

УДК 530.145

## УРОВНИ ЭНЕРГИИ И ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЭЛЕКТРОННЫХ СОСТОЯНИЙ В НАНОРАЗМЕРНЫХ КВАНТОВЫХ КОЛЬЦАХ

Тумаев Е. Н.

### THE ENERGY LEVELS AND WAVE FUNCTIONS OF SINGLE-ELECTRON STATES IN NANO SIZED QUANTUM RINGS

Tumayev E. N.

Kuban State University, Krasnodar, Russia  
e-mail: tumayev@phys.kubsu.ru

*Abstract.* The electronic states of nanoscale quantum rings containing one electron are studied. Compiled by the Schrodinger equation in the two-dimensional space, for a electron system in the external potential field, describing nanoscale quantum ring heterolayer semiconductor structure. As a potential describing quantum ring are considered potential Volcano and Hill. For the Hill potential the exact solutions of the two-dimensional Schrödinger equation, the study of which is usually carried out by numerical methods, are obtained.

A model potential (potential of the “6-2”), describes a unified way as a quantum ring, and a quantum dot in the presence of an external homogeneous constant magnetic field. Analytical methods to obtain new exact solutions of the Schrödinger equation in the class of Heun’s functions for the potential “6-2” and the capacity of the Hill. It is shown that the solution of the Schrödinger equation for a single electron in the potential of the “6-2” are expressed in elementary functions only in the case of certain relations between the parameters of the potential well, in other cases they are expressed in terms of Heun’s functions. Found energy levels and electron wave functions in the ground state, and some low-lying states for the potential “6-2” for small values of the orbital angular momentum for the values of the parameters of the potential, when the solution of the Schrödinger equation is expressed in terms of elementary functions. A variational method for studying electron states for arbitrary values of the potential parameters, using the results as a starting solution. It is shown that this method allows to obtain the energy levels and wave functions of the ground state of an electron with sufficient accuracy for practical applications.

*Keywords:* quantum rings, Hill potential, model potential, Schrödinger equation, Heun’s functions.

### Введение

С конца прошлого века, благодаря развитию технологий создания микроскопических систем, стали активно исследоваться различные полупроводниковые нанообъекты, представляющие собой низкоразмерные системы (НС). К таким объектам относятся, в частности, квантовые точки, проволоки, кольца. Характерные размеры этих систем составляют величину порядка 10 нм – 10 мкм. Такие системы, удерживающие в себе от одного до нескольких тысяч электронов, находят практическое применение. Имеются сообщения о создании на их основе солнечных элементов нового поколения, лазеров. Квантовые кольца

нашли применение при создании высокочувствительных детекторов теплового излучения, датчиков, предназначенных для регистрации магнитных полей и т.п. Наряду с практическим применением, указанные системы дают уникальную возможность исследования физических явлений в пространствах пониженной размерности. К числу таких явлений относятся незатухающие токи, вигнеровская кристаллизация электронов, эффект Ааронова–Бома [1] и другие. Способы создания наноразмерных колец описаны в [2, 3].

Целью работы является нахождение волновых функций и энергетических уровней электронов в таких низкоразмерных системах, как квантовые кольца. Как правило,

Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumayev@phys.kubsu.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и Министерства образования и науки Краснодарского края (13-01-96525).

такие задачи решаются численно, поэтому представляет интерес нахождение точных решений указанной задачи, которые могут быть использованы как опорные для проведения численных исследований.

### 1. Модельные потенциалы для квантовых колец и квантовых точек

Теоретическое исследование электронных состояний квантовых колец начинается с выбора потенциала, описывающего кольцо. Поскольку точный потенциал кольца неизвестен, то для теоретических исследований выбирают подходящие модельные потенциалы. В настоящее время для описания двумерных квантовых колец чаще всего используются модели Волкано и Хилла. Модель Волкано [4] базируется на потенциале вида

$$U_V(r) = \frac{a_1}{r^2} + a_2 r^2 - U_0, \quad (1.1)$$

где  $r$  — радиус полярной системы координат,  $a_1, a_2$  — положительные константы, величина  $U_0$  выбирается так, чтобы минимальное значение потенциала (1.1) было равно нулю.

Модель Хилла [5] использует потенциал следующего вида:

$$U_H(r) = \frac{\mu\omega_0^2(r-r_0)^2}{2}, \quad (1.2)$$

где  $r_0$  — эффективный радиус кольца,  $\omega_0$  — эффективная частота удерживающего потенциала.  $\mu$  — эффективная масса электрона. При  $r_0 = 0$  потенциал Хилла (1.2) переходит в потенциал квантовой точки с параболическим удерживающим потенциалом.

