачи реконструкции упругих и термоупругих характеристик стержня и цилиндра решались ранее в [8–12], где для их решения строился итерационный процесс. Однако при проведении вычислительных экспериментов материальные характеристики моделировались только непрерывными функциями. В данной работе исследуется восстановление характеристик, имеющих точки разрыва первого рода, что соответствует реальному распределению теплофизических характеристик кожного покрова.

Восстанавливалась только одна характеристика при известных остальных. Процедура восстановления термомеханических характеристик  $\bar{a}(z)$  состоит из двух этапов. На первом этапе определяется начальное приближение среди кусочно-постоянных функций из условия минимума функционала невязки на компакте, построенном по априорной информации об ограниченности искомых функций.

При решении обратной задачи 1 функционал невязки имеет вид

$$J_1 = \int_{a_1}^{b_1} (g_1(\tau_1) - U_1(1, \tau_1))^2 d\tau_1, \quad (2.1)$$

При решении обратной задачи 2 в случае механического нагружения верхней грани слоя функционал невязки запишется

$$J_2 = \int_{a_2}^{b_2} (g_2(\tau_2) - U_2(1, \tau_2))^2 d\tau_2, \quad (2.2)$$

а в случае теплового нагружения функционал невязки примет вид

$$J_3 = \int_{a_3}^{b_3} (g_3(\tau_2) - W(1, \tau_2))^2 d\tau_2. \quad (2.3)$$

На втором этапе уточняется закон изменения восстанавливаемых характеристик по схеме  $\bar{a}^{(n)}(z) = \bar{a}^{(n-1)}(z) + \delta\bar{a}^{(n-1)}(z)$ , где поправки  $\delta\bar{a}^{(n-1)}$  находятся путем решения операторных уравнений первого рода.

При решении обратной задачи 1 для нахождения поправок модуля сдвига  $\delta\bar{\mu}^{(n-1)}$  необходимо решать интегральное уравнение

$$\int_0^1 \delta\bar{\mu}^{(n-1)} K(z, \tau_1) dz = g_1(\tau_1) - U_1^{(n-1)}(1, \tau_1), \quad (2.4)$$

$$\tau_1 \in [a_1, b_1].$$

Здесь ядро

$$K(z, \tau_1) = \left( \frac{\partial U_1^{(n-1)}(z, \tau_1)}{\partial z} \right)^2.$$

При решении обратной задачи 2 для нахождения поправок коэффициента температурного напряжения  $\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}$  необходимо решать интегральное уравнение

$$\int_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)} L(z, \tau_2) dz = g_2(\tau_2) - U_2^{(n-1)}(1, \tau_2), \quad (2.5)$$

$$\tau_2 \in [a_2, b_2],$$

где ядро

$$L(z, \tau_2) = \frac{\partial U_2^{(n-1)}(z, \tau_2)}{\partial z} W^{(n-1)}(z, \tau_2).$$

Для нахождения поправок удельной теплоемкости  $\delta\bar{c}^{(n-1)}$  приходим к интегральному уравнению

$$\int_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)} M(z, \tau_2) dz = g_3(\tau_2) - W^{(n-1)}(1, \tau_2), \quad (2.6)$$

$$\tau_2 \in [a_3, b_3],$$

где ядро

$$M(z, \tau_2) = \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_2)}{\partial \tau} W^{(n-1)}(z, \tau_2).$$

Интегральное уравнение для нахождения поправок коэффициента теплопроводности  $\delta\bar{k}^{(n-1)}$  примет вид

$$\int_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)} R(z, \tau_2) dz = g_3(\tau_2) - W^{(n-1)}(1, \tau), \quad (2.7)$$

$$\tau_2 \in [a_3, b_3],$$

где ядро

$$R(z, \tau_2) = \left( \frac{\partial W^{(n-1)}(z, \tau_2)}{\partial z} \right)^2.$$

Уравнения для определения поправок вида (2.4)–(2.7) являются интегральными уравнениями Фредгольма 1-го рода, при обращении которых используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [13].

Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении соответствующим функционалом невязки (2.1), (2.2) или (2.3) порогового значения, равного  $10^{-6}$ .

### 3. Результаты вычислительных экспериментов

Сформулированная выше обратная задача 1 по идентификации модуля сдвига биологических тканей подробно исследована в [2–5]. В данной работе представлены результаты решения обратной задачи 2 по идентификации безразмерного коэффициента теплопроводности биологической ткани на примере кожи.

