УДК 539.3

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ПАРАЛЛЕЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ НЕОДНОРОДНОСТЯХ МАТЕРИАЛОВ И ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Бабешко В. А.

DETERMINATION OF THE CONTACT STRESSES IN THE MATERIALS AND UNDERGROUND CONSTRUCTIONS WITH PARALLEL AND CROSSES INCLUSIONS

Evdokimova O. V.[*], Babeshko O. M.[**], Babeshko V. A.[*,**]

[*] Southern Scientific Center RAS, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[**] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. It is very important to estimate the contact stresses in the elastic materials with parallel and cross inclusions because it has applications in building, engineering, electronics, mine engineering. Traditionally the studies are carried out for an individual fixture, and then found parameters are accepted for all other facilities. At the same time a plurality of such facilities may lead to the occurrence of another factor badly affecting the strength. This factor is connected with the capability to localize the state of strain in one of the structure's zones, which results an exceeding of the planned strength parameters. The calculating theory of strength properties of these objects in the present scientific work is based on the example of the underground structures. The investigation use the block element method, which is based on the factorization approaches.

The problem comes to the Fredholm's system of the integral equations of the second kind. It is succeeded to turn integral equation to the system of the algebraic equations, which are accessible to the analytical analysis, allowing finding out the strain and shift by means of the calculation of the integrals, describing the kernels of these equations by the theory of residue.

The algorithm of realizing this investigation is presented. The possibility of the factorization methods for the such problems are discussed.

Keywords: stress-strain state, drifts, factorization, deformable layers, interface layer, Kirchhoff plates, block elements differential and integral equations.

Введение

Рассматривается совокупность параллельных подземных сооружений как блочная структура, состоящая из верхнего линейно упругого слоя толщины H_1 и пласта толщины h, моделируемого пластиной Кирхгофа. Пласт, содержащий добываемые полезные ископаемые, лежит на слое, механические характеристики которого подобны грунтовым и позволяют моделировать его постелью Винклера. Предполагается, что толщина h пласта много меньше H_1, что имеет место в реальных условиях добычи многих полезных ископаемых. Расположим систему координат $ox_1x_2x_3$ таким образом, что плоскость ox_1x_2 совпадает со срединной плоскостью пластины, а ось ox_3 направлена строго вверх. Считаем, что вдоль оси ox_1 перпендикулярно оси ox_2, расположено N протяженных параллель-

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2016 г. проект (0256-2014-0006), Программы президиума РАН 1-33П, проекты с (0256-2015-0088) по (0256-2015-0093) и при поддержке грантов РФФИ (14-08-00404, 15-01-01379, 15-08-01377, 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216).

ных между собой штолен, которые считаются бесконечными. Штольни находятся в рудном пласте и ширина каждой из них равна $b_{2n+1} - b_{2n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, где (b_{2n}, b_{2n+1}) — координаты на оси ox_2 штольни с номером $2n$. Пласт сверху накрыт верхним деформируемым слоем и лежит на основании Винклера, для которого связь между напряжениями $t(x_1, x_2)$ и перемещениями $u_{32}(x_1, x_2)$ верхней границы основания задается соотношением

$$u_{32}(x_1, x_2) = \varepsilon_6^{-1} \upsilon t(x_1, x_2), \quad \varepsilon_6^{-1} \upsilon > 0.$$

Здесь υ — коэффициент постели Винклера. Области между штольнями с координатами $\{b_{2n-1}, b_{2n}\}$ шириной $b_{2n} - b_{2n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$, $b_1 = -\infty$, $b_{2N} = \infty$ являются опорами, имеющими номера $2n - 1$. Допускается, что внешний упругий слой со свободной от напряжений верхней границей с плотностью материала ρ вертикально воздействует на пласт напряжением $q_0 = \rho g H_1$, где g — ускорение свободного падения, вызывая пренебрежимо малые касательные напряжения в сравнении с нормальными.