В работе [4] проведено подробное исследование одноэлектронных состояний в кольце Волкано. Аналогичное исследование для кольца Хилла, изложенное в работах [5, 6], проведено неполно. В связи с этим в настоящей статье будет проведено теоретическое и численное исследование одноэлектронных состояний для кольца Хилла. Такое исследование представляет несомненный интерес, поскольку приводит к новому классу задач математической физики, для решения которых необходимо использовать сравнительно малоизученный класс специальных функций — функции Гойна [7–9]. Наряду с моделью Хилла в статье предлагается альтернативная модель, также требующая использование функций Гойна.

Для нахождения уровней энергии и волновых функций электрона в потенциальном

поле  $U(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, запишем уравнение Шредингера

$$\frac{1}{2\mu} \left( -i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}) \right)^2 \psi(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}), \quad (1.3)$$

где  $\mu$  — эффективная масса электрона,  $\hbar$  — постоянная Планка,  $-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — оператор импульса, содержащий добавку, включающую вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  внешнего магнитного поля,  $e$  — заряд электрона,  $c$  — скорость света,  $\psi(\mathbf{r})$  — волновая функция электрона,  $E$  — его энергия,  $U(\mathbf{r})$  — внешний удерживающий потенциал, формирующий квантовое кольцо.

Внешнее магнитное поле считаем однородным, постоянным и направленным перпендикулярно плоскости кольца, так как в силу двумерного характера рассматриваемой низкоразмерной системы, составляющая магнитного поля, лежащая в плоскости кольца, не оказывает влияния на движение электронов. Следовательно, индукция внешнего поля равна  $\mathbf{B} = \{0, 0, B\}$ , а его вектор-потенциал  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  имеет компоненты

$$A_x = -\frac{1}{2}By, \quad A_y = \frac{1}{2}Bx, \quad A_z = 0,$$

где  $(x, y)$  — декартовы координаты радиус-вектора  $\mathbf{r}$ . В качестве удерживающего потенциала  $U(\mathbf{r})$  используем потенциал Хилла (1.2). Поскольку этот потенциал инвариантен относительно поворотов системы координат в плоскости  $(x, y)$ , для нахождения решений уравнения (1.3) удобно использовать полярные координаты  $(r, \varphi)$ . Тогда в единицах Хартри  $\hbar = \mu = e = 1$  уравнение (1.3) будет выглядеть следующим образом

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\omega_0^2}{2}(r-r_0)^2\psi - i\frac{\omega_B}{2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \frac{\omega_B^2}{8}r^2\psi = E\psi, \quad (1.4)$$

где  $\omega_B$  — циклотронная частота, которая в обычных единицах равна  $eB/\mu c$ .

Решение уравнения (1.3), вследствие отмеченной выше инвариантности изучаемой системы относительно поворотов системы координат в плоскости кольца, ищем в виде

$$\psi(r, \varphi) = R(r) \exp(im\varphi), \quad (1.5)$$

где  $m$  — целое число, имеющее смысл величины орбитального момента количества движения электрона  $l_z = \hbar m$ , выраженного через постоянную Планка, и  $R(r)$  — подлежащая определению радиальная часть волновой функции.

Уравнение Шредингера (1.4) после подстановки (1.5) примет следующую форму

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2} R \right) + \frac{\Omega^2}{2} r^2 R - \omega_0^2 r_0 r R + \frac{\omega_0^2 r_0^2}{2} R = \tilde{E} R. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\tilde{E} = E - \frac{m\omega_B}{2}, \quad (1.7)$$

$$\Omega^2 = \omega_0^2 + \frac{\omega_B^2}{4}, \quad (1.8)$$

Заменой

$$R(r) = r^{|m|} \exp \left( -\frac{\Omega r^2}{2} + \frac{\omega_0^2 r_0 r}{\Omega} \right) w(r) \quad (1.9)$$

уравнение (1.6) приводится к виду

$$r \frac{d^2 w}{dr^2} + \left( 1 + 2|m| + \frac{2\omega_0^2 r_0}{\Omega} r - 2\Omega r^2 \right) \frac{dw}{dr} + \left( 2\beta r + \frac{\omega_0^2 r_0 (1 + 2|m|)}{\Omega} \right) w = 0, \quad (1.10)$$

где величина  $\beta$  равна

$$\beta = \tilde{E} - \Omega (1 + |m|) + \frac{\omega_0^4 r_0^2}{2\Omega^2} - \frac{\omega_0^2 r_0^2}{2}. \quad (1.11)$$

Уравнение (1.10) относится к классу биконфлюэнтных уравнений Гойна [7, 8].

