

УДК 539.3

## К МОДЕЛЯМ И МЕТОДАМ ИЗУЧЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЛИТОСФЕРНЫХ СТРУКТУР В ОБЛАСТИ РАЗЛОМОВ

Телятников И. С.

TO MODELS AND METHODS OF STUDYING THE INTERACTIONS  
OF LITHOSPHERIC STRUCTURES IN THE AREA OF THE FAULTS

Telyatnikov I. S.

Southern Scientific Center of Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: ilux\_t@list.ru

*Abstract.* We propose an approach to the study of stress-strain state of lithospheric plates containing faults that is quite reliable, given the scale, and consists in modeling of their structures by two-dimensional plates on the three-dimensional elastic substrate. A method for studying the interactions of different types of lithospheric plates with rectilinear faults, which is a modification of the eigenfunction method using the method of block element is described. The method is considered on the example of the solution of the static problem and the problem of steady oscillations of extended plates on the surface of the elastic layer at a predetermined localized surface load. Its advantage lies in the possibility of its application to the study of stress-strain state of structures with faults, under the influence of vibration loads, and also in the process of slow or static interaction.

The use of the proposed approach allows to draw conclusions about the impact of the type of fracture and physical-mechanical properties of the lithosphere structures on the character of the wave process in the geological environment, in particular the shape of the signal after passing through the fault, applicable for the study of the fault structure in the upper crust. Since experimental studies of the seismic signal transmission through the fault and features of the interaction of lithospheric structures at faults require significant material and time costs, the theoretical results obtained in this study will allow testing of fracture types of the lithospheric structures using vibroseismic sources while rationally defining the programs of experiments.

*Keywords:* fault, composite coating, elastic foundation, vibration, static interaction, factorization methods.

### Введение

В настоящее время активно ведутся исследования сейсмических явлений в рамках моделей, основанных на положении о блочном строении литосферы академика М. А. Садовского [1, 2], выводы которого способствовали формированию нового подхода к исследованию зарождения и развития сейсмических событий. Проблема геодинамического взаимодействия разноразмерных блочных структур может быть изучена методами теории смешанных контактных задач. В Кубанском государственном университете и Южном научном центре РАН развивается новая механическая концепция прогноза сейсмичности, основанная на анализе возможных механизмов разрушения литосферных плит в зонах контакта или у границ разломов (основных сейсмогенери-

рующих зонах). Положения этой концепции, опубликованные в многочисленных работах и представленные для ознакомления на сайте программы Еврокомиссии “ЕРОС” [3], требуют для своей реализации глубокого математического анализа механических процессов, протекающих при взаимодействии литосферных плит. Исследования этих процессов нуждаются в привлечении современного математического аппарата — факторизационных методов, топологии, внешнего анализа, метода блочного элемента и пр. Фундаментальные результаты по развитию факторизационных подходов и созданию теории блочных структур получены в работах [4–6, и др.].

При разработке новых подходов к изучению региональной сейсмичности необходимо учитывать, что вызванное изменением

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux\_t@list.ru.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-31-00067 мол\_а).

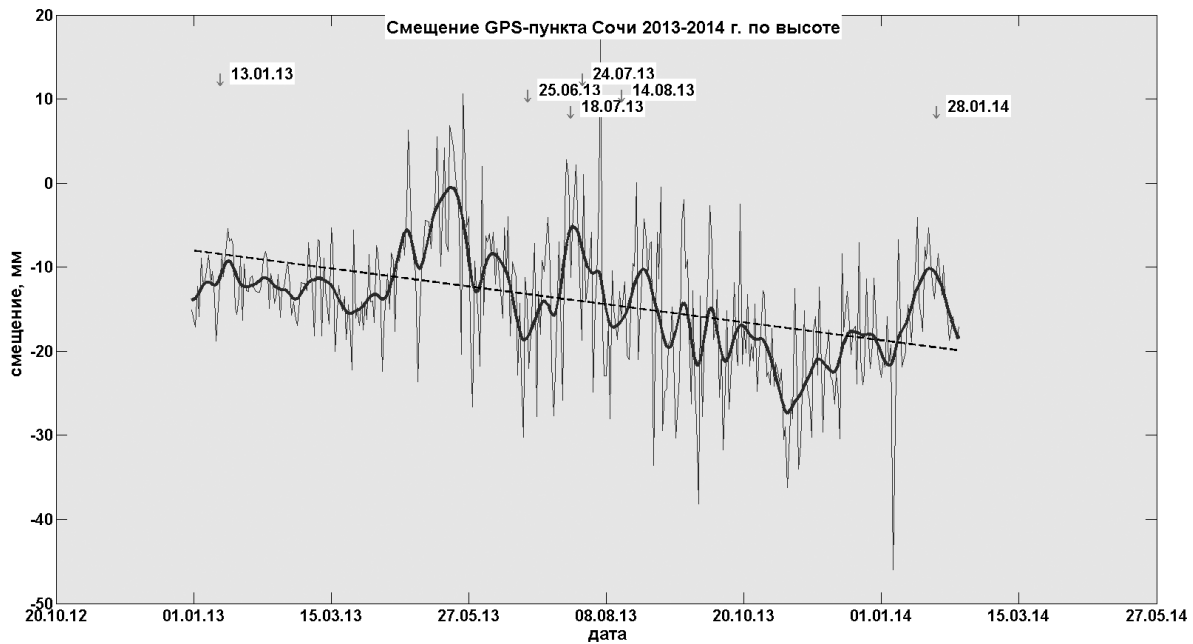


Рис. 1. Вертикальные смещения GPS-пункта Сочи

напряженно-деформированного состояния литосферных структур нарастание сейсмичности происходит медленно. Это подтверждают данные высокоточных GPS-приемников. Так, за неделю смещения плит достигают всего нескольких миллиметров. На рис. 1 приведен график вертикальных смещений GPS-пункта Сочи.

Исследование взаимодействия литосферных плит, контактирующих вдоль прямолинейных разломов, и разработка методов определения характеристик напряженно-деформированного состояния подобных структур при вибрационном и статическом воздействиях чрезвычайно важны. На рис. 2 представлены разломы на территории Краснодарского края, в большинстве своем прямолинейные.

Настоящая работа посвящена исследованию взаимодействия литосферных плит, контактирующих вдоль прямолинейных разломов, путем их моделирования двумерными пластинами на трехмерном упругом основании. Несмотря на универсальность топологического метода блочного элемента [5], в случаях плоских и прямолинейных границ целесообразно использовать упрощенный метод с применением элементов топологического подхода, изложенный в настоящей работе. Представленный метод позволяет определить характеристики напряженно-

деформированного состояния структур с составными покрытиями при вибрационном и статическом воздействии и изучить влияние характера взаимодействия на разломах и свойств элементов структуры на развитие деформационного и волнового процессов.