1. Формулировка задачи

Уравнение пластин Кирхгофа, описывающих поведение пласта, в том числе опорных зон, которые должны быть достаточно протяженными для удержания высокого давления верхнего слоя, имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2) u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv \\ \equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) u_{3b} + \\ + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) = 0, \quad (1.1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2) U_{3b} \equiv \\ \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b},\end{aligned}$$

$$U_{3b} = \mathbf{F_2} u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F_2} g_{3b},$$

$$T_{3b} = \mathbf{F_2} t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$

$$M_b = -D_{b1} \left(\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b \frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} \right),$$

$$D_{b1} = \frac{D_b}{\mathrm{H}_1^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{\mathrm{H}_1^3},$$

$$\begin{aligned}Q_b = -D_{b2} \left(\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b) \frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} \right) = \\ = f_{4b}(\partial\Omega_b),\end{aligned}$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{\mathrm{H}_1 \partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$

$$D_b = \frac{E_b h_b^3}{12(1 - \nu_b^2)}, \quad \varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2) 12 \mathrm{H}_1^4}{E_b h_b^3},$$

$$\varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu)\mathrm{H}_1}{\mu}.$$

Здесь для опор, сформированных из фрагментов пласта между штольнями, введено условное обозначение индексом b, которому в будущем будет приданы текущие номера. Опоры занимают области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$ при вертикальных статических воздействиях напряжением g_{3b} сверху и t_{3b} — снизу. Используются общепринятые обозначения механических параметров в выбранной системе координат: M_b и Q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила в системе координат $x_1 o x_2$ соответственно; h_b — толщины пластин, H_1 — размерная толщина верхнего слоя. Обозначения заимствованы из [1, 2], $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно. Перемещение нижней границы верхнего слоя происходит за счет веса верхнего слоя и описывается соотношением [3–5]

$$\begin{aligned}u_{31}(x_1, x_2) = \mathbf{K}_{31} g = \\ = \varepsilon_6^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_{31}(x_1, -\xi_1, x_2 - \xi_2) \times \\ \times [g(\xi_1, \xi_2) - g_0] \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{31}(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K_{31}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2, \quad (1.2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) e^{i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)} \, \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2.\end{aligned}$$

Здесь $g(\xi, \eta)$ — воздействия на нижнюю границу верхнего слоя со стороны пласта, т. е. контактные напряжения, действующие на верхний пласт от опор. Функция $K(\alpha_1, \alpha_2)$, называемая символом интегрального уравнения, представляет собой для линейно-упругого слоя представляет собой мероморфную функцию двух комплексных переменных. Полюса этой функции по одной из комплексных переменных $\alpha_2 = \alpha_2(\alpha_1)$ при фиксированной вещественной второй являются являются дискретными комплексными числами, не лежащими на вещественной оси в статических задачах. Воздействие со стороны пласта на верхнюю границу нижнего слоя обозначается через $t(\xi_1, \xi_2)$, вертикальное перемещение этой границы при принятых предположениях описывается функцией $u_{32}(x_1, x_2)$.

2. Свойства блочных элементов пласта

В основе решения граничной задачи лежит метод блочного элемента в сочетании с факторизационными подходами [1–5]. Следуя им, функциональные уравнения граничной задачи для каждой опоры можно представить в виде [1, 2]

$$R_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} \equiv (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 U_{3b} = \\ = -\int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b - \varepsilon_{53b} S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.1)$$

$$S_{3b}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)(t_{3b} - g_{3b}), \quad b = \lambda, r.$$

Здесь ω_b — участвующие в представлении внешние формы, имеющие вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_2^3} - i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + \right. \\ \left. + i\alpha_2^3 u_{3b} + 2\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2i\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2}\right] \mathrm{d}x_1 + \\ + \left[\frac{\partial^3 u_{3b}}{\partial x_1^3} - i\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3b}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_1} + i\alpha_1^3 u_{3b}\right] \mathrm{d}x_2\Bigg\}, \\ b = \lambda, r.$$