Согласно общим принципам квантовой механики, волновая функция должна быть всюду ограниченной и непрерывной, ее первая производная также всюду непрерывна [10]. Это позволяет искать решение уравнения (1.10) в виде степенного ряда

$$w(r) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k r^k. \quad (1.12)$$

Потенциал Хилла стремится к бесконечности при  $r \rightarrow \infty$ , поэтому электрон, находящийся в поле такого потенциала, будет совершать финитное движение при любой энергии, поэтому исходная волновая функция  $\psi(\mathbf{r})$  на

бесконечности должна стремиться к нулю настолько быстро, чтобы выполнялось условие ее нормировки на единицу

$$\int |\psi(\mathbf{r})|^2 dS = 1,$$

где  $dS$  — элемент площади, равный в полярных координатах  $r dr d\varphi$ . Следовательно, функция  $R(\mathbf{r})$  также должна быть всюду ограниченной и удовлетворять условию

$$\int_0^{\infty} R^2(r) r dr < \infty, \quad (1.13)$$

вследствие чего при  $r \rightarrow \infty$  функция  $w(r)$  должна расти медленнее, чем  $\exp\left(\frac{\Omega}{2} r^2\right)$ , что возможно не при всех значениях энергии  $E$ , вследствие чего допустимые значения энергии образуют дискретный набор.

Особенностью уравнения (1.10) и аналогичных уравнений, решение которых выражается через функции Гойна, является то, что рекуррентное соотношение, связывающее коэффициенты  $A_n$ , содержит три подряд идущих коэффициента, в то время как решения уравнения Шредингера, выражающиеся через функции гипергеометрического типа [10], приводят к рекуррентным соотношениям, содержащим два подряд идущих коэффициента  $A_n$ . Следовательно, решения уравнения (1.10) и аналогичных уравнений для других систем можно разделить на два класса.

К решениям первого класса отнесем те, для которых ряд (1.12) содержит конечное число слагаемых. В этом случае условие (1.13) выполняется автоматически, а решение уравнения (1.10) выражается через элементарные функции. Решения этого класса имеют место только при определенных значениях еще одного параметра системы — циклотронной частоты  $\omega_B$ , частотного параметра  $\omega_0$  либо другого параметра. Ниже эти решения будут построены в явном виде.

К решениям второго класса относятся такие, для которых ряд (1.12) содержит бесконечное число членов. Их появление связано с тем, что значения перечисленных выше параметров системы определяются внешними условиями, поэтому могут принимать любые значения. В этом случае решения уравнения (1.10) имеют вид бесконечного ряда (1.12) и их исследование может быть проведено либо численными, либо приближенными аналитическими методами. Решения этого класса

будут исследованы ниже при помощи вариационного метода, при этом решения первого класса будут использоваться как опорные.

Находим решение уравнения (1.10) в виде ряда (1.12), приравнивая к нулю сумму коэффициентов при одинаковых степенях  $r$ . Указанная процедура приводит к следующим рекуррентным соотношениям:

$$A_1 = -\frac{\omega_0^2 r_0}{\Omega} A_0, \quad (1.14)$$

$$A_{k+1} = c_{k-1} A_{k-1} + d_k A_k, \quad (1.15)$$

где

$$c_{k-1} = \frac{2[\Omega(k-1) - \beta]}{(k+1)(k+2|m|+1)}, \quad (1.16)$$

$$d_k = -\frac{\omega_0^2 r_0 (1+2|m|+2k)}{\Omega(k+1)(k+2|m|+1)}. \quad (1.17)$$

Для получения полиномиального решения уравнения (1.10), ряд (1.12) необходимо обрывать на  $n$ -ом члене. При этом необходимо, чтобы два последующих члена (1.16), (1.17) одновременно обращались в ноль. В частности, чтобы оборвать ряд на первом члене, нужно выполнение равенств  $A_2 = 0$  и  $A_3 = 0$ . Данная ситуация возможна если

$$\Omega = \sqrt[3]{\frac{\omega_0^4 r_0^2 (3+2|m|)}{2}} \quad (1.18)$$

$$\beta = \Omega. \quad (1.19)$$

Значения энергии и волновая функция состояния, для которых выполняются соотношения (1.18) и (1.19), имеют вид

$$E = \Omega(|m|+2) + \frac{\omega_0^2 r_0^2}{2} - \frac{\omega_0^4 r_0^2}{2\Omega^2} - \frac{m\omega_B}{2}, \quad (1.20)$$

$$\psi_m(r, \varphi) = A_0 r^{|m|} \left(1 - \frac{\omega_0^2 r_0 r}{\Omega}\right) \times \exp\left(-\frac{\Omega r^2}{2} + \frac{\omega_0^2 r_0 r}{\Omega} - im\varphi\right), \quad (1.21)$$

где гибридная частота  $\Omega$  дается формулой (1.8).