### 1. Постановка задачи

В качестве модели разноразмерной блочной структуры литосферной плиты в работе рассматривается краевая задача для двух полуограниченных пластин в контакте с трехмерным упругодеформируемым основанием под действием локализованной поверхностной нагрузки. Перемещения  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \{u_j\}$  ( $j = \overline{1,3}$ ),  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ , упругой подложки описываются уравнениями Ляме вида

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}. \quad (1.1)$$

Здесь упругие свойства среды характеризуются модулями  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\rho$  — плотность подложки.

Далее считается, что координатная плоскость  $x_1 O x_2$  совмещена со срединной поверхностью покрытия, в качестве которого рассматриваются две протяженные деформируемые пластины, граничащие вдоль оси  $O x_2$ , с усредненными по толщине параметрами. Ось  $O x_3$  направлена по нормали к поверхности системы покрытие/подложка, контакт меж-

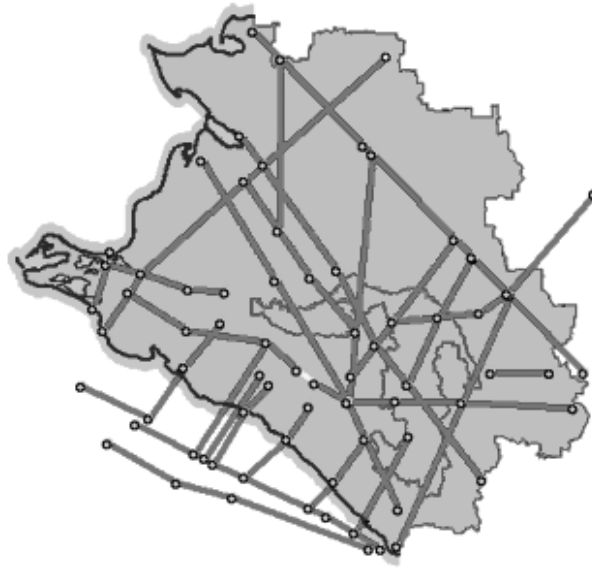


Рис. 2. Тектонические разломы территории Краснодарского края

ду покрытием и основанием является идеальным. Рассматриваются установившийся (с частотой  $\omega$ ) процесс колебаний системы, а также процесс статического взаимодействия составного покрытия и подложки.

В работе использованы линеаризованные уравнения движение пластин [7], заданные в соответствующих полуплоскостях  $x_2 \in R$ ,  $x_1 \in \Omega_j$  ( $j = 1, 2$ ), где

$$\Omega_1 = \{x_1 : 0 < x_1 < +\infty\},$$

$$\Omega_2 = \{x_1 : -\infty < x_1 < 0\}.$$

**1.1.** В случае установившихся колебаний перемещения срединных поверхностей пластин описываются уравнениями

$$\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \quad (1.2)$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R,$$

где  $\mathbf{u}_j = \{u_{j1}, u_{j2}, u_{j3}\}$  — вектор амплитуд перемещений точек срединной поверхности  $j$ -й пластины. Дифференциальные операторы  $\mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2)$  ( $j = 1, 2$ ) имеют следующие элементы:

$$R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j4},$$

$$R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j4},$$

$$R_{33}^j = \varepsilon_{j3} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right) - \varepsilon_{j4},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0,$$

$$\varepsilon_{j1} = \frac{1 - \nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j2} = \frac{1 + \nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12},$$

$$\varepsilon_{j4} = \frac{\omega^2 \rho_j (1 - \nu_j^2)}{E_j}, \quad \varepsilon_{j5} = \frac{1 - \nu_j^2}{E_j h_j};$$

$\rho_j$  — плотность,  $\nu_j$  — коэффициент Пуассона,  $E_j$  — модуль Юнга;  $h_j$  — толщина  $j$ -й пластины. Матрица  $\mathbf{E}_j = \text{diag}\{-\varepsilon_{j5}, -\varepsilon_{j5}, \varepsilon_{j5}\}$ ,  $\mathbf{g}_j = \{g_{jk}\}$  — вектор амплитуд напряжений, действующих со стороны подложки на нижнюю границу пластины;  $\mathbf{b}_j = -\varepsilon_{j5} \mathbf{t}_j$ ,  $\mathbf{t}_j = \{t_{jk}\}$ ,  $k = \overline{1, 3}$  — вектор поверхностных воздействий.

Решая уравнения Ляме (1.1) для случая установившихся колебаний при заданных на поверхности среды напряжениях, для упругих оснований можно выписать интегральные соотношения, связывающие амплитуды перемещений  $\mathbf{u}$  и напряжений  $\mathbf{g}$  на их поверхности

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int_{\sigma_2 \sigma_1} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2, 0) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (1.3)$$

где  $\mathbf{K} = \|K_{nm}\|_{n,m=1}^3$  — матрица Грина упругой среды, элементы которой зависят от

физико-механических характеристик подложки,  $\mathbf{G} = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}$ ,  $\mathbf{V}_2$  — оператор двумерного преобразования Фурье. Методы построения матриц Грина  $\mathbf{K}$  для различных типов упругих сред приводятся в работах [8–11] и др. Положение контуров  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  определяется принципом предельного поглощения. Для моделей сред, обладающих сложными свойствами, соотношения (1.3), называемые функциями влияния, могут быть получены экспериментальным путем.

Рассматривается условие идеального контакта пластин с деформируемым основанием

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j(x_1, x_2) &= \mathbf{u}(x_1, x_2), \\ \mathbf{g}_j(x_1, x_2) &= \mathbf{g}(x_1, x_2), \\ x_1 &\in \Omega_j, \quad x_2 \in R. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В области контакта составляющих покрытия ( $x_1 = 0, -\infty < x_2 < +\infty$ ) задаются граничные условия, описываемые соотношениями вида

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_1(0, x_2) + \\ + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_2(0, x_2) = \mathbf{f}(x_2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{L}_j(\partial x_1, \partial x_2)$  ( $j = 1, 2$ ) — заданные дифференциальные операторы, вид которых, как и функции  $\mathbf{f}$ , определяется типом взаимодействия пластин в области контакта. С учетом гипотезы прямых нормалей для каждой точки на стыке пластин необходимо удовлетворить четырем граничным условиям, поэтому в общем виде  $\mathbf{L}_j$  можно представить как матричные операторы  $4 \times 3$ . Варианты условий на стыке пластин представлены в [7, 12].