Интеграл вычисляется по границе опоры в направлении против часовой стрелки. Для прямолинейной границы внешняя форма принимает вид

$$\omega_b = e^{i\langle\alpha,x\rangle}\Bigg\{-\Bigg[i\alpha_1 M_b D_b^{-1} - Q_b D_b^{-1} - \\ - (\alpha_2^2 + \nu_b\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3b}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{3b}\Bigg]\Bigg\} \mathrm{d}x_1.$$

Вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные, псевдодифференциальные уравнения граничной задачи, с учетом принятых обозначений, можем представить, отдельно для каждой стороны опоры λ и r, где λ — левая сторона опоры, а r — правая. Пусть пластина занимает область $\Omega_n(|x_1| \leqslant \infty,\ b_{2n-1} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n})$. Тогда для правой стороны имеем псевдодифференциальные уравнения

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_{r1}^{-1}M_r - D_{r2}^{-1}Q_r - \\ - (\alpha_{2-}^2 + \nu_r\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{i\alpha_{2-}D_{\lambda1}^{-1}M_\lambda - D_{\lambda2}^{-1}Q_\lambda - \\ - (\alpha_{2-}^2 + \nu_\lambda\alpha_1^2)\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\alpha_{2-}\left[\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53b}S_3(\alpha_1, \alpha_{2-})\Bigg\rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{F}_1^{-1}(\xi_1^r)\Bigg\langle -\int\limits_{\partial\Omega_r}\Bigg\{iD_{r1}^{-1}M_r - 2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3r}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_r)\alpha_1^2\right] u_{3r}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \int\limits_{\partial\Omega_\lambda}\Bigg\{iD_{\lambda1}^{-1}M_\lambda - 2\alpha_{2-}\frac{\partial u_{3\lambda}}{\partial x_2} + \\ + i\left[3\alpha_{2-}^2 + (2-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] u_{3\lambda}\Bigg\} e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_{2-} b_{2n-1}}\,\mathrm{d}x_1 + \\ + \varepsilon_{53}S_3'(\alpha_1, \alpha_{2-})\Bigg\rangle = 0. \quad (2.3)$$

В подынтегральных функциях принято для правой и левой сторон соответственно

$$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2}, \quad \alpha_{2+} = i\sqrt{\alpha_1^2}.$$

Введем следующую систему обозначений, основываясь на (2.2) и (2.3):

$$\mathbf{Y}_\lambda = \{y_{1\lambda}, y_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{Z}_\lambda = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}\},$$

$$\mathbf{Y_r} = \{y_{1r}, y_{2r}\}, \quad \mathbf{Z_r} = \{z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{F}_1 g = \mathbf{F}_1(\alpha_1)g, \quad \mathbf{F}_2 g = \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)g,$$

$$y_{1\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 M_\lambda, \quad y_{2\lambda} = D_\lambda^{-1}\mathbf{F}_1 Q_\lambda,$$

$$y_{1r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 M_r, \quad y_{2r} = D_r^{-1}\mathbf{F}_1 Q_r,$$

$$z_{1\lambda} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_2^\lambda}, \quad z_{2\lambda} = \mathbf{F}_1 u_\lambda,$$

$$z_{1r} = \mathbf{F}_1 \frac{\partial u_r}{\partial x_2^r}, \quad z_{2r} = \mathbf{F}_1 u_r,$$

$$\mathbf{K}_\lambda = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}\}, \quad \mathbf{K}_r = \{k_{1r}, k_{2r}\},$$

$$k_{1\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2-})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53\lambda}S_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$

$$k_{2\lambda} = \varepsilon_{53\lambda}S'_{3\lambda}(\alpha_1, \alpha_{2-}),$$

$$k_{1r} = \varepsilon_{53r}\mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_{2+})(t_\lambda - g_\lambda) = \\ = \varepsilon_{53r}S_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}),$$

$$k_{2r} = \varepsilon_{53r}S'_{3r}(\alpha_1, \alpha_{2+}).$$

Будем считать, что боковые границы опор штолен свободны от напряжений, т. е. $\mathbf{Y}_\lambda = \mathbf{Y_r} = 0$. Тогда, введя обозначения,