Волновая функция (1.21) обращается в нуль при  $\omega_0^2 r_0 r / \Omega = 1$ , следовательно, в силу осцилляционной теоремы [11], формулы (1.20)–(1.21) описывают первое возбуждённое состояние. Для основного состояния в данной задаче точные решения в аналитической

форме найти не удаётся [12]. Невозможность нахождения волновой функции и величины энергии основного состояния является недостатком модели Хилла, в связи с чем ниже предлагается альтернативная модель двумерного квантового кольца (модель «6-2»), для которой удастся получить более полные результаты.

## 2. Альтернативная модель кольца

Немалый интерес представляет исследование потенциальных ям, отличных от вышеизложенных. В качестве альтернативы моделям Хилла и Волкано для квантового кольца предлагается потенциал следующего вида (потенциал «6-2»)

$$U(r) = \frac{b^2}{8} r^6 - \frac{ar^2}{2} + U_0, \quad (2.1)$$

где  $a > 0$ , и параметр  $U_0$  выбирается так, чтобы потенциальная энергия (2.1) была всюду неотрицательной. Потенциал (2.1) имеет минимум при  $r_0 = (4a/3b^2)^{1/4}$ , тогда условие неотрицательности приводит к следующему значению постоянной составляющей потенциала  $U_0 = (4a^3/27b^2)^{1/2}$ . Преимущество потенциала (2.1) состоит в том, что при  $a \leq 0$  или при  $a > 0$  в присутствии внешнего магнитного поля достаточной величины потенциал  $U(r)$  моделирует квантовую точку. Таким образом, низкоразмерная система, описываемая потенциалом (2.1), может описывать как квантовое кольцо, так и квантовую точку.

При решении уравнения Шредингера положим, как и выше,  $\hbar = \mu = e = 1$ . Уравнение Шредингера для электрона в потенциале «2-6» при наличии однородного магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости кольца, имеет вид (1.15) с потенциалом (2.1). Поскольку потенциал (2.1) инвариантен по отношению к поворотам, волновую функцию следует выбрать в форме (1.5). Тогда уравнение Шредингера принимает следующий вид:

$$-\frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} R \right) + \left( \frac{b^2}{8} r^6 - \frac{ar^2}{2} \right) R = \tilde{E} R, \quad (2.2)$$

где

$$\tilde{E} = E - U_0 - \frac{m\omega_B}{2}$$

и при наличии магнитного поля коэффициент  $a$  имеет добавку  $-2x = -\omega_B^2/4$ . Заменой

$$\xi = r^2, \quad R(\xi) = \xi^{|m|/2} \exp(-b\xi^2/8) w(\xi)$$

уравнение (2.2) приводится к виду

$$\xi \frac{d^2 w}{d\xi^2} + \left( |m| + 1 - \frac{b}{2} \xi^2 \right) \frac{dw}{d\xi} + \beta \xi w + \varepsilon w = 0, \quad (2.3)$$

где

$$\beta = \frac{a}{4} - \frac{b}{2} - \frac{b|m|}{4}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{E}}{2}. \quad (2.4)$$

Аналогично (1.10), уравнение (2.3) относится к типу Гойна. Его решение, выражающееся через элементарные функции, возможно только при определенных соотношениях между  $a$  и  $b$ . Для их нахождения ищем решение (2.3) в виде степенного ряда

$$w(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k. \quad (2.5)$$

Подставив ряд (2.4) в (2.3) и приравняв сумму коэффициентов при одинаковых степенях  $\xi$  к нулю, получим рекуррентные соотношения для коэффициентов

$$A_1 = -\frac{\varepsilon}{1+|m|} A_0, \\ A_{k+2} = \frac{\left(\frac{bk}{2} - \beta\right) A_k - \varepsilon A_{k+1}}{(k+2)(k+|m|+2)}. \quad (2.6)$$

Выясним асимптотическое поведение решений уравнения (2.3) при  $\xi \rightarrow \infty$ . В этом случае вид уравнения (2.6) упрощается

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} + -\frac{b}{2} \xi \frac{dw}{d\xi} = 0,$$

и его решение имеет вид

$$w(\xi) \sim \exp\left(-\frac{b}{4} \xi^2\right).$$

Такое асимптотическое поведение решения уравнения (2.3) находится в противоречии с условием (1.13), имеющим место и для предлагаемой модели. Следовательно, физическим смыслом обладают полиномиальные