Кожный покров моделировался термоупругим слоем, в свою очередь состоящим из трех термоупругих слоев, моделирующих подкожный жир (нижний слой), дерму (средний слой) и эпидермис (верхний слой). Для

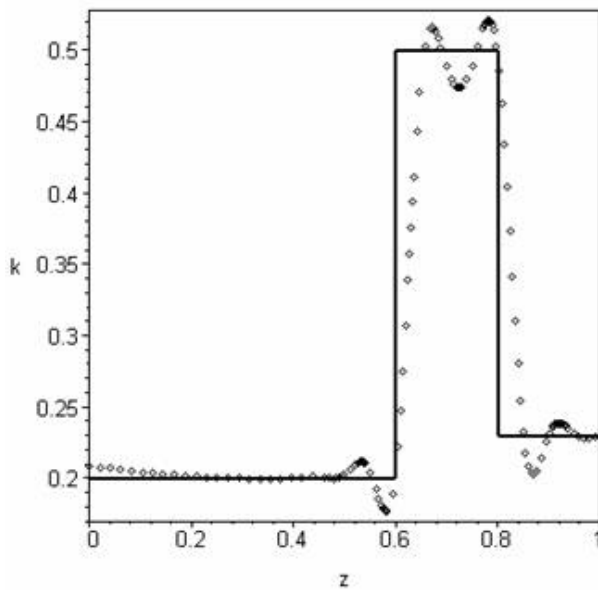


Рис. 1. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности нормальной кожи; нижний слой самый широкий

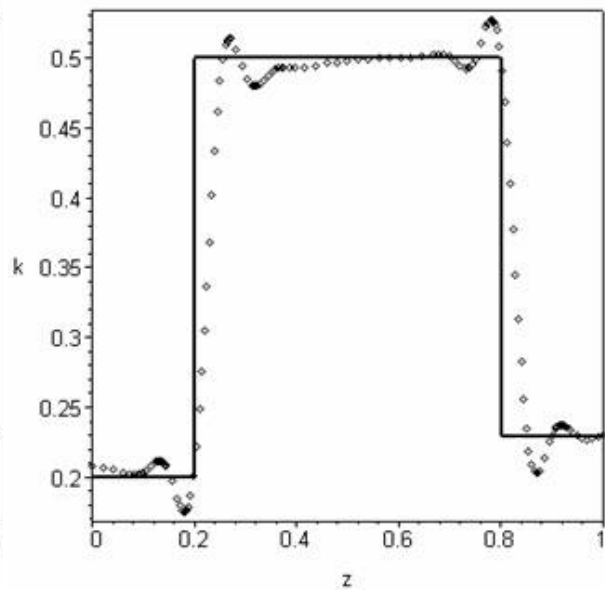


Рис. 2. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности нормальной кожи; средний слой самый широкий

нормальной кожи безразмерный коэффициент теплопроводности в пределах каждого из слоев является постоянной величиной: для подкожного жира —  $\bar{k}(z) = 0,2$ , дермы —  $\bar{k}(z) = 0,5$ , эпидермиса —  $\bar{k}(z) = 0,23$ . В случае патологических изменений в каком-либо слое коэффициент теплопроводности может сильно изменяться.

Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции коэффициента теплопроводности как нормальной, так и патологически измененной кожи. При проведении вычислительных экспериментов принято:  $f_2(\tau_2) = 0$ ,  $f_3(\tau_2) = H(\tau_2)$ ,  $\varepsilon = 10^{-6}$ ,  $\delta_0 = 0.05$ . В качестве входной информации при решении обратной задачи принята температура  $W(1, \tau_2)$ , измеренная на верхней грани слоя на временном интервале  $[a_3, b_3] = [0,4]$  в 4-х точках. Идентификация коэффициента теплопроводности кожи происходит в результате итерационного процесса. Итерационный процесс стартует с начального приближения, выбираемого среди констант для каждого слоя кожи на основе минимизации функционала невязки (2.3). Для нахождения поправок коэффициента теплопроводности в итерационном процессе применяется формула (2.7).

На рис. 1–3 показаны результаты реконструкции коэффициента теплопроводности кожи. При этом сплошной линией показан

график исходной функции, точками — восстановленной.