$$\mathbf{Z}_{\lambda r} = \{z_{1\lambda}, z_{2\lambda}, z_{1r}, z_{2r}\},$$

$$\mathbf{K}_{\lambda r} = \{k_{1\lambda}, k_{2\lambda}, k_{1r}, k_{2r}\},$$

с учетом направлений дифференцирования получим для каждой опоры систему уравнений для решения псевдодифференциальных уравнений вида

$$(-1+\nu_\lambda)\alpha_1^2 z_{1\lambda} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{(-1+\nu_r)\alpha_1^2 z_{1r} - i\alpha_{2+}\left[(1-\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\} \times \\ \times e^{i\alpha_{2+}b_{2n-1}} = -k_{1\lambda},$$

$$2\alpha_{2+}z_{1\lambda} + i\left[(1+\nu_\lambda)\alpha_1^2\right] z_{2\lambda} - \\ - \left\{2\alpha_{2+}z_{1r} + i\left[(1+\nu_r)\alpha_1^2\right] z_{2r}\right\} e^{i\alpha_{2+}b_{2n}} = \\ = -k_{2\lambda}.$$

Аналогичный вид имеет вторая система с переменой α_{2+} и α_{2-} местами.

В матричном представлении, позволяющем записать решение, системы запишутся

$$\mathbf{A}_{\lambda r}\mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{K}_{\lambda r}, \quad \mathbf{Z}_{\lambda r} = -\mathbf{A}_{\lambda r}^{-1}\mathbf{K}_{\lambda r}$$

3. Сопряжение пласта со слоями

Внеся решения этой системы в псевдодифференциальные уравнения, получим полный набор граничных условий на каждой границе. После этого они вносятся в правые части функциональных уравнений (2.1). В результате соотношения для опор могут быть представлены в следующем виде:

$$U_{2n-1} = -R^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \\ \times \left[\int\limits_{\partial\Omega_n} \omega_{2n-1} + \varepsilon_{53}\mathbf{F}_2(t_{2n-1} - g_{2n-1})\right]. \tag{3.1}$$

Приняв теперь во внимание, что число опор равно $N+1$ с обозначениями сторон опор $\lambda = 2n-1$, $r = 2n$, в результате сопряжения блочных элементов опор с верхним и нижним слоями получим следующую систему уравнений:

$$U_{31}(\alpha_1, \alpha_2) = -\varepsilon_6^{-1}K_{31}\left(\sum_{n=1}^{N} G_{2n-1} - G_0\right),$$

$$U_{32}(\alpha_1, \alpha_2) = \varepsilon_6^{-1}\upsilon\sum_{n=1}^{N} T_{2n-1}.$$

Здесь $U_{32}(\alpha_1, \alpha_2)$ — перемещения нижнего основания по закону постели Винклера. Кроме этого имеют место соотношения

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}\left\langle \int\limits_{\partial\Omega_{\lambda 2n-1}} \omega_{\lambda 2n-1} - \right. \\ \left. - \int\limits_{\partial\Omega_{r2n-1}} \omega_{r2n-1} + \varepsilon_{53}S_{312n-1}(\alpha_1, \alpha_2)\right\rangle,$$

$$\omega_{\lambda 2n-1} = \\ = e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n-1}}\left\{-\left[(\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{\lambda 2n-1}}{\partial x_2} + \right.\right. \\ \left.\left. + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu)\alpha_1^2\right] u_{\lambda 2n-1}\right]\right\} \mathrm{d}x_1,$$

$$\omega_{r2n-1} = \\ = e^{i\alpha_1 x_1 + i\alpha_2 b_{2n}}\left\{-\left[(\alpha_2^2 + \nu\alpha_1^2)\frac{\partial u_{r2n-1}}{\partial x_2} + \right.\right. \\ \left.\left. + i\alpha_2\left[\alpha_2^2 + (2-\nu_b)\alpha_1^2\right] u_{r2n-1}\right]\right\} \mathrm{d}x_1,$$

$$\langle \alpha, x \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

В результате ряда преобразований приходим к следующему функциональному уравнению, описывающему поведение отдельно выбранной опоры:

$$\big[\varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \times \times (1 + \upsilon^{-1} K_{31})\big] G_{2n-1} = (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \times \times \big\langle \big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \big] + + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1}) G_0 \big\rangle.$$