решения уравнения (2.3), которые соответствуют обращению в нуль двух подряд идущих коэффициентов  $A_k$ . Условия  $A_{k+1} = 0$ ,  $A_{k+2} = 0$  позволяют определить энергию  $k$ -го возбужденного состояния и соотношение между коэффициентами  $a$  и  $b$  потенциальной ямы, при которых существует полиномиальное решение уравнения (2.3). Для произвольного  $k$  это соотношение имеет вид  $\beta = bk/2$ , где  $\beta$  дается формулой (2.4). Результаты расчета уровней энергии и волновых функций при  $m = 0$  и малых  $k$  приведены в табл. 1. Постоянный множитель  $A_0$  в волновых функциях вычисляется с помощью приведенного выше условия нормировки.

Такой же ряд решений можно получить и для других значений квантового числа  $m$ . Волновые функции и уровни энергии для основного состояния при  $m = 1$  и 2 ввиду громоздкости в настоящей статье не приводятся.

Таким образом, существуют ключевые значения параметра  $a = 2b(k+1) + b|m|$ , при которых имеют место решения уравнения Шредингера для двумерного потенциала «6-2» в классе элементарных функций. В промежутках между этими значениями такие решения отсутствуют, поэтому для них ниже приводится вариационный метод [10], использующий решения уравнения (2.3) при  $a = 2b(k+1) + b|m|$  как опорные.

Возбужденные состояния в табл. 1 приведены без их классификации, так как этот вопрос остается открытым. Критерием различия между основным и возбужденными состояниями является, в согласии с осцилляционной теоремой, наличие нулей у волновой функции. Некоторые другие точные решения приведены в монографии [12].

Проиллюстрируем, определение энергии основного состояния при  $m = 0$  и  $a = 2b - 2x$ . Согласно таблице, опорным решением в этом случае является решение при  $k = 0$ , вследствие чего в качестве пробной волновой функции выбираем  $\psi(r) = A_0 \exp(-Zr^4/8)$ , где  $Z$  — варьируемый параметр, а множитель  $A_0$  определяется из приведенного выше условия нормировки волновой функции. Величина энергии определяется из условия минимума выражения

$$\langle H(Z) \rangle = \frac{\int \psi^* H \psi dS}{\int \psi^* \psi dS},$$

Таблица 1. Волновые функции  $\psi_{mk}$  и уровни энергии  $\varepsilon_{mk}$  некоторых состояний частицы в поле потенциала (2.1) при  $m = 0$ 

| $k$ | Энергия $\varepsilon_{km}$                                                                                                          | Связь между параметрами     | Волновая функция $\psi_{mk}(r)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 0   | $\varepsilon_{00} = 0$                                                                                                              | $\beta = 0,$<br>$a = 2b$    | $\psi_{00}(r) = A_0 \exp(-br^4/8),$<br>основное состояние                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 1   | $\varepsilon_{01} = \sqrt{b/2}$                                                                                                     | $\beta = b/2,$<br>$a = 4b$  | $\psi_{01}(r) = A_0 \exp(-br^4/8) (1 - \sqrt{b/2}r^2),$<br>возбужденное состояние                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 2   | $\varepsilon_{02}^{(1)} = 0, \varepsilon_{02}^{(2)} = \sqrt{3b}$                                                                    | $\beta = b,$<br>$a = 6b$    | $\psi_{02}^{(1)}(r) = A_0 \exp(-br^4/8) (1 - br^4/4),$<br>$\psi_{02}^{(2)}(r) = A_0 \exp(-br^4/8) (1 - \sqrt{3b}r^2 + br^4/2),$<br>возбужденные состояния                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 3   | $\varepsilon_{03}^{(1)} = \frac{1}{2}\sqrt{(20 - 2\sqrt{73})b},$<br>$\varepsilon_{03}^{(2)} = \frac{1}{2}\sqrt{(20 + 2\sqrt{73})b}$ | $\beta = 3b/2,$<br>$a = 8b$ | $\psi_{03}^{(n)}(r) = A_0 \exp(-br^4/8) \times$<br>$\times (1 + a_1^{(n)}r^2 + a_2^{(n)}r^4 + a_3^{(n)}r^6), n = 1, 2,$<br>$a_1^{(1)} = -\sqrt{b(10 - \sqrt{73})/2}, a_2^{(1)} = -b(\sqrt{73} - 7)/8,$<br>$a_3^{(1)} = b^{3/2}(1 + \sqrt{73})\sqrt{20 - 2\sqrt{73}},$<br>$a_1^{(2)} = -\sqrt{b(10 + \sqrt{73})/2}, a_2^{(2)} = -b(\sqrt{73} + 7)/8,$<br>$a_3^{(2)} = b^{3/2}(\sqrt{73} - 1)\sqrt{20 + 2\sqrt{73}},$<br>возбужденные состояния |