**1.2.** Статическому случаю взаимодействия покрытия и подложки соответствуют уравнения

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{0j}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_j(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j(x_1, x_2) = \\ = \mathbf{b}_j(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$x_1 \in \Omega_1, \quad x_2 \in R,$$

где

$$\begin{aligned} R_{11}^{0,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \\ R_{22}^{0,j} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \\ R_{33}^{0,j} &= \varepsilon_{j3} \left( \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right), \\ R_{kl}^{0,j} &= R_{kl}^j \quad (k \neq l). \end{aligned}$$

В области стыковки пластин также задаются условия вида (1.5). На границе покрытия и подложки справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x_1, x_2, 0) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\times \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2, 0) e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)} d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned}$$

Матрицы Грина  $\mathbf{K}_0(\alpha_1, \alpha_2)$  статических задач для упругого слоя приведены в [8].

## 2. Метод решения

Дифференциальный метод факторизации решения краевых задач представляет собой обобщение метода интегральных преобразований, являющегося удобным инструментом изучения последних в случае, когда функции, описывающие интегральное преобразование, и рассматриваемая область согласованы. Под согласованностью здесь понимается возможность перехода от дифференциальных уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям в результате применения интегрального преобразования. В отличие от приведенной в [5] реализации дифференциального метода факторизации предлагается метод, позволяющий упростить исследование граничных задач, описывающих взаимодействие плит по прямолинейному участку границы.

**2.1.** Применив интегральное преобразование Фурье по переменной  $x_2$  к (1.2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) следующего вида:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_j(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) - \mathbf{E}_j \bar{\mathbf{g}}_j(x_1, \alpha_2) = \\ = \bar{\mathbf{b}}_j(x_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad \alpha_2 \in R,$$

где  $j = 1, 2$ . Здесь и далее чертой помечены Фурье-образы по переменной  $x_2$ .

Решения системы (2.1) для каждой из пластин могут быть представлены следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2) &= V^{-1}(x_1) \left[ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \right. \\ &\times (\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)) \left. \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^4 C_{jk}(\alpha_2) \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$x_1 \in \Omega_j,$$

где  $\mathbf{R}_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \mathbf{V}_2(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_j(\partial x_1, \partial x_2)$ ,  $\mathbf{G}_j = \mathbf{V}_2 \mathbf{g}_j$ ,  $\mathbf{B}_j = \mathbf{V}_2 \mathbf{b}_j$ ,  $\bar{\mathbf{v}}_k^{(j)} = \left\{ \bar{v}_{km}^{(j)} \right\}$  — общие решения однородных систем ОДУ (2.1), ограниченные на бесконечности в соответствующих полуплоскостях и полученные с использованием принципа предельного поглощения,  $\mathbf{V}_2$  — оператор двумерного преобразования Фурье,  $\mathbf{V}^{-1}$  — оператор обращения, соответствующий одномерному преобразованию Фурье.

Используя преобразование Фурье по переменной  $x_1$  на полупрямых, соответствующих значению  $j$ , из соотношений (2.2) получим

$$\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \left\{ \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \times \right. \\ \left. \times [\mathbf{E}_j \mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2)] \right\}^{\pm} + \\ + \sum_{k=1}^4 C_{jk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2), \quad (2.3)$$

где  $\mathbf{V}_k^{(j)} = \mathbf{V}(\alpha_1) \bar{\mathbf{v}}_k^{(j)}(x_1, \alpha_2)$ .

Здесь и далее верхний знак этажного символа « $\pm$ » соответствует значению  $j = 1$ , нижний —  $j = 2$  и указывает на вектор-функцию, регулярную соответственно выше (+) и ниже (−) контура  $\sigma_1$ , выбираемого в соответствии с принципом предельного поглощения и почти всюду совпадающего с вещественной осью, отклоняясь от нее на отрезке конечной длины.

Условия сопряжения пластин с подложкой (1.4) после применения преобразования Фурье примут вид

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{U}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{U}_2(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) + \mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2).$$

Учитывая последние условия, функциональные соотношения для подложки (1.3) и выражения для трансформант Фурье амплитуд перемещений (2.3), приходим к системе функциональных уравнений относительно Фурье-образов амплитуд контактных напряжений между покрытием и подложкой

$$\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+, \quad \mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-,$$

$$\mathbf{K}_1 \mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{K}_2 \mathbf{G}_2^-(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + \sum_{j=1}^2 \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{B}_j(\alpha_1, \alpha_2) + \\ - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{1l}^{-1} \times \\ \times (\alpha_1, \alpha_2) [\mathbf{E}_1 \mathbf{G}_1^+(q_{1l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_1(q_{1l}, \alpha_2)] - \\ - \sum_{l=1}^4 \mathbf{R}_{2l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times [\mathbf{E}_2 \mathbf{G}_2^-(q_{2l}, \alpha_2) + \mathbf{B}_2(q_{2l}, \alpha_2)] + \\ + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^4 C_{lk}(\alpha_2) \mathbf{V}_k^{(l)}(\alpha_1, \alpha_2),$$

где

$$\mathbf{R}_{1l}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = (\alpha_1 - q_{j1})^{-1} \operatorname{Res}_{\eta_1=q_{jl}} \mathbf{R}_l^{-1}(-i\eta_1, -i\alpha_2),$$

и  $q_{jl}(\alpha_2)$  — нули (по переменной  $\alpha_1$ ) функции  $\det \mathbf{R}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)_j$ , лежащие соответственно выше (для  $j = 1$ ) и ниже (для  $j = 2$ ) контура  $\sigma_1$ ,

$$\mathbf{K}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = \pm \left[ \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) - \mathbf{R}_j^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{E}_j \right].$$

Идея метода Винера–Хопфа послужила развитию целого ряда приближенных методов решения практически важных задач. Полученная система также решается методом Винера–Хопфа путем факторизации по параметру  $\alpha_1$  относительно контура  $\sigma_1$

$$\mathbf{G}_j^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{G}_j^*(\alpha_1, \alpha_2) - \\ - \sum_{l=1}^4 [\mathbf{P}_{1l}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_1(q_{1l}, \alpha_2) + \\ + \mathbf{P}_{2l}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{G}_2(q_{2l}, \alpha_2)] + \\ + \sum_{k=1}^4 [C_{1k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{1k}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2) + \\ + C_{2k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{2k}^{\pm}(\alpha_1, \alpha_2)], \quad (2.4)$$