Значение $t_{2n-1}(x_1, x_2) = \mathbf{F}_2^{-1} T_{2n-1}$ находится из соотношения

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = = \upsilon^{-1} \mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31}(G_0 - G_{2n-1}). \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}}$ — проектор на область Ω_{2n-1}. Последнее соотношение можно приближенно представить в виде

$$t_{2n-1}(x_1, x_2) = \upsilon^{-1} \mathbf{F}_2^{-1} K_{31}(G_0 - G_{2n-1}).$$

Это оправдано тем, что в статических задачах правая часть последнего выражения экспоненциально убывает при удалении от зоны контакта.

Для сведения функционального уравнения к системе интегральных уравнений, введем следующие обозначения:

$$\big[\varepsilon_6^{-1} K_{31} + \varepsilon_{53}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2}(1 + \upsilon^{-1} K_{31})\big] = = K(\alpha, \beta),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n-1}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \times \times \big\langle \big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \big] + + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1}) G_0 \big\rangle = f_{2n-1}(x_1, x_2),$$

$$\mathbf{P}_{\Omega_{2n}} \mathbf{F}_2^{-1} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \times \times \big\langle \big[Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2) e^{i\alpha_2 b_{2n}} \big] + + \varepsilon_6^{-1} K_{31}(\varepsilon_6^{-1} + \varepsilon_{53}\upsilon^{-1}) G_0 \big\rangle = \phi_{2n}(x_1, x_2),$$

$$U_{2n-1} = -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^{-2} \times \times \big\langle (A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1}) \times \times e^{i\alpha_2 b_{2n-1}} + + (A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n}) e^{i\alpha_2 b_{2n}} + + \varepsilon_{53}(T_{2n-1} - G_{2n-1}) \big\rangle,$$

$$(A_{2n-1}\alpha_2^3 + B_{2n-1}\alpha_2^2 + C_{2n-1}\alpha_2 + D_{2n-1}) = = Q_{2n-1}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$(A_{2n}\alpha_2^3 + B_{2n}\alpha_2^2 + C_{2n}\alpha_2 + D_{2n}) = = Q_{2n}(\alpha_1, \alpha_2).$$

4. Построение и исследование интегрального уравнения

Приняв во внимание наличие $N+1$ опоры, функциональное уравнение можно записать в виде интегрального уравнения [3, 5]

$$\mathrm{K}g = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times \times \sum_{n=1}^{N} g_{2n-1}(\xi_1, \xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = = \sum_{n=1}^{N} f_{2n-1}(x_1, x_2) + \sum_{n=2}^{N-1} \phi_{2n}(x_1, x_2),$$

$$n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha_1, \alpha_2) \times \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2,$$

$$G(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi_1, \xi_2) \times \times e^{ii(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2,$$

$$f_{2n-1}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n-1}(b_{2n-1} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n}, |x_1| \leqslant \infty,\ n = 0, 1, \ldots, N),$$

$$\phi_{2n}(x_1, x_2) \in \Omega_{2n}(b_{2n} \leqslant x_2 \leqslant b_{2n+1}, |x_1| \leqslant \infty),$$

$$f_1(x_1, x_2) \in \Omega_0(-\infty = b_1 \leqslant x_2 \leqslant b_2, |x_1| \leqslant \infty),$$

$$f_{2N-1}(x_1,x_2) \in \Omega_{2N}(b_{2N-1} \leqslant x_2 \leqslant \infty, \\ |x_1| \leqslant \infty),$$

$$\phi_0(x_1,x_2) = \phi_{2N}(x_1,x_2) = 0,$$

Здесь $\phi_{2n}(x,y)$ — новые неизвестные.