В первой серии экспериментов восстанавливался коэффициент теплопроводности нормальной кожи (рис. 1, 2), при этом относительные толщины каждого слоя варьировались, но общая безразмерная толщина полагалась равной 1. Во второй серии экспериментов восстанавливался коэффициент теплопроводности патологически измененной кожи. На рис.3 показан результат реконструкции  $\bar{k}(z)$ , когда патологические изменения затронули подкожный жир. В этом случае коэффициент теплопроводности моделировался следующей функцией: в нижнем слое вида  $\bar{k}(z) = 0,14 + 0,3z^2$  ( $0 < z < 0,6$ ), в среднем слое  $\bar{k}(z) = 0,5$  ( $0,6 < z < 0,8$ ), в верхнем слое  $\bar{k}(z) = 0,23$  ( $0,8 < z < 1$ ).

В результате вычислительных экспериментов выяснено, что для достижения порогового значения функционала невязки (2.3) требовалось не более 10 итераций, наибольшая погрешность реконструкции возникала в окрестностях точек разрыва функции (до 10 %), а в остальных точках не превышала 4 %. На результаты реконструкции в большей степени влияет толщина слоев: чем толще слой, тем результат реконструкции лучше. В меньшей степени результаты реконструкции зависят от соотношения модулей, но характе-

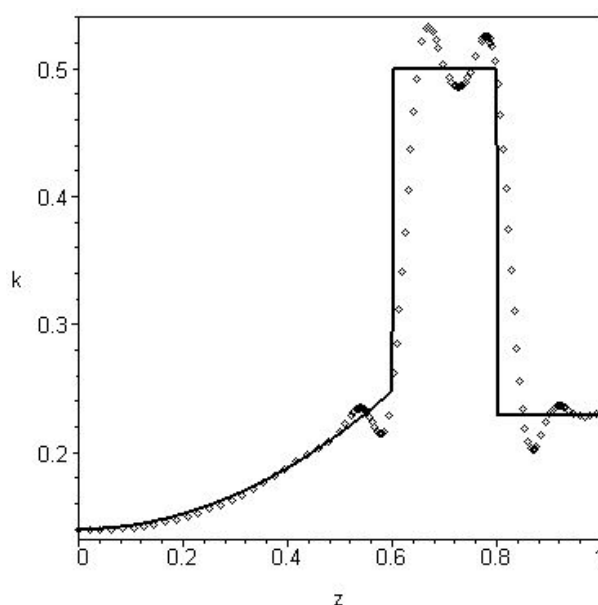


Рис. 3. Результат реконструкции коэффициента теплопроводности патологически измененной кожи

ристка первого слоя (низкомодульного) восстанавливается лучше других.

### Заключение

Представлен способ определения термомеханических характеристик слоистой биологической ткани. С помощью интегрального преобразования Фурье двумерная задача сводится к двум одномерным. Решение обратной задачи построено с помощью итерационного процесса, на каждом шаге которого определяются поправки на основе решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Проведена серия вычислительных экспериментов по восстановлению коэффициента теплопроводности кожи, моделируемой слоем, состоящим из трех термоупругих подслоев. Результаты вычислительных экспериментов показали, что данный подход позволяет эффективно восстанавливать переменные теплофизические характеристики слоя.

### Литература

1. Lerner R.M., Parker K.J., Huang S.R. Sonoelasticity: Medical elasticity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated tissue // *Acoustical Imaging*. 1988. Vol. 16. P. 317–327.
2. Сковорода А.Р., Аглямков С.Р. Определение механических свойств многослойной вязкоупругой среды по данным измерений импеданса // *Биофизика*, 1998. Т. 43. Вып. 2. С. 348–352.
3. Сковорода А.Р. Реконструкция упругих свойств мягких биологических тканей по данным об их деформировании при динамическом нагружении // *Биофизика*. 2000. Т. 45. Вып. 4. С. 723–729.
4. Ji L., McLaughlin J. Recovery of Lamé' parameter  $\mu$  in biological tissues // *Inverse problems*. 2000. Vol. 20. P. 1–24.
5. Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. Об одном методе идентификации свойств многослойных мягких биологических тканей // *Российский журнал биомеханики*. 2013. Т. 47. № 3(61). С. 37–48.
6. Тиманин Е.М. Поля смещений поверхностного источника колебаний в слоистой биологической ткани // *Акустический журнал*. 2002. Т. 48, № 1. С. 98–104.
7. Маслов Л.Б. Математическое моделирование колебаний пороупругих систем. Иваново: ПресСто, 2010. 264 с.
8. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел // *Инженерно-физический журнал*. 2014. Т. 87. № 1. С. 217–224.
9. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // *International Journal of Solids and Structure*. 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
10. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы // *Инженерно-физический журнал*. 2015. Т. 88. № 4. С. 951–959.
11. Ватульян А.О. Беляк О.А., Сухов Д.Ю.,