где  $dS = r dr d\varphi$  и оператор Гамильтона  $H$  для  $s$ -состояний ( $m = 0$ ) имеет вид

$$H = -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) + \frac{b^2}{8} r^6 - (b - x) r^2.$$

Проводя вычисления, получаем

$$\langle H(Z) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\pi}} \frac{(Z - b)^2 + 2xZ}{Z^{5/4}}. \quad (2.7)$$

Энергия основного состояния при  $x \neq 0$  равна минимальному значению выражения (2.7), достигающему при

$$Z = \frac{1}{3} \left( \sqrt{(b - x)^2 + 15b^2} - (b - x) \right),$$

и равно

$$\begin{aligned} \tilde{E} = & \sqrt{\frac{8}{9\pi\sqrt{3}}} \left( 4b^2 - 2bx + x^2 - \right. \\ & \left. - (b - \sqrt{3}x) \sqrt{(b - x)^2 + 15b^2} \right) \times \\ & \times \left( \sqrt{(b - x)^2 + 15b^2} - (b - x) \right)^{-5/4}. \end{aligned}$$

При  $x = 0$  варьируемый параметр  $Z$  становится равным  $b$  и энергия  $\tilde{E}$  обращается в нуль в согласии с ее значением, приведенным

в табл. 1. Графики зависимости параметра  $Z$  и энергии  $\tilde{E}$  от параметра  $x$  при  $b = 1$  приведены на рис. 1 и 2.

Результаты, приведенные в табл. 1, могут быть использованы для нахождения уровней энергии и волновых функций при  $m \neq 0$ . В качестве примера рассмотрим случай, когда  $a = 6b - 2x$ . Опорное решение в этом случае соответствует значению  $k = 2$ , потенциал  $U(r)$  равен

$$U(r) = \frac{b^2}{8} r^6 - (3b - x) r^2 + U_0. \quad (2.8)$$

В согласии с вышеприведенными расчетами, пробную волновую функцию следует выбрать в виде

$$\begin{aligned} \psi_{0m}(r, \varphi) = \\ = A_0 r^{|m|} \exp \left( -\frac{Zr^4}{8} - im\varphi \right). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Гамильтониан системы после замены  $\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \rightarrow -m^2$  имеет вид

$$\begin{aligned} H = & -\frac{1}{2} \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{m^2}{r^2} \right) + \frac{b^2}{8} r^6 - \\ & - (3b - x) r^2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Повторяя процедуру минимизации среднего значения гамильтониана и, полагая значение

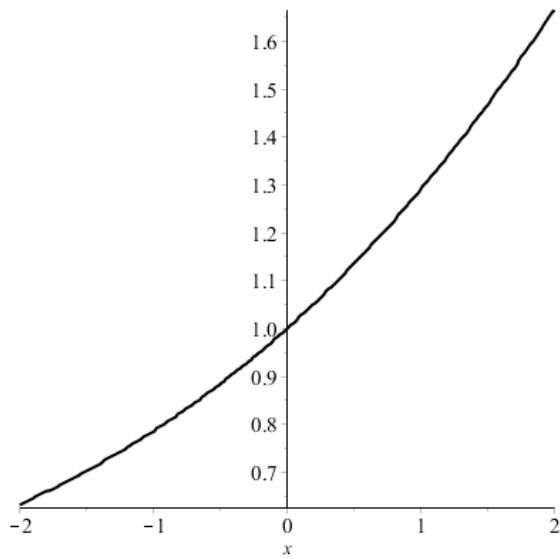


Рис. 1. Зависимость параметра  $Z$  от величины  $x = \omega_B^2/8$  при  $a = b$  и  $m = 0$

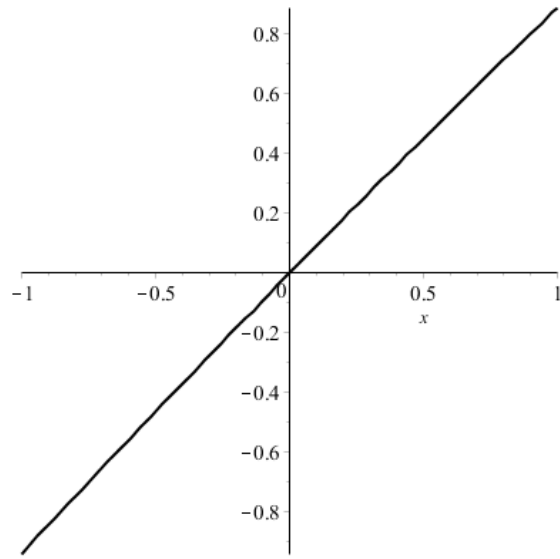


Рис. 2. Зависимость энергии основного состояния  $\tilde{E}$  от величины  $x$  при  $a = b$  и  $m = 0$