где

$$\mathbf{G}_1^*(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+ \left\{ \tilde{\mathbf{B}} \right\}^+,$$

$$\mathbf{G}_2^*(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1} \left\{ \tilde{\mathbf{B}} \right\}^-,$$

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{K}}(\alpha_1, \alpha_2) &= -\mathbf{K}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{K}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \\ &\equiv \tilde{\mathbf{K}}_+(\alpha_1, \alpha_2) \tilde{\mathbf{K}}_-(\alpha_1, \alpha_2),\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{B}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{G}_{nk}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+(\alpha_1, \alpha_2) \{\mathbf{N}_{nk}\}^+,$$

$$\mathbf{G}_{nk}^-(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \{\mathbf{N}_{nk}\}^-,$$

$$\mathbf{N}_{nk}(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1} \mathbf{K}_1^{-1} \mathbf{V}_k^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$\mathbf{P}_{nk}^+(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_+ \{\mathbf{M}_{nk}\}^+,$$

$$\mathbf{P}_{nk}^-(\alpha_1, \alpha_2) = \tilde{\mathbf{K}}_-^{-1} \{\mathbf{M}_{nk}\}^-,$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{nk}(\alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= \tilde{\mathbf{K}}_+^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{K}_1^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{R}_{nk}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{E}_n,\end{aligned}$$

$$n = 1, 2, \quad k = \overline{1, 4}.$$

Здесь, как и ранее, верхний знак этажного символа « $\pm$ » соответствует значению  $n = 1$ , нижний —  $n = 2$ .

Полученные в результате выражения для  $\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$  содержат неизвестные значения вектор-функций  $\mathbf{G}_1^+(q_{1l}, \alpha_2)$ ,  $\mathbf{G}_2^-(q_{2l}, \alpha_2)$ , нуждающиеся в дополнительном определении. Для этого в выражение для  $\mathbf{G}_1^+(\alpha_1, \alpha_2)$  последовательно подставляются вместо  $\alpha_1$  значения  $q_{1l}$ , а в выражение для  $\mathbf{G}_2^-(\alpha_1, \alpha_2) - q_{2l}$  ( $l = \overline{1, 4}$ ) [13]. Таким образом, получается система уравнений относительно неизвестных  $\mathbf{G}_j(q_{jl}(\alpha_1), \alpha_2)$ , разрешив которую, следует подставить  $\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2)$  в выражения для Фурье-образов амплитуд перемещений (2.3). Последние будут содержать в качестве неизвестных только  $C_{jk}(\alpha_2)$ ,  $j = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, 4}$ , которые определяются из граничных условий в области стыковки пластин. Для этого к выражениям (2.3) необходимо применить обратное преобразование Фурье  $V^{-1}(x_1)$  по параметру  $\alpha_1$ . Затем к граничным условиям (1.5) применяется преобразование Фурье по переменной  $x_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_1(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_1(0, \alpha_2) + \\ + \mathbf{L}_2(\partial x_1, -i\alpha_2) \bar{\mathbf{u}}_2(0, \alpha_2) = \mathbf{F}(\alpha_2),\end{aligned}\quad (2.5)$$

где  $\mathbf{F}(\alpha_2) = \mathbf{V}(\alpha_2) \mathbf{f}(x_2)$ . После этого в (2.5) необходимо подставить  $V^{-1}(x_1) \mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2)$  и решить полученную линейную алгебраическую систему относительно неизвестных  $C_{jk}(\alpha_2)$  ( $j = 1, 2$ ,  $k = \overline{1, 4}$ ).

Значения амплитуд смещений поверхности системы покрытие/подложка находятся

путем применения обратного преобразования Фурье  $V^{-1}(x_2)$  по параметру  $\alpha_2$  к  $\bar{\mathbf{u}}_1(x_1, \alpha_2)$  для  $x_1 > 0$  и к  $\bar{\mathbf{u}}_2(x_1, \alpha_2)$  — при  $x_1 < 0$ ,

$$\mathbf{u}_j(x_1, x_2) = V^{-1}(x_2) \bar{\mathbf{u}}_j(x_1, \alpha_2),$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R.$$

**2.2.** Следуя описанному алгоритму построения решения для задачи об установившихся колебаниях системы покрытие/подложка, можно построить систему функциональных уравнений Винера–Хопфа относительно Фурье-образов контактных напряжений  $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_1^+$  и  $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2) \equiv \mathbf{G}_2^-$  для случая статической задачи. В статическом случае система имеет вид

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_j^\pm(\alpha_1, \alpha_2) &= \mathbf{G}_j^*(\alpha_1, \alpha_2) - \\ &- \mathbf{P}_{11}^\pm \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \mathbf{P}_{21}^\pm \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \\ &- \mathbf{P}_{12}^\pm \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \mathbf{P}_{22}^\pm \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \\ &+ \sum_{k=1}^2 [C_{1k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{1k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2) + \\ &+ C_{2k}(\alpha_2) \mathbf{G}_{2k}^\pm(\alpha_1, \alpha_2)],\end{aligned}\quad (2.6)$$

$$j = 1, 2,$$

где  $\mathbf{G}_j^*$ ,  $\mathbf{P}_{jk}^\pm$ ,  $\mathbf{G}_{jk}^\pm$  зависят от данных задачи и параметров  $\alpha_1, \alpha_2$ ,  $k = 1, 2$ .

Однако в отличие от случая установившегося процесса, вместе с неизвестными  $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$  в полученную систему входят неизвестные значения производных  $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2) = d\mathbf{G}_j/d\alpha_1|_{\alpha_1=\pm i\lambda}$ , где  $\pm i\lambda$  — двукратные нули  $\det \mathbf{R}_0(-i\alpha_1, -i\alpha_2)_j$ ,  $\lambda = |\alpha_2|$ . Поэтому в статическом случае для определения  $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$  и  $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$ ,  $j = 1, 2$ , необходимо дополнительно построить функциональные соотношения путем дифференцирования полученных выражений для  $\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2)$  (2.6). Дополнительные соотношения для производных имеют вид

$$\begin{aligned}\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= \frac{d\mathbf{G}_j^*(\alpha_1, \alpha_2)}{d\alpha_1} - \frac{d\mathbf{P}_{11}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}_1(i\lambda, \alpha_2) - \\ &- \frac{d\mathbf{P}_{21}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}_2(-i\lambda, \alpha_2) - \frac{d\mathbf{P}_{12}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(i\lambda, \alpha_2) - \\ &- \frac{d\mathbf{P}_{22}^\pm}{d\alpha_1} \mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(-i\lambda, \alpha_2) + \sum_{j,k=1}^2 C_{jk}(\alpha_2) \frac{d\mathbf{G}_{jk}^\pm}{d\alpha_1}.\end{aligned}$$

После подстановки в выражения для  $\mathbf{G}_1(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{G}'_{1,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2)$  вместо  $\alpha_1$  значения  $i\lambda$ , а в выражения для  $\mathbf{G}_2(\alpha_1, \alpha_2)$  и  $\mathbf{G}'_{2,\alpha_1}(\alpha_1, \alpha_2) - i\lambda$  приходим к замкнутой системе, позволяющей определить  $\mathbf{G}_j(\pm i\lambda, \alpha_2)$ ,  $\mathbf{G}'_{j,\alpha_1}(\pm i\lambda, \alpha_2)$ . Последние в свою очередь могут быть подставлены в выражения (2.6) для Фурье-образов контактных напряжений между покрытием и подложкой. Далее схема решения совпадает с описанной выше для установившихся колебаний пластин.