- Явруян О.В. Обратные и некорректные задачи. Ростов-на-Дону: Изд ЮФУ, 2011. 232 с.
12. Ватульян А.О., Денина О.В. Об одном способе определения упругих характеристик для неоднородных тел // Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т. 53. № 2. С. 137–147.
  13. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 230 с.
- ### References
1. Lerner R.M., Parker K.J., Huang S.R. Sonoelastisity: Medical elastisity images derived from ultrasound signals in mechanically vibrated tissue. *Acoustical Imaging*, 1988, vol. 16, pp. 317–327.
  2. Scovoroda A.R., Aglyamov S.R. Opredelenie mechanicheskikh svoystv mnogosloynoy vyazkouprugoy sredy po dannym izmereniy impedansa [Reconstruction of mechanical properties multilayer viscoelastic ambience from data on impedance measurements]. *Biofizika* [Biophysics], 1998, vol. 43, no. 2, pp. 348–352. (In Russian)
  3. Scovoroda A.R. Rekonstruktsiya uprugikh svoystv myagkikh biologicheskikh tkaney po dannym ob ikh deformirovaniy pri dinamicheskoy nagruzhenniy [Reconstruction of elastic properties of soft biological tissues from data on their deformation under dynamic loading]. *Biofizika* [Biophysics], 2000, vol. 45. no. 4, pp. 723–729. (In Russian)
  4. Ji L., McLaughlin J. Recovery of Lamé' parameter  $\mu$  in biological tissues. *Inverse problems*, 2000, vol. 20, pp. 1–24.
  5. Bogachev I.V., Vatulyan A.O., Dudarev V.V. Ob odnom metode identifikatsii svoystv mnogosloynnykh myagkikh biologicheskikh tkaney [On the method of property identification of multilayer soft biological tissues]. *Rossiyskiy zhurnal biomechaniki* [Russian journal of biomechanics], 2013, vol. 47, no. 3 (61), pp. 37–48. (In Russian)
  6. Timanin E.M. Polyа smescheniy poverhnostnogo istochnika kolebaniy v sloistoy biologicheskoy tkani [Displacement field produced by surface source of vibrations in a layered biological tissues]. *Akusticheskiy zhurnal* [Journal of acoustic], 2002, vol. 48, no. 1, pp. 98–104. (In Russian)
  7. Maslov L.B. *Matematicheskoe modelirovanie kolebaniy porouprugikh system* [Mathematical modeling of poroelastic systems vibrations]. Ivanovo, PresSto Publ., 2010, 264 p. (In Russian)
  8. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob odnom sposobe identifikatsii termouprugikh kharakteristik dlya neodnorodnykh tel [About one method of identification of thermoelastic characteristics for inhomogeneous bodies]. *Inzhenero-fizicheskiy zhurnal* [Journal of engineering physics], 2014, vol. 87, no. 1, pp. 217–224.
  9. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51(3), pp. 767–773. doi:10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003.
  10. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. K opredeleniyu neodnorodnykh termomechanicheskikh chatacteristic trubiy [To determination of inhomogeneous thermomechanical characteristics of pipe]. *Inzhenero-fizicheskiy zhurnal* [Journal of engineering physics], 2015, vol. 88, no. 4, pp. 951–959. (In Russian)
  11. Vatulyan A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela* [Inverse problems in mechanics of deformable solids]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2007, 224 p. (In Russian)
  12. Vatulyan A.O., Denina O.V. Ob odnom sposobe opredeleniya uprugikh characteristic dlya neodnorodnykh tel [About one method of identification of elastic characteristics for inhomogeneous bodies]. *Prikladnaya mekhanika i technicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics], 2012, vol. 53, no. 2, pp. 137–147. (In Russian)
  13. Tikhonov A.N., Goncharsky A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical methods for solving ill-posed problems]. Moscow, Nauka Publ., 1990, 230 p. (In Russian)