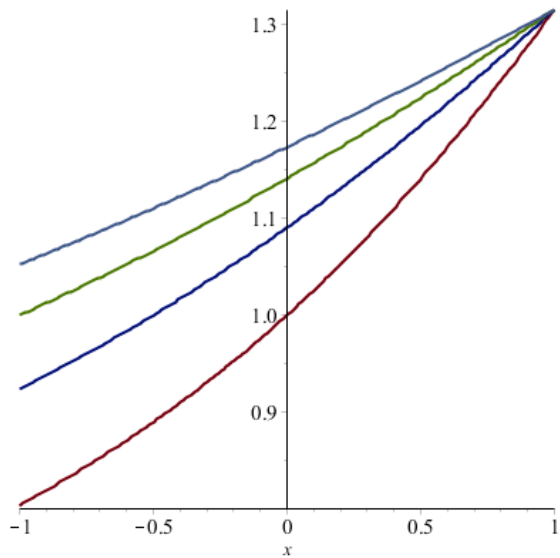


Рис. 3. Зависимость параметра  $Z$  от величины  $x = \omega_B^2/8$  при  $a = 3b$  и  $m = 1, 2, 3, 4$  (снизу вверх)

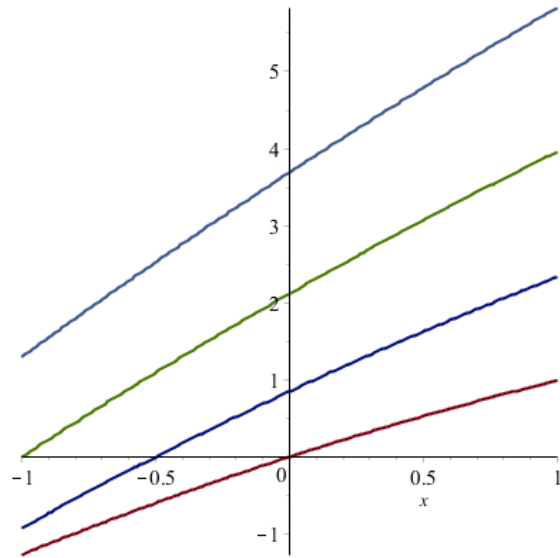


Рис. 4. Зависимость энергии основного состояния  $\tilde{E}$  от величины  $x$  при  $a = 3b$  и  $m = 1, 2, 3, 4$  (снизу вверх)

$b$  равным единице, получим

$$Z = \frac{2x - 6 + \sqrt{48 - 24x + 4x^2 + 12|m| + 3m^2}}{16(|m| + 2)}.$$

Легко видеть, что при любых  $x$  и  $m$  вариационный параметр  $Z$  положителен, и волновая функция (2.9) описывает основное состояние. Графики зависимости  $Z(x)$  при разных  $m$  приведены на рис. 3.

Графики, приведенные на рис. 3, показывают, что в области слабых магнитных полей ( $x \ll b$ ) имеются точки перестройки состояний, характерные для колец Волкано и Хилла, рассмотренных ранее. Коренное отличие данной модели состоит в следующем. В отсутствие магнитного поля ( $x = 0$ ) состояние с  $m = 0$  является основным, так как в этом случае отсутствует дополнительная энергия, связанная с орбитальным движением частицы. С увеличением магнитного поля вначале происходит перестройка уровней, как в моделях Хилла и Волкано, вследствие чего в основном состоянии у частицы появляется орбитальный момент  $m \neq 0$ , а при дальнейшем возрастании величины магнитного поля электрон возвращается к состоянию с  $m = 0$ . Данный результат ожидаем, поскольку с возрастанием величины магнитного поля происходит трансформация квантового кольца, имеющего место при  $3b - x > 0$ , в квантовую точку при  $3b - x \leq 0$ , а, как известно, состояние с  $m = 0$  для квантовой точки является наинизшим. Поскольку в состоянии с  $m \neq 0$  в квантовом кольце возникает устойчивый ток, для возникновения которого не требуется наличие разности потенциалов, то при создании нанобъекта, описываемого потенциалом (2.1), возникает перспектива создания управляющего нанoeлемента, токовое состояние которого переключается внешним магнитным полем. Такие управляющие элементы могли бы найти применение в полупроводниковой наноэлектронике в качестве устройств хранения информации или высокочувствительных датчиков магнитного поля.