Основные сложности при решении рассмотренных задач вызваны необходимостью факторизации матриц. Для приближенной факторизации могут быть использованы методы, описанные в работе [7].

**2.3.** Следует отметить, что стремление частоты колебаний к нулю для случая гармонических воздействий приводит к усложнению вычислений при расчете параметров решения граничных задач, приводящему к накоплению ошибки, что связано с присутствием в ряде соотношений параметров, полученных в результате вычисления вычетов в однократных полюсах. При стремлении частоты к нулю эти члены резко возрастают в связи с наличием в них неопределенности, просто разрешить которую не удастся. Далее предложен подход, позволяющий преодолеть эту сложность и построить разложение граничной задачи для малых частот.

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях двух полуограниченных пластин на деформируемой подложке для малых частот. Уравнения, описывающие колебания пластин, имеют вид (1.2), где  $\mathbf{u}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{u}_j(x_1, x_2, \omega)$  и  $\mathbf{g}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{g}_j(x_1, x_2, \omega)$  — векторы амплитуд перемещений и контактных напряжений, действующих на нижнюю границу пластины с номером  $j$  ( $j = 1, 2$ ) со стороны упругой подложки;  $\mathbf{t}_j(x_1, x_2) \equiv \mathbf{t}_j(x_1, x_2, \omega)$  — вертикальная нагрузка, действующая сверху на  $j$ -ю пластину.

В уравнениях (1.2) присутствуют члены, зависящие от  $\omega^2$ . В уравнения Ляме (1.1) для установившихся колебаний, из которых выводятся соотношения между напряжениями и перемещениями на поверхности упругой подложки (1.3), также входят содержащие  $\omega^2$  в качестве множителя слагаемые.

При построении приближенного решения для малых значений частоты  $\omega$  неизвестные амплитуды перемещений и напряжений разложим в ряд по четным степеням  $\omega$ , удержи-

вая в разложении члены второго порядка,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_j(x_1, x_2, \omega) &= \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \\ &+ \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2), \\ \mathbf{g}_j(x_1, x_2, \omega) &= \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) + \\ &+ \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Подставив представления (2.7) в (1.2), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{j0}(\partial x_1, \partial x_2) (\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) - \\ - \omega^2 \rho_j \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) - \\ - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \\ = \mathbf{b}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{b}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R, \quad j = 1, 2.$$

Уравнения Ляме примут вид

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \\ + \mu \Delta (\mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_1(\mathbf{x})\omega^2) + \\ + \rho\omega^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}) + o(\omega^2) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

При этом рассматривается условие идеального контакта на границах между покрытием и подложкой

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \\ = \mathbf{u}_0(x_1, x_2) + \mathbf{u}_1(x_1, x_2)\omega^2, \\ \mathbf{g}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2 + o(\omega^2) = \\ = \mathbf{g}_0(x_1, x_2) + \mathbf{g}_1(x_1, x_2)\omega^2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R.$$

Граничные условия в области стыковки пластин (при  $x_1 = 0$ ,  $-\infty < x_2 < +\infty$ ) задаются соотношениями вида (1.5)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1(\partial x_1, \partial x_2) \times \\ \times (\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) \Big|_{x_1=0+0} + \\ + \mathbf{L}_2(\partial x_1, \partial x_2) \times \\ \times (\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2) + \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2)\omega^2) \Big|_{x_1=0-0} = \\ = \mathbf{f}_0(x_2) + \mathbf{f}_1(x_2)\omega^2 + o(\omega^2). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Сопоставляя составляющие (2.7)–(2.11) при одинаковых степенях  $\omega^2$ , получим серию решаемых последовательно статических задач, первая из которых совпадает с рассмотренной в 2.2.

Уравнения смещений пластин для следующей задачи принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{j0}(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{u}_{j1}(x_1, x_2) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_{j1}(x_1, x_2) = \\ = \mathbf{b}_{j1}(x_1, x_2) + \rho_j \frac{1 - \nu_j^2}{E_j} \mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2), \end{aligned}$$

где  $\mathbf{u}_{j0}(x_1, x_2)$  находится на предыдущем этапе.

Функции влияния (1.3) строятся уже исходя из неоднородных стационарных уравнений Ляме для упругого основания

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + \mu \Delta \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = -\rho \mathbf{u}_0(\mathbf{x}).$$

В силу положительной определенности оператора граничной задачи статической теории упругости в пространстве обобщенных решений Соболева, используя результаты работы [9], можно доказать, что при малых частотах рассматриваемая граничная задача разрешима и метод последовательных приближений для нее сходится. Таким образом, предложенные методы позволяют исследовать задачи для сред с покрытиями как в статическом, так и установившемся режимах, в том числе при малых частотах колебаний.

### 3. Результаты

Описанный подход применен для скалярного случая вертикальных локализованных воздействий. Рассмотрена задача о вертикальных колебаниях системы из двух полуограниченных пластин на упругой подложке под воздействием сосредоточенной гармонической поверхностной нагрузки  $A\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0) e^{-i\omega t}$ . Уравнения для амплитуд перемещений срединных поверхностей пластин (1.2) примут вид

$$\begin{aligned} R_j(\partial x_1, \partial x_2) u_j(x_1, x_2) - E_j g_j(x_1, x_2) = \\ = b_j(x_1, x_2), \quad (3.1) \end{aligned}$$

$$x_1 \in \Omega_j, \quad x_2 \in R.$$

Здесь области

$$\Omega_1 = \{x_1 : 0 < x_1\},$$

$$\Omega_2 = \{x_1 : -x_1 < 0\};$$

$u_j(x_1, x_2) \equiv u_{j3}(x_1, x_2)$  — поперечный изгиб  $j$ -й пластины,  $g_j(x_1, x_2) \equiv g_{j3}(x_1, x_2)$  — вертикальная компонента амплитуды контактного напряжения, действующего на нижнюю

грань пластины с номером  $j$  ( $j = 1, 2$ ) со стороны упругой подложки;

$$\begin{aligned} R_j(\partial x_1, \partial x_2) &\equiv R_{33}^j; \\ b_j(x_1, x_2) &= -\varepsilon_{j5} t_j(x_1, x_2); \\ t_1(x_1, x_2) &= A\delta(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0), \end{aligned}$$

$(x_1^0, x_2^0)$  — координаты поверхностного источника,  $x_1^0 \in \Omega_1$ ,  $A > 0$  — заданная интенсивность нагрузки,  $t_2(x_1, x_2) \equiv 0$ .