Для его исследования и решения применим метод факторизации, разработанный в [3, 5]. При этом приняты обозначения факторизации функций по параметру α_2 в виде суммы и в виде произведения в форме

$$\Psi(\alpha_1,\alpha_2) = \{\ \Psi(\alpha_1,\alpha_2)\ \}^+ + \{\ \Psi(\alpha_1,\alpha_2)\ \}^-,$$

$$\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^{\pm} = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta,$$

$$\alpha_2 \in C^{\pm},$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = K_+(\alpha_1,\alpha_2)K_-(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K_{\pm}(\alpha_1,\alpha_2) = \exp\left[\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\Psi(\alpha_1,\eta)}{(\eta-\alpha_2)}\,\mathrm{d}\eta\right],$$

$$\alpha_2 \in C^{\pm}.$$

Здесь через C^+ и C^- обозначены верхняя и нижняя комплексные полуплоскости соответственно. Функции $\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^{\pm}$, и $K_{\pm}(\alpha_1,\alpha_2)$ регулярны в областях $C^{\pm}$, кроме того, последние не имеют там нулей. Условия, налагаемые на функции для выполнения факторизаций, оговорены в [5] и в данном случае выполняются. Применяя метод факторизации в варианте работ [3, 5], интегральное уравнение сводим к решению системы одномерных интегральных уравнений с вполне непрерывным оператором в пространстве непрерывных с весом функций на всей оси

$$X^+_{2p-1}(\alpha_1,\alpha_2) + \\ + \left\{R(\alpha_1,\alpha_2)X^-_{2p-3}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})}\right\}^+ - \\ - \left\{R(\alpha_1,\alpha_2)X^+_{2p}(\alpha)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})}\right\}^+ = \\ = \{\Psi_2(\alpha_1,\alpha_2)\}^+,$$

$$X^-_{2(p-1)}(\alpha_1,\alpha_2) - \\ - \left\{R(\alpha_1,\alpha_2)X^-_{2p-3}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2(p-1)})}\right\}^- + \\ + \left\{R(\alpha_1,\alpha_2)X^+_{2p}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2p})}\right\}^- = \\ = -\{\Psi_2(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$X^-_{2p-1}(\alpha_1,\alpha_2) + \\ + \left\{R^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)X^+_{2p+1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p+1})}\right\}^- - \\ - \left\{R^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)X^-_{2(p-1)}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p-1})}\right\}^- = \\ = \{\Psi_1(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$X^+_{2p}(\alpha_1,\alpha_2) + \\ + \left\{R^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)X^+_{2p+1}((\alpha_1,\alpha_2))e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p+1})}\right\}^+ - \\ - \left\{R^{-1}X^-_{2(p-1)}((\alpha_1,\alpha_2))e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2p-1})}\right\}^+ = \\ = -\{\Psi_1(\alpha_1,\alpha_2)\}^+,$$

$$n = 1, 2, \ldots, N,$$

$$X^+_{2N+1}(\alpha_1,\alpha_2) = X^-_{-1}(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = X^+_{2N}(\alpha_1,\alpha_2) = X^-_0(\alpha_1,\alpha_2) = 0,$$

$$R(\alpha_1,\alpha_2) = K_+(\alpha_1,\alpha_2)K^{-1}_-(\alpha_1,\alpha_2).$$

Здесь введена следующая система обозначений:

$$F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{b_{2n-1}}^{b_{2n}} f_{2n-1}(x_1,x_2)e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$\Phi_{2n-2}(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{b_{2n-2}}^{b_{2n-1}} \phi_{2n-2}(x_1,x_2)e^{i(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2b_{2n-1}} = F^+_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$F_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2b_{2n}} = F^-_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\Phi_{2n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2b_{2n}} = \Phi^+_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\Phi_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2b_{2n+1}} = \Phi^-_{2n-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = K_-(\alpha_1,\alpha_2)K_+(\alpha_1,\alpha_2)K_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\sum_{n=1}^{p}F_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n})}+ \\ + K_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\sum_{n=p+1}^{N}F_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p}-b_{2n-1})} = \\ = \Psi_1(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$K_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\sum_{n=1}^{p-1}F_{2n-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n})}+ \\ + K_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\sum_{n=p}^{N}F_{2n-1}^{+}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\alpha_2(b_{2p-1}-b_{2n-1})} = \\ = \Psi_2(\alpha_1,\alpha_2).$$