### Литература

1. Ihn T., Fuhrer A., Sigrist M. et al. Quantum mechanics of quantum rings // *Adv. in Solid State Physics*, 2003, Vol. 43, P.139–154.
2. Son S.B., Miao Q., Shin J.-Y. et al. Ring and Volcano structures formed by a metal Dipyrromethene complex // *Bulletin of the Korean Chemical Society*. 2014. Jun, 35 (6). P. 1727–1731

3. Васильевский И.С., Виниченко А.Н., Еремин И.С. и др. Особенности формирования ансамблей квантовых колец GaAs/AlGaAs и InGaAs/AlGaAs методом капельной эпитаксии // *Вестник национального исследовательского ядерного университета “МИФИ”*, 2013, Т. 2, № 3, С. 267–272.
4. Маргулис В.А., Миронов В.А. Магнитный момент кольца Волкано // *Физика твёрдого тела*. 2008. Т. 50. Вып. 1. С. 148–153.
5. Simonin J., Proetto C.R., Barticevic Z. et al. Single-Particle electronic spectra of quantum rings: A comparative study // *Phys. Rev. B*. 2004. Vol. 70. P. 205305-1–205305-8.
6. Chakraborty T., Pietilainen P. Electron–Electron interaction and the persistent current in a quantum ring // *Phys. Rev. B*. 1994. Vol. 50. no. 12. P. 8460–8468.
7. Ronveaux A. The Heun’s Differential Equation, Oxford University Press, Oxford.1995. 380 p.
8. Славянов С.Ю., Лай В. Специальные функции: единая теория, основанная на анализе особенностей. СПб.: Невский диалект, 2002. 312 с.
9. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Физматлит, 2004. 797 с.
11. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Том 1. М.: ИЛ, 1953. 346 с.
12. Третьяк Д.Н., Тумаев Е.Н. Квантовая теория низкоразмерных систем. Краснодар, изд-во Кубанского университета, 2015, 212 с.

### References

1. Ihn T., Fuhrer A., Sigrist M. et al. Quantum mechanics of quantum rings. *Adv. in Solid State Physics*, 2003, vol. 43, pp. 139–154.
2. Son S.B., Miao Q., Shin J.-Y. et al. Ring and Volcano structures formed by a metal Dipyrromethene complex. *Bulletin of the Korean Chemical Society*, 2014. Jun, 35(6), pp. 1727–1731
3. Vasil’evskii I.S., Vinichenko A.N., Eremin I.S. et al. Specific features of the formation of GaAs/AlGaAs and InGaAs/AlGaAs quantum ring ensembles by droplet epitaxy. *Vestnik national’nogo issledovatel’skogo yadernogo universiteta “MIFI”* [Bulletin of the National Research Nuclear University “MEPhI”], 2013, vol. 2, no. 3, pp. 267–272. (In Russian)
4. Margulis V.A., Mironov V.A. Magnitnyy moment kol’tsa Volkano [Magnetic moment of the Volcano ring]. *Physics of the Solid State*, 2008, vol. 50. no. 1, pp. 148–153.
5. Simonin J., Proetto C.R., Barticevic Z. et al. Single-Particle electronic spectra of quantum

- rings: A comparative study. *Phys. Rev. B.*, 2004, vol. 70, pp.205305-1–205305-8.
6. Chakraborty T., Pietilainen P. Electron–Electron interaction and the persistent current in a quantum ring. *Phys. Rev. B.*, 1994, vol. 50, no. 12, pp. 8460–8468.
7. Ronveaux A. The Heun’s Differential Equation, Oxford University Press, Oxford, 1995, 380 p.
8. Slavyanov S. Yu., Lay W. *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*. Oxford University Press, 2000, 312 p.
9. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*. Chapman&Hall/CRC, London, 2003, 802 p.
10. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Quantum Mechanics. Non-relativistic theory*. Pergamon Press, Oxford–New York, 1977, 677 p.
11. Sansone G. *Equazioni Differenziali Nei Campo Reale. Parte Primo*/Bologna, 1948, 346 p. (In Italian)
12. Tretyak D.N., Tumayev E.N. *Kvantovaya teoriya nizkorazmernykh sistem* [Quantum theory of low-dimensional systems]. Kuban State University, Krasnodar, 2015, 212 p. (In Russian)

---

Статья поступила 6 апреля 2016 г.

© Тумаев Е. Н., 2016