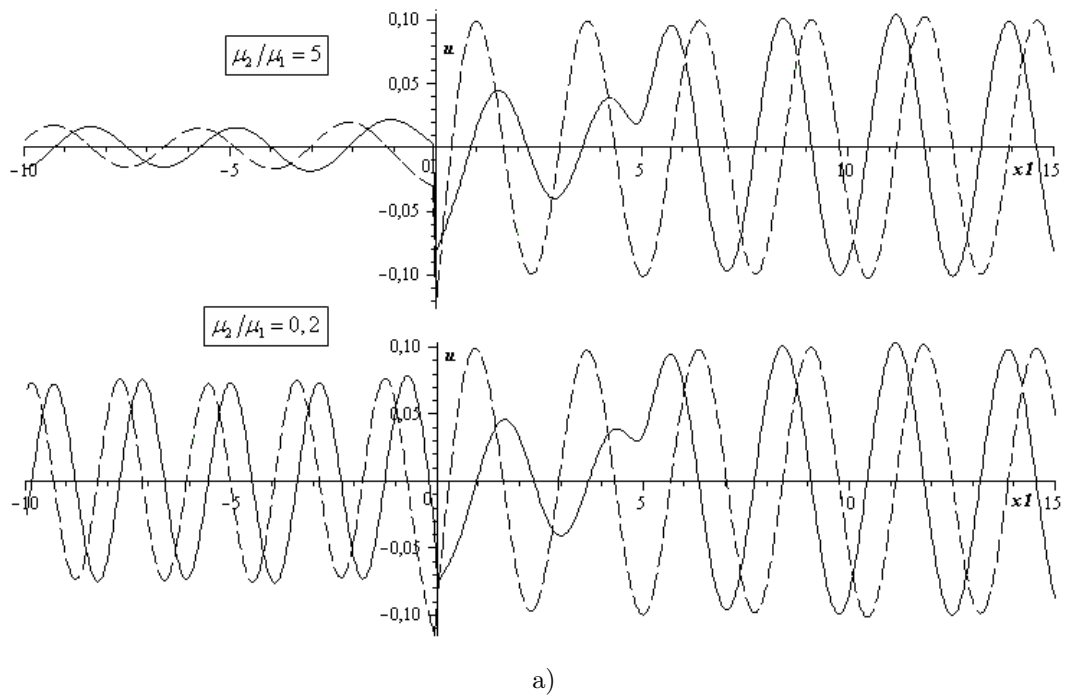
В рассматриваемом случае выражения для трансформант амплитуд вертикальных смещений (2.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} U_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) &= \\ &= \frac{\varepsilon_{j5} G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2) + B_{j3}(\alpha_1, \alpha_2)}{R_{33}^j} + W_j(\alpha_1, \alpha_2), \\ W_j(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{\pm i C_{j1}}{\alpha_1 \pm i q_{j1}} + \frac{\pm i C_{j2}}{\alpha_1 \pm q_{j2}} \mp \\ &\mp \frac{1}{2(q_{j1}^2 + q_{j2}^2)} \varepsilon_{j3} \times \\ &\times \left[ \frac{\varepsilon_{j5} G_{j3}(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{i \varepsilon_{j5} G_{j3}(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} + \right. \\ &\left. + \frac{B_{j3}(\pm q_{j2}, \alpha_2)}{q_{j2}(\alpha_1 \mp q_{j2})} + \frac{i B_{j3}(\pm i q_{j1}, \alpha_2)}{q_{j1}(\alpha_1 \mp i q_{j1})} \right]. \end{aligned}$$

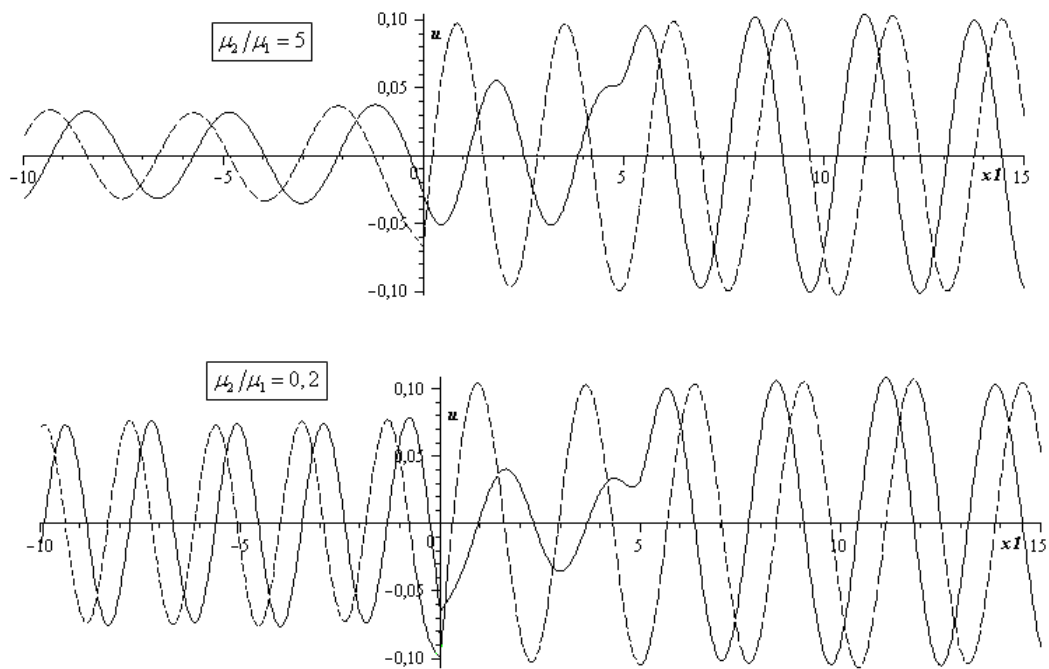
Полученное представление содержит неизвестные  $C_{jk} = C_{jk}(\alpha_2)$ , а также трансформанты контактных напряжений  $G_{j3}(\alpha_1, \alpha_2)$  и их значения в нулях функции  $R_j(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ , определяемые после решения функционального уравнения Винера–Хопфа и удовлетворения граничным условиям на стыке пластин.