Эти интегральные уравнения с помощью вычисления вычетов сводятся к системе линейных алгебраических уравнений, имеющих экспоненциально убывающие коэффициенты, и для расчетов достаточно ограничиваться небольшим числом членов. Определив неизвестные $X_{2p-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)$, $X_{2(p-1)}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)$, для нахождения напряжений $g_{2p-1}(x_1,x_2)$, действующих по всей длине опоры, и определения отвисания кровли $\phi_{2p}(x_1,x_2)$ между опорами $2p-1$ и $2p+1$ достаточно вычислить интегралы

$$g_{2p-1}(x_1,x_2) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\left[X_{2p-1}^{-}(\alpha_1,\alpha_2) - X_{2p-3}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)\right]\times \\ \times K_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\phi_{2p}(x_1,x_2) = \\ = \mathbf{F}_2^{-1}\left[X_{2p}^{-}(\alpha_1,\alpha_2) - X_{2(p-1)}^{-}(\alpha_1,\alpha_2)\right]\times \\ \times K_-(\alpha_1,\alpha_2).$$

Случай присутствия поперечных штолен вместе с параллельными изучается таким же подходом с помощью метода блочного элемента, только приводит к более сложным системам уравнений. Схема исследований аналогична, однако в процессе ее реализации возникает необходимость на некотором этапе осуществлять факторизацию по параметру α_1, а α_2 рассматривается как свободный параметр.

Заключение

Разработанный метод исследования напряженно-деформированного состояния зон произвольного числа параллельных штолен разной ширины для этого случая может достаточно просто переноситься на случаи подобных изделий из иных материалов и других масштабов. Заметим, что локальное состояние штолен при добыче полезных ископаемых изучалось во многих работах, например, в [6]. Учет наличия поперечных штолен или арматуры в плитах, осуществляется методом блочного элемента, изложенным в [7]. Выполнив указанные построения, можно оценивать возникающие контактные напряжения и в практических случаях осуществлять соответствующие усиления креплений шахт.

Литература

1. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В, Федоренко А.Г., Шестопалов В.Л.* К проблеме покрытий с трещинами в наноматериалах и сейсмологии // МТТ. 2013. № 5. С. 39–45.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме физико-механического предвестника стартового землетрясения: место, время, интенсивность // ДАН. 2016. Т. 466. № 6. С. 664–669.
3. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
4. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
5. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
6. *Баренблатт Г.И., Христианович С.А.* Об обрушении кровли при горных выработках // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1955. № 11. С. 73–82.
7. *Евдокимова О.В.* О способах формирования блочных структур с неоднородностями // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016, № 1. С. 42–48.

References

1. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V, Fedorenko A.G., Shestopalov V.L. K probleme pokrytiy s treshchinami v nanomaterialakh i seysmologii [On the problem of cracks in coatings with nanomaterials and seismology]. *Mekhanika tverdogo tela* [Mechanics of Solids], 2013, no. 5, pp. 39–45.
2. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme fiziko-mekhanicheskogo predvestnika startovogo zemletryaseniya: mesto, vremya, intensivnost' [On the problem of physical and mechanical precursor starting earthquake: place, time, intensity]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. Academy of Sciences], 2016, vol. 466, no. 6, pp. 664–669.
3. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problem in elasticity theory for nonclassical fields]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 320 p.
4. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem in elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 456 p.
5. Babeshko V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1984, 256 p.
6. Barenblatt G.I., Khristianovich S.A. Ob obrushenii krovli pri gornykh vyrabotkakh [On the roof collapse at the mine workings]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk* [Proc. of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences], 1955, no. 11, pp. 73–82.
7. Evdokimova O.V. O sposobah formirovania blochnih struktur s neodnorodnostami [About formation methods of block structures with inhomogeneity]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo Ekonomocheskogo sotrudnichestva* [Ecologikal Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, vol. 447, no. 1, pp. 42–48.

Статья поступила 27 июня 2016 г.