Предложенный подход позволяет изучить влияние свойств пластин и основания, а также типа граничных условий в области контакта элементов покрытия на характер прохождения сигнала. Рис. 3–4 иллюстрируют результаты модельных расчетов амплитуд перемещений поверхностей пластин для безразмерных параметров ( $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $\mu_1 = 1$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = 0,125$ ). Алгоритм построения решения задачи реализован для установившегося режима колебаний в случае неизменных свойств системы в направлении оси  $Ox_2$ . Сосредоточенная вертикальная нагрузка задана в точке  $x_1 = 5$ , в качестве основания выбран упругий слой с безразмерными характеристиками:  $\rho = 1,064$ ,  $\mu = 1,579$ ,  $\nu = 0,25$ , — жестко сцепленный с недеформируемым основанием. На графиках представлены вещественная (сплошная линия) и



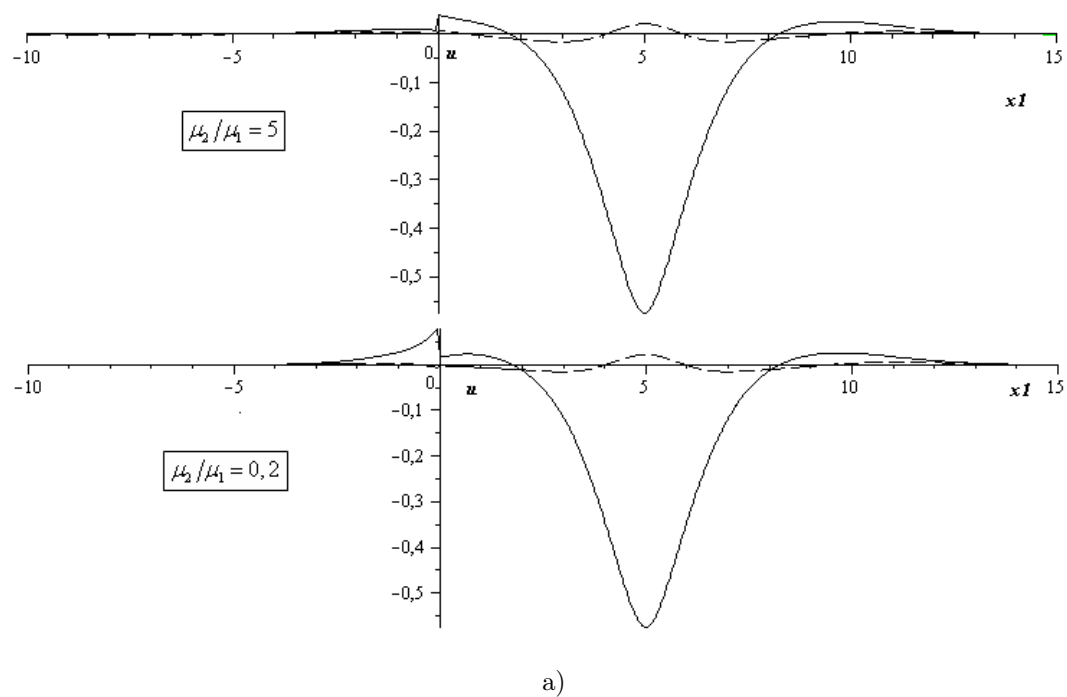


а)

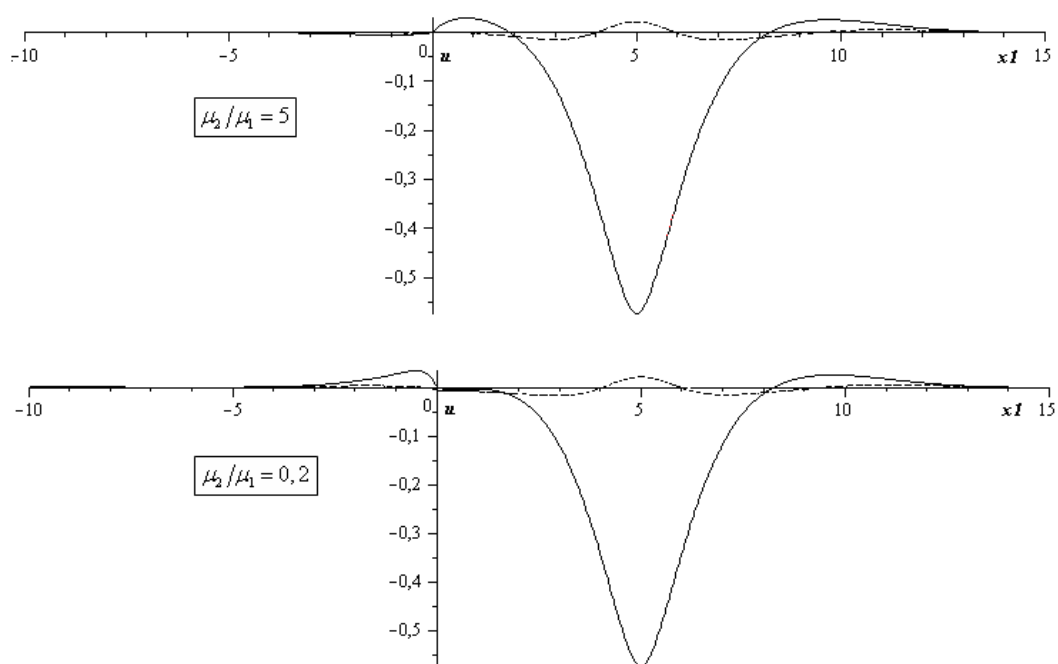


б)

Рис. 3. Вещественные и мнимые части амплитуд перемещений пластин для безразмерной частоты  $\bar{\omega} = 2,5$



а)



б)

Рис. 4. Вещественные и мнимые части амплитуд перемещений пластин для безразмерной частоты  $\bar{\omega} = 0,96$

мнимая (пунктирная линия) части амплитуды смещений поверхности. Рис. За соответствует ситуации, когда края пластин на стыке смещаются свободно ( $D_j \frac{\partial^3 u_j}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = 0$  — поперечные силы, изгибающие моменты —  $D_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0$ ), рис. 3б иллюстрирует комплексные амплитуды смещений при выполнении следующих граничных условий: перемещения и поперечные силы, действующие на края пластин, непрерывны  $u_1|_{x_1=0} = u_2|_{x_1=0}$ ,  $D_1 \frac{\partial^3 u_1}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0} = D_2 \frac{\partial^3 u_2}{\partial x_1^3} \Big|_{x_1=0}$ , изгибающие моменты равны нулю ( $\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} \Big|_{x_1=0} = 0, j = 1, 2$ ).

На рис. 4 представлены графики для тех же граничных условий и соотношений жесткости пластин при  $\bar{\omega} = 0,96$ .

С уменьшением частоты вибрации амплитуды смещений поверхности левой пластины в сравнении с правой уменьшаются и влияние свойств пластин становится менее выраженным.

Представленные результаты модельных расчетов демонстрируют зависимость волновой картины на поверхности системы покрытие/подложка от частоты, вибрации условий стыковки пластин и свойств составляющих покрытия.

### Заключение

Таким образом, в работе алгоритм дифференциального метода факторизации модифицирован применительно к исследованию пространственных динамических и статических задач о контактном взаимодействии пластин, моделирующих литосферные плиты с разломами или дефектные покрытия. Предложен метод исследования краевых задач взаимодействия разнотипных пластин, контактирующих между собой по прямолинейному разлому и взаимодействующих с упругим основанием. Достоинство его состоит в возможности применения для исследования напряженно-деформированного состояния структур с разломами, находящихся под воздействием вибрационных нагрузок, а также в процессе их медленного или статического взаимодействия.

Использование предлагаемого подхода позволит сделать выводы о влиянии типа разлома и физико-механических свойств литосферных структур на характер волнового

процесса в геологической среде, в частности форму сигнала после прохождения через разлом. Так как экспериментальные исследования прохождения сейсмических сигналов через разлом и особенностей взаимодействия литосферных структур в областях их контакта требуют значительных материальных и временных затрат, полученные теоретические результаты позволяют тестировать типы разломов литосферных структур с применением вибростановов, рационально определяя программы экспериментов.

Кроме того, описанный метод может найти приложения в инженерной практике, где использование покрытий, в том числе разнотипных, на рабочих частях элементов конструкций и деталей машин позволяет создать поверхности, обладающие улучшенными эксплуатационными характеристиками. Результаты исследования также могут быть применены для оценки возможности эксплуатации изделий с дефектами.

### Литература

1. Садовский М. А. Естественная кусковатость горной породы // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247, № 4. С. 829–831.
2. Садовский М.А., Красный Л.И. Блоковая тектоника литосферы // Доклады АН СССР. 1986. Т. 287, № 6. С. 1451–1454.
3. Babeshko V. Joint use center for vibroseismic sources // Proc. of 7<sup>th</sup> Framework Programme of the European Community for research, technological development and demonstration activities. URL: [http://rp7.ffg.at/eu-russian\\_opendays](http://rp7.ffg.at/eu-russian_opendays) (дата обращения: 11.07.2015).
4. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410, № 2. С. 168–172.
5. Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Блочные элементы в теории плит сложной формы // Известия РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 92–97.
6. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Топологический метод решения граничных задач и блочные элементы // ДАН. 2013. Т. 449, № 6. С. 657–660.
7. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
8. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
9. Ворович И.И., Бабешко В.А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.

10. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
11. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
13. Телятников И.С. Об одной модели деформационных процессов в геофизических структурах // Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе. 2015. № 1. С. 45–49.
6. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. Topologicheskii metod pesheniya granichnykh zadach i blochnye element [A topological method for solving boundary value problems and block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Academy of Sciences], 2013, vol. 449, no. 6, pp. 657–660. (In Russian)
7. Volmir A.S. *Nelineinaya dinamika platinok i obolochek* [Nonlinear dynamics of plates and shells]. Moscow, Nauka Publ., 1972, 432 p. (In Russian)
8. Vorovich I.I., Aleksandrov V.M., Babeshko V.A. *Neklassicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti* [Non-classical mixed problem of elasticity theory]. Moscow, Nauka Publ., 1974, 455 p. (In Russian)

### References

1. Sadovskiy M.A. Estestvennaya kuskovatost' gornoj porody [Natural lumpiness of rocks]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1979, vol. 247, no. 4, pp. 829–831. (In Russian)
2. Sadovskiy M.A., Krasnyi L.I. Blokovaya tektonika litosfery [Block tectonics of lithosphere]. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1986, vol. 287, no. 6, pp. 1451–1454. (In Russian)
3. Babeshko V. Joint use center for vibroseismic courses. In *Proc. of 7<sup>th</sup> Framework Programme of the European Community for research, technological development and demonstration activities*. URL: [http://rp7.ffg.at/eu-russian\\_opendays](http://rp7.ffg.at/eu-russian_opendays) (date of access: 11.07.2015).
4. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Ob integral'nom i differentsial'nom metodakh faktorizatsii [About integral and differential factorization methods]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 2, pp. 168–172. (In Russian)
5. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. Blochnye element v teorii plit slozhnoi formy [Block elements in the theory of plates of complicated shape]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Proc. of the Russian Academy of Sciences. Rigid Body Mechanics], 2012, no. 5, pp. 92–97. (In Russian)
9. Vorovich I.I., Babeshko V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya kh oblastei* [Dynamic mixed problem of elasticity theory for nonclassical domains]. Moscow, Nauka Publ., 1979, 319 p. (In Russian)
10. Vorovich I.I., Babeshko V.A., Pryakhina O.D. *Dinamika massivnykh tel I rezonansnye yavleniya v deformiruemyykh sredakh* [Dynamics of massive bodies and resonance phenomena in deformable media]. Moscow, Nauchnyy mir Publ., 1999. 246 p. (In Russian)
11. Kalinchuk V.V., Belyankova T.I. *Dinamicheskie kontaktnye zadachi dlya predvaritel'no napryazhennykh elektrouprugikh tel* [Dynamic contact problems for prestressed electroelastic bodies]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2006, 272 p. (In Russian)
12. Goldenveizer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow, Nauka Publ., 1976, 512 p. (In Russian)
13. Telyatnikov I.S. Ob odnoi modeli deformatsionnykh protsessov v geofizicheskikh strukturakh [On one model of deformation processes in geophysical structures]. *Zashchita okruzhayushchey sredy v neftegazovom komplekse* [Environmental protection in oil and gas complex], 2015, no. 1, pp. 45–49. (In Russian)

Статья поступила 18 апреля 2016 г.

© Телятников И. С., 2016